

И. Н. МЕШКОВ Б. В. ЧИРИКОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

часть

2



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

И. Н. МЕШКОВ Б. В. ЧИРИКОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Часть

2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ОПТИКА

Ответственный редактор
акад. А. Н. Скринский



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1987

Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Часть 2. Электромагнитные волны и оптика.— Новосибирск: Наука, 1987.

Во второй части монографии рассматриваются волновые процессы в электромагнитном поле, начиная геометрической оптикой и кончая излучением и рассеянием электромагнитных волн. Внимание уделено таким явлениям, как интерференция и дифракция, вынужденное излучение (лазеры, мазеры). Наглядность изложения сочетается с доступным теоретическим анализом. Описаны важнейшие эксперименты и интересные с точки зрения физики практические приложения, включая голографию, спектральный анализ, генерацию и индикацию электромагнитных волн в радиофизике.

Книга предназначена для специалистов в различных областях физики и техники, преподавателей вузов.

Рецензенты *Б. А. Луговцов, Д. Д. Рютов*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XIII. Геометрическая оптика	
§ 88. Оптико-механическая аналогия. Принцип Ферма	5
§ 89. Элементы оптических систем. Тонкая линза	9
§ 90. Толстая линза	15
§ 91. Закон сохранения фазового объема	19
Глава XIV. Интерференция электромагнитных волн	
§ 92. Интерференция и когерентность	21
§ 93. Область когерентности протяженного источника	26
§ 94. Интерференция немонахроматических волн	28
§ 95. Двухлучевая интерферометрия	32
§ 96. Однофотонная интерференция	39
Глава XV. Дифракция электромагнитных волн	
§ 97. Дифракция на щели	42
§ 98. Принцип Гюйгенса — Френеля	44
§ 99. Дифракция Френеля	48
§ 100. Дифракционная решетка	52
§ 101. Фазовые решетки	59
§ 102. Дифракция и геометрическая оптика	61
§ 103. Сверхразрешение	66
Глава XVI. Оптическая спектроскопия	
§ 104. Спектральное разрешение	68
§ 105. Интерферометр Фабри — Перо	71
§ 106. Сравнительные характеристики спектрометров	75
Глава XVII. Голография	
§ 107. Голография Френеля	78
§ 108. Линза как фурье-анализатор	82
§ 109. Голография Фурье	84
§ 110. Объемная голография	88
§ 111. Проблемы фотографии в голографии	91
§ 112. Оптическая фильтрация	94
§ 113. Некоторые применения голографии	98
Глава XVIII. Релятивистски-инвариантное описание электромагнитного поля	
§ 114. Уравнения для потенциалов	101

§ 115. Тензор электромагнитного поля	102
§ 116. Уравнения Максвелла	104
§ 117. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	107
§ 118. Закон сохранения энергии-импульса поля	110
Глава XIX. Потенциалы и поля движущихся зарядов	
§ 119. Запоздывающие потенциалы	115
§ 120. Потенциалы Лиенара — Вихерта	118
§ 121. Поле движущегося заряда	119
§ 122. Поле заряда, движущегося с постоянной скоростью	121
Глава XX. Излучение нерелятивистских зарядов	
§ 123. Поле движущихся зарядов на больших расстояниях	124
§ 124. Дипольное излучение	126
§ 125. Мультипольное излучение	129
§ 126. Торможение излучением	135
Глава XXI. Генерация и индикация электромагнитных волн в радиодиапазоне	
§ 127. Основные характеристики и типы антенн	140
§ 128. Проволочные антенны	141
§ 129. Дифракционные антенны	152
§ 130. Антенные интерферометры	163
§ 131. Распространение радиоволн и радиосвязь	177
Глава XXII. Излучение релятивистских заряженных частиц	
§ 132. Мощность излучения и сила торможения	182
§ 133. Угловое распределение излучения	187
§ 134. Синхротронное излучение	192
§ 135. Излучение Вавилова — Черенкова	199
§ 136. Переходное излучение	204
Глава XXIII. Рассеяние электромагнитных волн	
§ 137. Рассеяние волны свободным зарядом	207
§ 138. Рассеяние волны связанным зарядом	212
§ 139. Рассеяние волны системой зарядов	214
§ 140. Рентгеноструктурный анализ	220
Глава XXIV. Квантовые генераторы электромагнитного излучения	
§ 141. Вынужденное излучение	229
§ 142. Квантовая генерация	233
§ 143. Мазеры	238
§ 144. Лазеры	241
§ 145. Некоторые применения лазеров	247
Литература	250
Предметный указатель	251

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 88. ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ.
ПРИНЦИП ФЕРМА

До сих пор мы рассматривали одномерное движение волны, т. е. считали ее плоской. Теперь перейдем к изучению законов распространения волн в трехмерном пространстве. В общем случае для этого необходимо решать волновое уравнение с соответствующими граничными условиями, что является весьма сложной математической задачей. Ее решению посвящено так много работ, что они составляют сейчас значительную часть специального раздела математики, который называется «уравнения математической физики». Существует, однако, важный частный случай, когда длина волны поля много меньше всех характерных размеров системы. Волна распространяется тогда подобно пучку частиц, движущихся по определенным траекториям — лучам. Отсюда и название этого приближения — геометрическая оптика.

Простейший пример такого движения — плоская волна, которую можно рассматривать как пучок параллельных лучей, ортогональных волновому фронту. Плоская монохроматическая волна характеризуется, как известно, постоянным волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω . Приближение геометрической оптики соответствует ситуации, когда \mathbf{k} и ω мало меняются на расстояниях порядка длины волны. Это условие можно записать:

$$\left| \frac{\partial k_\alpha}{\partial x_\beta} \right| \ll k^2; \quad \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \ll \omega^2; \quad \left| \frac{\partial k_\alpha}{\partial t} \right| \ll \omega k. \quad (88.1)$$

Мы добавили здесь также условие для скорости изменения частоты, которое обеспечивает приближенную монохроматичность волны. Иначе говоря, в приближении геометрической оптики на небольших участках волну всегда можно рассматривать как плоскую.

Любое волновое поле можно записать так:

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}, t) e^{i\psi(\mathbf{r}, t)}, \quad (88.2)$$

где действительные функции A_0 и ψ характеризуют амплитуду и фазу поля соответственно. Последняя ($\psi(\mathbf{r}, t)$) называется также *эйконалом*. В приближении геометрической оптики эйконал можно разложить в ряд вблизи произвольной точки поля, в которую мы поместим начало отсчета:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \approx \psi(0, 0) + (\mathbf{r}, \nabla\psi) + t \frac{\partial\psi}{\partial t} + \dots \quad (88.3)$$

Это выражение аналогично фазе плоской волны $(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t$, причем

$$\mathbf{k} \approx \nabla\psi; \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (88.4)$$

Точность этого приближения определяется следующими членами выражения (88.3), которые, как легко проверить, малы при условии (88.1).

Вектор \mathbf{k} определяет направление луча и в общем случае является переменным, что аналогично движению частицы по криволинейной траектории. Оказывается, что эту механическую аналогию можно продолжить и дальше, а именно, можно написать уравнения движения волнового пакета в форме уравнений механики частиц.

Рассмотрим вначале простой пример — движение луча света в атмосфере планеты. Вследствие убывания плотности атмосферы с высотой возникает градиент ее показателя преломления. Так как величина $(n-1)$ пропорциональна плотности атмосферы, для области вблизи поверхности планеты можно написать $\partial n/\partial r = -(n-1)/h$, где h — характерная высота атмосферы. Градиент показателя преломления приводит к повороту луча, так как внешняя часть волнового фронта распространяется быстрее внутренней. Радиус кривизны горизонтального луча $\rho = -n/(dn/dr) = nh/(n-1)$. Для Земли $n-1 \approx 3 \cdot 10^{-4}$; $h \approx 8$ км. Отсюда $\rho \approx 3 \cdot 10^4$ км, что почти в пять раз превышает радиус Земли. Поэтому рефракция в атмосфере лишь незначительно искажает результаты оптических наблюдений на Земле. Эти искажения, особенно вызванные локальными переменными неоднородностями атмосферы, существенно затрудняют точные геодезические измерения. Так, высота Джомолунгмы (Эвереста) за последние 40 лет «изменилась» на 40 м. Однако на Юпитере, а также на Венере, где атмосфера во много раз плотнее, лучи света сильно изгибаются, что приводит к значительному расширению горизонта. Космонавту, попавшему на такие планеты, показалось бы что он находится на дне гигантской чаши. Аналогичную природу имеют так называемые миражи, наблюдаемые в пустыне и на море.

Из этого примера ясно, что градиент показателя преломления играет роль «силы», искривляющей траекторию волнового пакета. Значит, сам показатель преломления можно связать с «потенциальной энергией». Чтобы проследить дальше эту механическую аналогию, напомним, что согласно квантовой механике частота волны пропорциональна энергии фотона, а волновой вектор — его импульсу. Уравнения механики можно записать в так называемой гамильтоновой форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (88.5)$$

где \mathbf{r} , \mathbf{p} — координаты и импульс частицы, а $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция Гамильтона, равная в простейшем случае полной энергии, выраженной через координаты и импульсы. Первое из уравнений (88.5)

есть не что иное, как второй закон Ньютона, тогда как второе дает связь между скоростью и импульсом.

Оптико-механическая аналогия наводит на мысль, что частота волны, представленная как функция координат и волнового вектора, должна играть роль функции Гамильтона. Иными словами, можно думать, что движение волнового пакета в приближении геометрической оптики описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{ck}{n(\mathbf{r}, \omega)}. \quad (88.6)$$

Уравнения движения принимают вид

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (88.7)$$

Второе из этих уравнений нам уже знакомо — оно определяет групповую скорость пакета вдоль траектории, а первое описывает формулу луча. При вычислении производной $\partial \omega / \partial \mathbf{r}$ необходимо учитывать дисперсию, т. е. зависимость $n(\omega)$. Дифференцируя равенство $\omega n(\mathbf{r}, \omega) = ck$ по \mathbf{r} (производная $\partial \omega / \partial \mathbf{r}$ вычисляется при постоянном k), найдем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} n + \omega \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (88.8)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla \omega = -\frac{\omega}{n + \omega \partial n / \partial \omega} \nabla n. \quad (88.9)$$

С другой стороны, дифференцируя равенство $\omega n(\mathbf{r}, \omega) = ck$ по k при $\mathbf{r} = \text{const}$, найдем

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n + \omega \partial n / \partial \omega}. \quad (88.10)$$

Тогда «механические» уравнения движения волнового пакета можно представить как:

$$\dot{\mathbf{k}} = k \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\nabla n}{n}; \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (88.11)$$

Траекторию луча удобно описывать в переменных s, \mathbf{l} , где s — длина вдоль траектории, а \mathbf{l} — единичный вектор, касательный к траектории. Имеем (см. (88.11))

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k}; \quad \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{\partial \omega}{\partial k}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{ds} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} \frac{dt}{ds} = k \frac{\nabla n}{n}.$$

Так как вектор \mathbf{k} направлен вдоль траектории, производная $\frac{d\mathbf{k}}{ds} = \left(\mathbf{l}, \frac{d\mathbf{k}}{ds} \right) = k \left(\mathbf{l}, \frac{\nabla n}{n} \right)$. Окончательно уравнение луча принимает вид

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{ds} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} \cdot \frac{dk}{ds} = \frac{\nabla n - \mathbf{l}(\mathbf{l}, \nabla n)}{n} = \frac{(\nabla n)_{\perp}}{n}, \quad (88.12)$$

где $(\nabla n)_{\perp}$ — проекция вектора ∇n на плоскость, перпендикулярную лучу (рис. XIII.1).

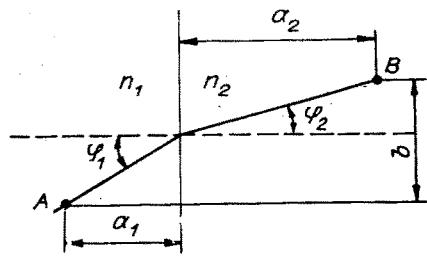
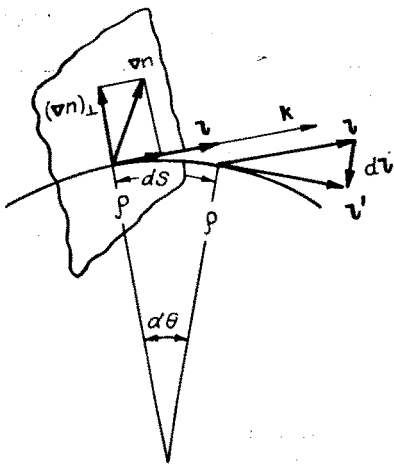


Рис. XIII.2. К выводу закона преломления из принципа Ферма.

Рис. XIII.1. Искривление луча в среде с градиентом показателя преломления.

Применим последнее уравнение к рассмотренному выше простому примеру. Так как радиус кривизны траектории $\rho = 1/|dl/ds|$ и в данном случае $(\nabla n)_\perp = \nabla n$, получаем $\rho = n/|\nabla n| = nh/(n-1)$.

Рассмотрим теперь преломление света на границе двух сред. В этом случае «действующая на луч сила» (∇n) имеет только нормальную к границе компоненту. Следовательно, касательная компонента импульса сохраняется:

$$k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \varphi_2, \quad (88.13)$$

где φ_1, φ_2 — углы лучей с нормалью к границе. Так как частота волны не изменяется при переходе через границу (сравни с сохранением энергии частицы в механике), то $k_1/k_2 = n_1/n_2 = \sin \varphi_2/\sin \varphi_1$, т. е. мы получили обычный закон преломления.

Пусть волна идет из первой среды во вторую и $n_2 < n_1$. Тогда при некоторых условиях закон преломления вступает в противоречие с неизменностью частоты. Действительно, запишем $\omega^2/c^2 = (k_{1n}^2 + k_{1t}^2)/n_1^2 = (k_{2n}^2 + k_{2t}^2)/n_2^2$ и учтем, что $k_{1t} = k_{2t} = k_t = k_1 \sin \varphi_1$. Получим

$$\left(\frac{k_{2n}}{k_1}\right)^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 \varphi_1. \quad (88.14)$$

Для углов падения $\sin \varphi_1 > n_2/n_1$ волновое число k_{2n} оказывается мнимым, т. е. преломленная волна отсутствует. Это явление называется *полным внутренним отражением* (см. § 74) и с механической точки зрения соответствует отражению частицы от потенциального барьера. Отметим, что оптический «потенциальный барьер» совсем не похож на механический. В частности, как показывает выражение (88.14), волна проходит любой барьер при нормальном падении. Это различие связано с необычным видом выражения для полной энергии (88.6), где «кинетическая энергия» перепутана с «потенциальной». В механике мы обычно имеем дело

с системами, у которых полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической. Это не мешает, однако, использовать механические уравнения движения волнового пакета (88.7) или (88.12).

Уравнение луча можно получить и из совершенно других соображений. Еще во второй половине XVIII в. известный французский математик Ферма сформулировал принцип, согласно которому траектория светового луча между двумя заданными точками A, B соответствует минимуму интеграла

$$s_0 = \int_A^B n(s) ds = \min. \quad (88.15)$$

Этот интеграл можно переписать также в виде

$$\psi_0 = \int_A^B (\mathbf{k}, d\mathbf{s}) = \frac{\omega}{c} s_0 = \min, \quad (88.16)$$

так как $\omega = \text{const}$, ψ_0 имеет простой физический смысл — она равна разности фаз волны между точками A, B в данный момент времени или полному числу длин волн на пути AB , умноженному на 2π . Величина s_0 называется *оптической длиной пути*.

Для однородной среды ($n = \text{const}$) из принципа Ферма немедленно следует прямолинейность лучей. Используя этот принцип, легко получить также закон преломления лучей на границе двух сред (см. задачу).

Задача. Получить закон преломления из принципа Ферма. Оптическая длина пути AB как функция неизвестных углов равна (рис. XIII.2)

$$s_0 = \frac{a_1 n_1}{\cos \varphi_1} + \frac{a_2 n_2}{\cos \varphi_2}; \quad b = a_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + a_2 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Дифференциалы обеих величин равны нулю, так как s_0 должно быть минимальным, а расстояние $b = \text{const}$:

$$ds_a = \frac{a_1 d\varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} n_1 \sin \varphi_1 + \frac{a_2 d\varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} n_2 \sin \varphi_2 = 0;$$

$$db = \frac{a_1 d\varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{a_2 d\varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} = 0,$$

откуда $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$.

§ 89. ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ТОНКАЯ ЛИНЗА

Приближение геометрической оптики позволяет дать простое описание оптических систем — устройств, преобразующих пучки световых лучей.

Среди всех преобразований простейшими являются линейные преобразования, которые включают в себя фокусировку (дефокуси-

ровку) пучков и их поворот — отражение и преломление. В случае преобразования типа фокусировки каждый луч претерпевает отклонение на угол, пропорциональный его расстоянию от некоторой оси или плоскости. При повороте все лучи в пучке отклоняются на один и тот же угол. Фокусировка осуществляется при помощи линз или кривых зеркал, а поворот — с помощью плоских зеркал (отражение) или призм (преломление, полное внутреннее отражение — см. § 72—74).

В этом параграфе мы рассмотрим фокусирующие свойства различных элементов, используя матричный метод, развитый в электронной оптике и физике ускорителей заряженных частиц.

Фокусировка сферической границей. Рассмотрим прохождение луча через сферическую поверхность радиуса кривизны R , разделяющую две среды с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. XIII.3). Записав закон преломления на границе и геометрические соотношения

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2; \quad \varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2 = \text{Arcsin} \left(\frac{x_0}{R} \right), \quad (89.1)$$

получим систему уравнений, связывающих углы луча перед и за границей. Направления отсчета углов показаны на рис. XIII.3. Радиус кривизны границы также определен со знаком: $R > 0$, если центр сферы лежит справа от границы. Если считать все углы малыми,

$$\varphi \ll 1; \quad \theta = \frac{dx}{dz} \equiv x' \ll 1; \quad x_0 \ll R, \quad (89.2)$$

то уравнения (89.1) становятся линейными, т. е. значительно упрощаются. Такое приближение называется в оптике *параксимальным*, буквально это означает «приосевой». Тогда из (89.1) найдем для x_2 :

$$x_2' = \frac{n_1}{n_2} x_1' - \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \frac{x_0}{R}. \quad (89.3)$$

Рассмотрим пучок лучей, параллельных оси слева от границы ($x_1' = 0$), и пусть $R > 0$ и $n_2 > n_1$. Из (89.3) следует, что справа от границы все лучи проходят через точку на оси z с координатой

$$z_f = - \frac{x_0}{x_2'} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R > 0, \quad (89.4)$$

которая называется *фокусом*. Координату фокуса, отсчитанную от границы, будем обозначать $F_{12} = z_f$. Если лучи пучка параллельны оси справа от границы, то фокус расположен слева от границы в точке с координатой

$$F_{21} = - \frac{x_0}{x_1'} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R < 0. \quad (89.5)$$

То же самое будет и в случае $R < 0$, $n_2 < n_1$, т. е. сферическая

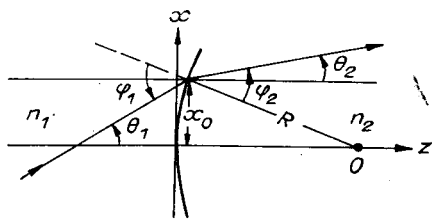


Рис. XIII.3. Фокусировка сферической границей.

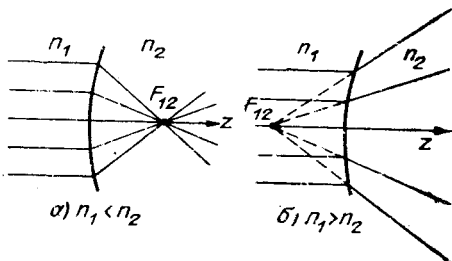


Рис. XIII.4. Действительный (а) и мнимый (б) фокусы.

граница фокусирует пучок лучей при условии $R(n_2 - n_1) > 0$ (рис. XIII.4, а).

В случае $R(n_2 - n_1) < 0$ величина $F_{12} < 0$ ($F_{21} > 0$), и пучок лучей нигде не пересекается, т. е. сферическая поверхность дефокусирует пучок лучей (рис. XIII.4, б). В этом случае точку с координатой F_{12} (или F_{21}) называют *мнимым фокусом*.

Так как на границе $x_2 = x_1 = x_0$, преобразование координаты и угла луча с осью при пересечении границы можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}; \quad M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{12} & n_1/n_2 \end{pmatrix}. \quad (89.6)$$

Порядок индексов матрицы указывает направление движения ($1 \rightarrow 2$). Отметим, что детерминант матрицы $\text{Det } M_{21} = n_1/n_2$.

В параксиальном приближении любая поверхность может рассматриваться как сферическая. Фактически поверхности линз действительно выполняются в виде сфер, так как это единственная поверхность, которая может быть изготовлена с необходимой точностью.

Тонкая аксиальная линза — элемент оптических систем, образованный пересечением двух сферических границ. Прямая, соединяющая их центры, называется осью линзы. Линза считается *тонкой*, если изменение координаты луча внутри линзы пренебрежимо мало (рис. XIII.5):

$$|x_2 - x_1| \ll x_1. \quad (89.7)$$

Координаты и углы луча в плоскостях II и I связаны между собой двумя преобразованиями типа (89.6)

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{II}} = M_{20} M_{01} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{I}}. \quad (89.8)$$

Здесь индексом «0» обозначены параметры, относящиеся к области внутри линзы. Обратим внимание на порядок перемножения матриц — он следует направлению хода луча: вначале координата и угол луча в плоскости I преобразуются в плоскость 0 умножением

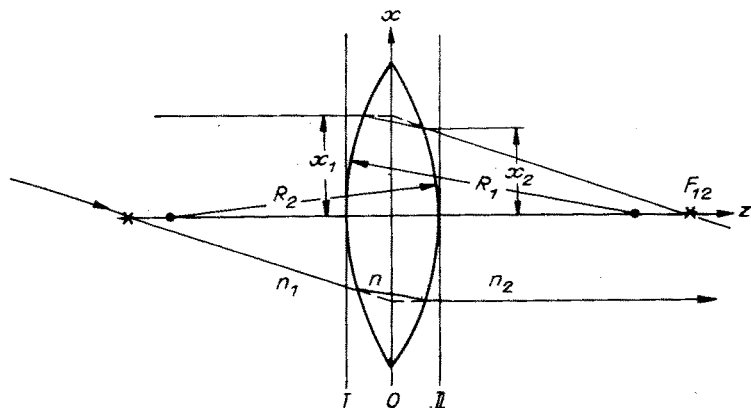


Рис. XIII.5. Тонкая линза.

на матрицу M_{01} , а затем — в плоскость II умножением на матрицу M_{20} . В приближении тонкой линзы положение плоскостей I, O, II (но не порядок их расположения!) не определено — это результат условия (89.7), вырождение снимается в случае толстой линзы (§ 90).

Производя операцию перемножения матриц, найдем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{II}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{02} & n/n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{10} & n_1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{I}} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{12} & n_1/n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{I}}, \end{aligned} \quad (89.9)$$

где величина F_{12} , определяемая как

$$\frac{1}{F_{12}} = \frac{n-n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{n_2-n}{n_2} \cdot \frac{1}{R_2}, \quad (89.10)$$

есть координата фокуса тонкой линзы, выполненной из материала с показателем преломления n и помещенной на границе двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 . Для линзы в воздухе ($n_1 = n_2 = 1$) получим

$$\frac{1}{F_{12}} = (n-1) (1/R_1 - 1/R_2) \equiv \frac{1}{F}. \quad (89.11)$$

В дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем.

В том, что F_{12} — действительно координата фокуса, нетрудно убедиться, найдя точку, в которой пересекается с осью луч, падающий на линзу параллельно ее оси, т. е. луч $(x, 0)_{\text{I}}$:

$$x_{\text{II}} = x_{\text{I}}, \quad x'_{\text{II}} = -\frac{x_{\text{I}}}{F},$$

отсюда

$$z_f = -x_{\text{II}}/x'_{\text{II}} = F.$$

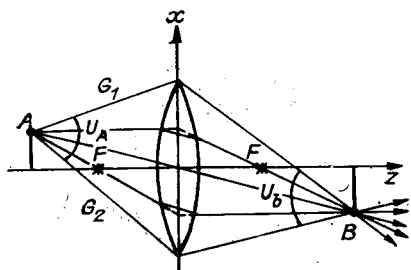


Рис. XIII.6. Построение изображения в тонкой линзе.

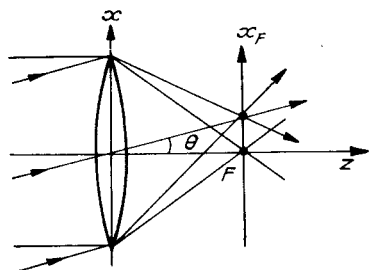


Рис. XIII.7. Фокальная плоскость тонкой линзы.

Как и прежде, радиусы определены со знаком. В частности, для линзы, изображенной на рис. XIII.5, $R_1 > 0$, $R_2 < 0$.

Аналогично получим для луча, параллельного оси в области II, $F_{21} = -F_{12} = -F$. Величина (со знаком) $D = 1/F$ называется *оптической силой* линзы и измеряется в диоптриях: 1 диоптрия = 1 м⁻¹. Для фокусирующей линзы $D > 0$.

Матрица преобразования для линзы в воздухе имеет простой вид:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}. \quad (89.12)$$

В этом случае луч, пересекающий линзу в точке, лежащей на оси линзы (центр линзы), не претерпевает отклонения. Действительно, если $x_{II} = x_I = 0$, то $x'_{II} = (x_I/F_{21}) + x'_I = x_I$. Вместе с лучом, падающим на линзу параллельно ее оси, этот луч образует базисную пару, служащую для построения изображения в тонкой линзе. Две точки A и B называются *сопряженными*, или, что то же самое, являются изображениями друг друга, если любой луч, проходящий через точку A, пройдет и через точку B. Ясно, что базисные лучи также будут пересекаться в сопряженных точках. Отсюда вытекает простое правило построения изображения, которое иллюстрирует рис. XIII.6. Из геометрических соотношений этого рисунка следует также

$$V \equiv \frac{x_B}{x_A} = \frac{z_B}{z_A}, \quad \frac{x_A}{F} = -\frac{x_B}{z_B - F}, \quad (89.13)$$

откуда

$$\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_A} = \frac{1}{F}. \quad (89.14)$$

Точки, расстояние которых до линзы удовлетворяет соотношению (89.14), лежат в сопряженных плоскостях, ортогональных оси линзы. Плоскость, проходящая через фокус линзы и ортогональная ее оси, называется *фокальной*. Сопряженная ей плоскость расположена в бесконечности, а пучок параллельных лучей, пересекающих ось линзы под некоторым углом θ , фокусируется в точку фокальной плоскости $x_F = \theta F$ (рис. XIII.7). Величина V в (89.13) называется *линейным увеличением* линзы, а лучи, проходящие через

края линзы или диафрагмы и ограничивающие пучок (лучи G_1 и G_2 на рис. XIII.6), — *апертурными*. Отношение углов раствора этих лучей будет *угловым увеличением*:

$$W = \left| \frac{U_B}{U_A} \right|. \quad (89.15)$$

Задача 1. Пользуясь матричным методом, получить формулу тонкой линзы (89.14).

Для координат луча $(x, x')_A$, выходящего из точки A , матрица преобразования из A в B является произведением трех матриц:

$$M_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & z_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_A}{F} & -z_A + z_B - \frac{z_A z_B}{F} \\ -\frac{1}{F} & 1 + \frac{z_A}{F} \end{pmatrix}.$$

Здесь слева и справа от матрицы линзы стоят матрицы свободного пространства, где свет распространяется прямолинейно. В результате

$$\begin{aligned} x_B &= \left(1 - \frac{z_A}{F}\right)x_A + \left(-z_A + z_B - \frac{z_A z_B}{F}\right)x'_A; \\ x'_B &= -\frac{x_A}{F} + \left(1 + \frac{z_A}{F}\right)x'_A. \end{aligned} \quad (89.16)$$

Для сопряженных точек A и B величина x_B не зависит от x'_A (луч, проходящий через A под любым углом к оси, проходит и через B). Поэтому коэффициент при x'_A в первом уравнении равен нулю, что и дает (89.14).

Задача 2. Определить глубину резкости объектива. Указание: если две плоскости $z = a$ и $z = b$ сопряженные, то изображение точки $z = a - \Delta z$ в плоскости $z = b$ считается резким, если размер этого изображения не превышает некоторой величины δ , определяемой разрешающей способностью фотоаппарата или объектива.

Пусть диаметр апертурного отверстия объектива D . Тогда изображение точки $(x, a - \Delta z)$ в плоскости $z = b$ будет иметь размер, ограниченный апертурными лучами $A'G_1B'$ и $A'G_2B'$. Воспользовавшись построениями, приведенными на рис. XIII.8, и учитывая, что сопряженные точки удовлетворяют соотношению (89.14), найдем $\Delta x = |x_2 - x_1| = D\Delta z'/(b + \Delta z') = D\delta\Delta z/a(a - \Delta z)$. Отсюда глубина резкости

$$\Delta z \approx \frac{\delta}{D} \cdot \frac{a^2}{b} \approx \frac{\delta}{D} \cdot \frac{a^2}{F}. \quad (89.17)$$

Последнее выражение справедливо для фотоаппаратов, где обычно $a \gg b \approx F$. Отсюда и следует сравнительно большое значение глубины резкости фотообъектива. Так, для типичного объектива с разрешением 50 линий/мм ($\delta = 0,02$ мм), фокусным расстоянием 50 мм и относительным отверстием $D/F = 1/8$ глубина резкости для $a = 3$ м составляет примерно $\pm 0,6$ м.

Сферическое зеркало, как и сферическая граница, обладает фокусирующими свойствами (рис. XIII.9) и в параксиальном приближении эквивалентно комбинации оптических элементов «плоское зеркало + тонкая линза». Фокусное расстояние последней равно половине радиуса кривизны зеркала. Подробнее этот вопрос рассмотрен в § 129 (задачи 1, 2). Там же показано, что сферическое зеркало является частным случаем параболического, которое фокусирует и широкие (непараксиальные) пучки.

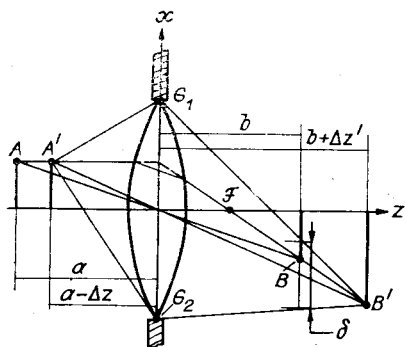


Рис. XIII.8. К определению глубины резкости объектива.

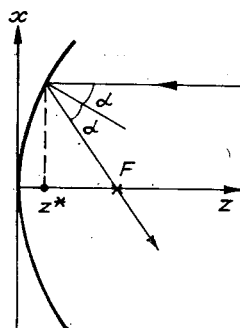


Рис. XIII.9. Фокус параболического зеркала.

В заключение параграфа отметим, что все сказанное о линзах, ограниченных сферическими поверхностями, относится и к так называемым цилиндрическим линзам, поверхность которых ограничена цилиндрами с параллельными осями. Такая линза фокусирует параллельный пучок лучей не в точку, а в линию, параллельную осям цилиндров, а все оптические преобразования происходят только в плоскости, ортогональной их осям.

§ 90. ТОЛСТАЯ ЛИНЗА

Если лучи, проходя через линзу, претерпевают значительное смещение на толщине линзы, так что условие (89.7) не выполняется, линза называется *толстой*.

Матричный метод позволяет дать простое описание толстой линзы. Рассмотрим линзу, ограниченную сферическими поверхностями радиусов кривизны R_1 , R_2 (рис. XIII.10) и находящуюся в среде с $n=1$. Матрица преобразования такой линзы M равна произведению матриц сферических границ 1, 2 (89.6), в которых

$$F_{10} = \frac{n}{n-1} R_1; \quad F_{02} = -\frac{1}{n-1} R_2, \quad (90.1)$$

и матрицы преобразования лучей из плоскости 1 в плоскость 2

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (90.2)$$

Откуда

$$\begin{aligned} M &= M_{20} M_{21} M_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{02} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{10} & 1/n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{F_{10}} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{d}{nF_{02}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (90.3)$$

Здесь

$$\frac{1}{F} = \frac{n}{F_{10}} + \frac{1}{F_{02}} - \frac{d}{F_{10}F_{02}} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{R_1 R_2}. \quad (90.4)$$

Использование матрицы (90.3) для построения изображений, создаваемых толстой линзой, довольно громоздко. Однако с ее помощью можно найти некоторый геометрический метод построения сопряженных точек, аналогичный тому, который использовался выше для тонкой линзы. Для этого введем так называемые кардинальные точки и плоскости толстой линзы. Первая пара таких точек — фокусы, т. е. точки, в которых пересекаются лучи, падающие на линзу параллельно ее оси ($x_1 = 0$). Такой луч на выходе из линзы имеет координату и угол

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_2 = M \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}x_1 \\ m_{21}x_1 \end{pmatrix}, \quad (90.5)$$

где $m_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы M . Расстояние до точки F_2 от границы Q_2 линзы (см. рис. XIII.10) есть $-x_2/x'_2 = -m_{11}/m_{21}$. Аналогично луч, идущий справа налево параллельно оси, пересечет с осью в точке F_1 на расстоянии m_{11}^{-1}/m_{21}^{-1} от границы Q_1 ($m_{\alpha\beta}^{-1}$ — элемент матрицы, обратной матрице M).

Введем *главные плоскости* линзы. Для этого заменим реальный ход лучей в линзе эквивалентными траекториями: такой «эквивалентный луч», параллельный оси слева от линзы, проходит сквозь линзу без отклонения до главной плоскости H_2 (рис. XIII.11), на которой «преломляется» и пересекает ось в точке F_2 . Аналогично луч, проходящий через точку F_1 , «преломляется» на главной плоскости H_1 и выходит за линзой параллельно ее оси. Координату фокуса F_2 относительно главной плоскости H_2 (со знаком) назовем *фокусным расстоянием* F_{12} . Повторив проделанные выше вычисления для луча $(x_1, 0)$, найдем

$$F_{12} = -\frac{x_1}{x'_2} = -\frac{1}{m_{21}} = F. \quad (90.6)$$

Таким образом, элемент m_{21} матрицы преобразования толстой линзы

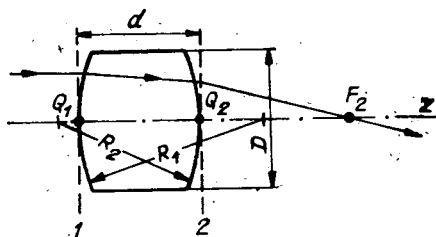


Рис. XIII.10. Толстая линза.

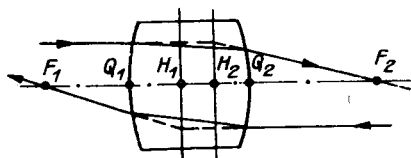


Рис. XIII.11. Главные плоскости толстой линзы.

зы есть $-1/F$. Аналогично фокусное расстояние F_{21} есть

$$F = -\frac{1}{m_{21}^{-1}}. \quad (90.7)$$

Детерминант матрицы (90.3) равен единице, поэтому элементы прямой и обратной матриц связаны простыми соотношениями

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}. \quad (90.8)$$

Отсюда, в частности, следует важное свойство фокусных расстояний толстой линзы, находящейся в однородной внешней среде:

$$F_{12} = -F_{21} = F, \quad (90.9)$$

где F дано в (90.4). Таким образом, фокусные расстояния равны по абсолютной величине и находятся по разные стороны от главных плоскостей. Расположение этих плоскостей (см. рис. XIII.11) можно найти тем же способом. Расстояние до главной плоскости H_2 от границы линзы Q_2 есть

$$h_2 = -\frac{x_2}{x_2'} - F_{12} = \frac{1 - m_{11}}{m_{21}} = -\frac{d}{n(1 - R_1/R_2) + (n-1)d/R_2}. \quad (90.10)$$

Положение главной плоскости H_1 дается выражением

$$h_1 = \frac{1 - m_{11}^{-1}}{m_{21}^{-1}} = \frac{R_1}{R_2} h_2. \quad (90.11)$$

Напомним, что радиусы R_1 , R_2 и расстояния h_1 , h_2 определены со знаками, поэтому расположение главных плоскостей зависит от формы и размеров линзы. В частности, при условии

$$R_1 - R_2 < \frac{n-1}{n} d \quad (90.12)$$

линза является фокусирующей ($F > 0$) и главная плоскость H_1 расположена справа от границы Q_1 ($h_1 > 0$), а H_2 — слева от границы Q_2 ($h_2 < 0$). Расстояние между главными плоскостями

$$h_{12} = \frac{n+1 + (n-1) \frac{d}{R_2 - R_1}}{n + (n-1) \frac{d}{R_2 - R_1}} d \quad (90.13)$$

также определено со знаком, так что при $h_{12} < 0$ расположение главных плоскостей «противоестественное»: главная плоскость H_1 находится позади H_2 , что имеет место, если $R_1 - R_2 < (n-1)d/n$.

Обсуждая оптические свойства тонкой линзы, мы выяснили, что луч, проходящий через ее центр, не претерпевает преломления (отклонения). В толстой линзе таких точек нет. Однако аналогично главным плоскостям, можно ввести две *узловые точки*, определив их следующим образом: если луч, падающий на границу l ,

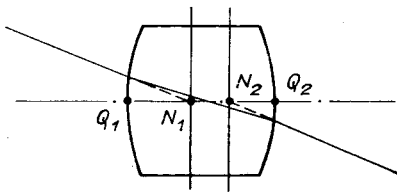


Рис. XIII.12. Узловые точки толстой линзы.

лежит на прямой, проходящей через узловую точку N_1 , то за линзой он направлен вдоль прямой, параллельной первой и проходящей через узловую точку N_2 (рис. XIII.12). Это означает, что для такого луча $x'_2 = x'_1$. Расстояния между узловыми точками и границами линзы (см. рис. XIII.12):

$$Q_1 = -\frac{x_1}{x'_1}, \quad Q_2 = -\frac{x_2}{x'_2}. \quad (90.14)$$

Записав матричные соотношения для координат эквивалентного луча, «проходящего» через узловые точки,

$$x_2 = m_{11}x_1 + m_{12}x'_1, \quad x'_2 = m_{21}x_1 + m_{22}x'_1 = x'_1,$$

найдем

$$q_1 = -\frac{1 - m_{22}}{m_{21}} = h_1, \quad q_2 = -m_{11}q_1 + m_{12} = \frac{1 - m_{11}}{m_{21}} = h_2. \quad (90.15)$$

В последнем соотношении использовано свойство матрицы (90.3) — равенство единице ее детерминанта. Сравнивая полученные результаты с выражениями (90.10), (90.11), нетрудно видеть, что узловые точки лежат на пересечениях оси линзы с главными плоскостями. Подчеркнем, что этим свойством обладает линза, если она находится в среде с одинаковым коэффициентом преломления по обе стороны от нее.

Набор кардинальных плоскостей и точек линзы позволяет строить изображения, как это показано на рис. XIII.13.

Наконец, можно более определенно сформулировать понятие тонкой линзы: для нее расстояние между главными плоскостями (90.13) много меньше фокусного расстояния (90.4). Это условие имеет простой вид для симметричной линзы ($R_1 = R_2$): $d/R \ll \ll \sqrt{n}/(n-1)$, и для резко несимметричной линзы ($R_2 \gg R_1 = = R$): $d/R \ll n(n-1)/(n+1)$.

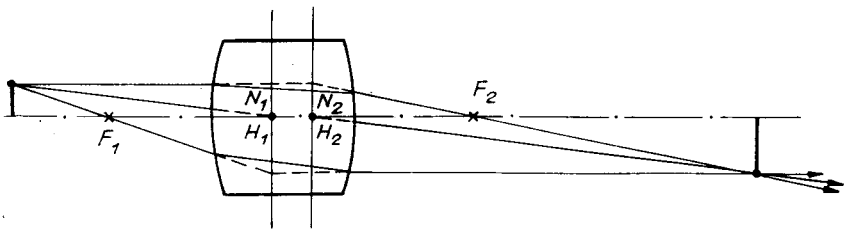


Рис. XIII.13. Построение изображения в толстой линзе по известным кардинальным точкам.

Задача. Найти фокусное расстояние дублета — фокусирующей и дефокусирующей тонких линз, отстоящих на расстоянии d друг от друга.

Перемножая матрицы (89.12) и (90.2) в соответствующем порядке, получим

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{d}{F_1 F_2}; \quad \frac{1}{F} = \frac{d}{f^2} > 0 \quad \text{при} \quad F_1 = -F_2 = f.$$

Такой дублет всегда фокусирует.

§ 91. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ФАЗОВОГО ОБЪЕМА

Возможны ли любые преобразования пучка света с помощью оптической системы? Можно ли, например, получить так называемые «лучи смерти» (заветная мечта многих несчастных изобретателей), т. е. можно ли сжать световой пучок до очень малых поперечных размеров и малого углового разброса, скажем, с помощью двух линз с разными фокусными расстояниями, как показано на рис. XIII.14, а? Простое геометрическое построение хода лучей (рис. XIII.14, б) показывает, что (к счастью!) это невозможно: при сжатии светового пучка во столько же раз возрастает его угловая расходимость. Оказывается, что такое ограничение возможностей оптической системы вовсе не случайно, а является частным случаем фундаментального закона механики, известного под названием закона сохранения фазового объема (см. § 58). Поскольку распространение светового пучка в приближении геометрической оптики может быть описано с помощью механических уравнений Гамильтона (см. § 88), то упомянутый закон применим и в оптике для фазового объема пучка

$$\Gamma = \int dx dy dz dk_x dk_y dk_z = \text{const.} \quad (91.1)$$

Интегрирование распространяется здесь по области фазового пространства (x, y, z, k_x, k_y, k_z) , занятой световым пучком.

Отношение энергии пучка к его фазовому объему (91.1) (фазовая плотность энергии) зависит, как это устанавливается в статистической физике, только от эффективной температуры пучка.

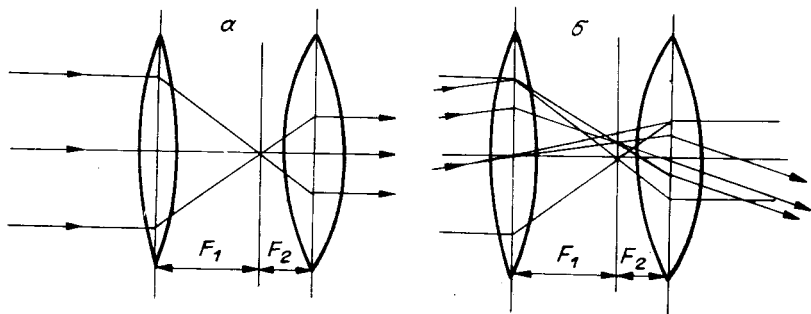


Рис. XIII.14. Оптическая схема «сжатия» светового пучка (а) и ее реальная картина (б).

Поэтому в отсутствие потерь температура пучка остается постоянной при прохождении его через любую (прозрачную) оптическую систему и, во всяком случае, не может быть повышена таким образом. Практически же температура пучка даже падает из-за неизбежных потерь энергии и рассеяния.

Выражение (91.1) можно преобразовать к более наглядному виду. Перейдем в пространстве векторов \mathbf{k} к сферическим координатам с полярной осью вдоль оси z (оптическая ось системы):

$$d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \cdot \frac{d\omega d\Omega}{V},$$

где Ω — телесный угол, а $V = d\omega/dk$ — групповая скорость. Запишем элемент пространственного объема в виде $d^3\mathbf{r} = dz ds$, где ds — элемент площади плоскости, перпендикулярной оптической оси (плоскость изображения или предмета). Тогда элемент фазового объема

$$\Gamma = \int \frac{\omega^2 n^2(\omega, \mathbf{r})}{c^2} \frac{d\omega}{V} ds d\Omega \frac{dz}{V} = \text{const.} \quad (91.2)$$

В общем случае дальнейшее упрощение интеграла движения (91.2) невозможно. В стационарной среде, когда $\omega = \text{const}$, и в отсутствии дисперсии ($n(\omega) = \text{const}$) интеграл $\int \omega^2 d\omega = \text{const}$ и (91.2) сводится к

$$\int n^2 ds d\Omega \frac{dz}{V} = \text{const.} \quad (91.3)$$

В параксиальном приближении, т. е. когда направление вектора \mathbf{V} близко к оси z , интеграл

$$\int \frac{dz}{V} = \text{const}$$

сохраняется независимо. Действительно, для тонкого слоя пучка $\Delta z = l$ имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{V(z)} \right) = \frac{\dot{l}}{V} - \frac{l \dot{V}}{V^2} \equiv 0,$$

так как $\dot{V} = (\partial V / \partial z) V$; $\dot{l} = (\partial V / \partial z) l$; (l равна разности скоростей на границах слоя). Учитывая, что $d\Omega = \theta d\theta d\varphi$, в параксиальном приближении получим из (91.3)

$$\int n^2 ds \theta d\theta d\varphi = \text{const.} \quad (91.4)$$

В простейшем случае, когда пучок является аксиально-симметричным, его угловая расходимость θ_{\max} не зависит от r , а n зависит только от z , интеграл движения (91.4) принимает вид

$$n \theta_{\max} r_{\max} = \text{const}, \quad (91.5)$$

где $r_{\max}(z)$ — радиус сечения пучка в плоскости $z = \text{const}$. Это соотношение носит название теоремы Лагранжа — Гельмгольца (иногда

его называют также инвариантом Смита — Гельмгольца). В таком виде оно было получено, по-видимому, независимо многими исследователями непосредственно из законов геометрической оптики (задача 1).

Задача 1. Получить инвариант Лагранжа — Смита — Гельмгольца (ЛСГ) для сферической границы.

Через сферическую границу проходит пучок лучей, ограниченный апертурной диафрагмой и имеющий в плоскости предмета максимальный линейный r_1 и угловой θ_1 размеры (рис. XIII.15). Из простых геометрических построений находим связь размеров источника и изображения:

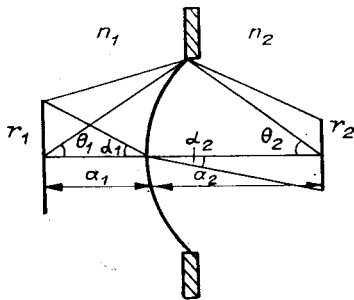


Рис. XIII.15. К задаче 1.

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{r_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{r_1 \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (91.6)$$

С другой стороны, углы α_1 и α_2 для лучей, проходящих через центр границы, связаны между собой законом преломления:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (91.7)$$

Тогда в приближении малых углов из (91.6) и (91.7) получим (91.5), т. е.

$$n_1 r_1 \theta_1 = n_2 r_2 \theta_2.$$

Задача 2. Найти детерминант матрицы оптического преобразования для аксиально-симметричной системы в параксиальном приближении.

Из (91.4) имеем $n^2 dx dy d\alpha_x d\alpha_y = \text{const}$, где α_x, α_y — углы луча в плоскостях (x, z) и (y, z) соответственно. В силу аксиальной симметрии системы и линейности преобразования в параксиальном приближении движение луча в этих плоскостях независимо, что дает $n dx d\alpha_x = \text{const}$. Используя это соотношение, получим

$$\operatorname{Det} M = \frac{dx_2 d\alpha_{x2}}{dx_1 d\alpha_{x1}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Задача 3. Проверить выполнение теоремы Лагранжа — Гельмгольца в приведенном выше «парадоксе» (см. рис. XIII.14).

Глава XIV

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 92. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И КОГЕРЕНТНОСТЬ

При суперпозиции электромагнитных полей, в частности волн, возникает важное физическое явление — интерференция полей (волн). Рассмотрим, например, наложение полей E_1, B_1 и E_2, B_2 . Согласно принципу суперпозиции результирующее поле равно сумме составляющих полей:

$$E = E_1 + E_2; \quad B = B_1 + B_2. \quad (92.1)$$

Однако, как правило, необходимо знать не только напряженность поля, но и плотность энергии или поток энергии поля. Так как последние зависят от напряженностей квадратично, то никакого принципа суперпозиции для энергии поля не существует. Плотность w и поток энергии \mathbf{S} результирующего поля можно записать в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_{12}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_{12}, \quad (92.2)$$

где w_{12} — плотности энергии составляющих полей, \mathbf{S}_{12} — их векторы Пойнтинга. Величины

$$w_{12} = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) + \mu (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2));$$

$$\mathbf{S}_{12} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \quad (92.3)$$

носят название *интерференционных членов*. Они как раз и характеризуют разницу между энергией результирующего поля и составляющих его полей. В том случае, когда интерференционный член не равен нулю, говорят, что составляющие поля (волны) интерферируют друг с другом, т. е. «мешают» друг другу (от английского to interfere — мешать, вредить). В зависимости от взаимной ориентации и величины векторов \mathbf{E}_n , \mathbf{H}_n поля могут как усиливать, так и гасить друг друга. Например, две параллельные плоские волны одинаковой поляризации и интенсивности усиливают друг друга: $w = 4w_1 = 4w_2$, $w_{12} = 2w_1$. Если же их поляризации противоположны ($\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2$), то они гасят друг друга: $w = 0$, $w_{12} = -2w_1$. При взаимно ортогональной поляризации ($(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 0$) интерференция отсутствует: $w = w_1 + w_2$, $w_{12} = 0$.

Интерференция света впервые была объяснена в 1802 г. английским физиком Юнгом (1773—1829), что послужило серьезным аргументом в пользу волновой теории света. Основоположником этой теории считается французский математик Декарт (1596—1650). Свое последующее развитие теория получила в трудах французских физиков Гюйгенса (1629—1695) и Френеля (1788—1827) — последователя Юнга. Однако Ньютон (1643—1727) предложил корпускулярную теорию света и дал на ее основе описание многих известных оптических явлений. Более чем двухсотлетняя «война» между волновой и корпускулярной теориями света закончилась миром после того, как квантовая механика объяснила «дуализм» электромагнитной волны.

Рассмотрим вначале простейший случай интерференции двух волн одинаковой круговой поляризации, распространяющихся под малым углом друг к другу (\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 почти параллельны). Представив поля в комплексной форме и учитывая (87.14), из (92.3) получим

$$w_{12} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \operatorname{Re} (E_1 E_2^*) = \frac{\mu}{2\pi} \operatorname{Re} (H_1 H_2^*);$$

$$S_{12} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{Re} (E_1 E_2^*) = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Re} (H_1 H_2^*). \quad (92.4)$$

При наблюдении (действии) волны всегда происходит усреднение по некоторому интервалу времени τ_0 — так называемому разрешающему времени измерительного прибора, которое обычно много больше периода волны. Примером такого прибора может служить глаз, для него $\tau_0 \sim 0,05$ с. В дальнейшем мы будем иметь дело со средней интенсивностью волны

$$I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} S(\mathbf{r}, t') dt' \equiv \bar{S}. \quad (92.5)$$

Поле произвольной поляризации всегда можно представить как суперпозицию двух круговых поляризаций (см. § 69), которые не интерферируют из-за усреднения по времени (92.5). Поэтому для произвольной поляризации сохраняются приведенные выше формулы, которые мы и будем использовать далее.

В простейшем случае интерференции двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi)\}$ интерференционный член

$$I_{12} = \frac{c}{2\pi} E_{01} E_{02} \cos \Delta\varphi, \quad (92.6)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — не зависящая от времени разность фаз двух волн. Более общей для обычных источников теплового типа является ситуация, когда какой-либо из параметров волны случайно зависит от времени (см. § 80). Пусть для определенности фаза меняется стохастически. Тогда значения полей в точке наблюдения можно выразить через значения E_s полей на источнике, находящемся в точке \mathbf{r}_s . Для плоских волн это соотношение можно привести к виду

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_0 \exp\{i(kr - \omega t + \varphi(t))\} = \\ &= E_0 \exp\left\{i\left[\mathbf{k}\mathbf{r}_s - \omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}{c}\right) + \varphi(t)\right]\right\} = \\ &= E_s(r_s, t - \Delta t_s); \quad \Delta t_s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c. \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} I_{12}(\tau) &= \frac{c}{2\pi} \overline{\text{Re}(E_{s1}(r_{s1}, t - \Delta t_{s1}) \cdot E_{s2}^*(r_{s2}, t - \Delta t_{s2}))} = \\ &= \frac{c}{2\pi\tau_0} \text{Re} \int_{t+\tau}^{t+\tau_0+\tau} E_{s1}(t') E_{s2}^*(t' + \tau) dt', \quad (92.7) \end{aligned}$$

где $\tau = \Delta t_{s1} - \Delta t_{s2}$. Таким образом, интерференционный член выражается через функцию корреляции двух источников (см. § 80). Такие источники, функция корреляции которых отлична от нуля на конечном интервале τ , называются *когерентными* (от английского coherent — согласованный, сцепленный). При наложении волн от таких источников может возникнуть интерференционная кар-

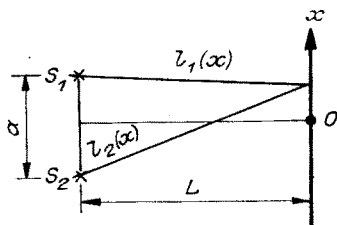


Рис. XIV.1. Интерференция волн от двух нитевидных источников.

тина (см. ниже). С другой стороны, два независимых, или некогерентных, источника, функция корреляции которых для любых τ равна нулю, интерференционной картины не образуют. Количественно когерентность характеризуют безразмерной комплексной величиной

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{c}{2\pi\tau_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \cdot \int_{t+\tau}^{t+\tau_0+\tau} E_{s1}(t') E_{s2}^*(t' + \tau) dt', \quad (92.8)$$

которая называется степенью когерентности двух источников. Эта величина, как мы увидим ниже, и определяет качество интерференционной картины.

Рассмотрим простейшую интерференционную схему: два нитевидных источника, вытянутых перпендикулярно плоскости рисунка, освещают экран (рис. XIV.1), на котором наблюдается картина интерференции. Будем считать, что размеры источников и экрана вдоль оси y , перпендикулярной плоскости рисунка, много больше размеров схемы a, L , так что от координаты y зависимость отсутствует. Ограничимся случаем $a/L \ll 1$ и примем, что оба источника строго монохроматические, а частоты их излучения одинаковы. Тогда интенсивность волны на экране как функция координаты x описывается соотношениями

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(x); \quad (92.9)$$

$$\varphi(x) = k(l_1 - l_2) \approx kax/L.$$

Вид функции $I(x)$ приведен на рис. XIV.2. Качество интерференционной картины зависит от разности минимальной и максимальной интенсивности (освещенности), иными словами — от контрастности интерференционной картины, которую характеризуют величиной, называемой *видностью*:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (92.10)$$

В рассмотренном примере (92.9) видность не меняется вдоль экрана:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \leq 1. \quad (92.11)$$

В частности, максимальная видность $V_{\max} = 1$ будет при одинаковой интенсивности источников $I_1 = I_2$. В общем случае, представив сте-

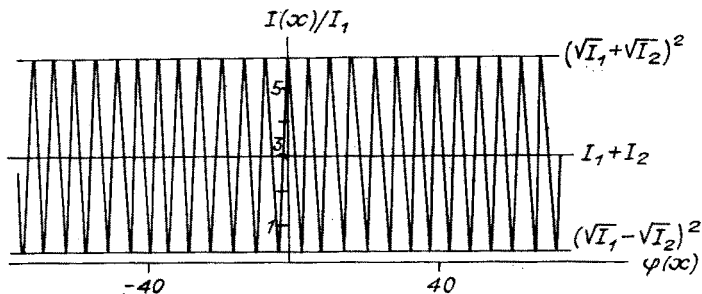


Рис. XIV.2. Распределение интенсивности в области интерференции волн от двух нитевидных монохроматических источников.

пень когерентности источников (92.8) в виде

$$\gamma_{12} = |\gamma_{12}| e^{i\varphi(\tau)}, \quad (92.12)$$

найдем из (92.8), (92.11)

$$I_{12} = \sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos \varphi(\tau); \quad (92.13)$$

$$V(\tau) = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (92.14)$$

Если источники некогерентны, т. е. их излучение никак взаимно не согласовано, степень их когерентности равна нулю и соответственно отсутствует интерференционная картина при наложении волн от таких источников. Эта ситуация фактически имеет место для подавляющего большинства источников, если не приняты специальные меры для «привязки фазы» излучаемых ими волн. Случайные колебания разности фаз и приводят к тому, что интерференционный член обращается в нуль.

Для реализации интерференционных схем обычно используют опорный источник, излучение которого делят на части, сводя затем разделенные волны в область, где нужно наблюдать их интерференцию. Исторически первая такая схема была осуществлена Юнгом (рис. XIV.3). При освещении экрана с двумя щелями линейным (нитевидным) монохроматическим источником на экране возникает картина, состоящая из чередующихся светлых и темных полос в соответствии с (92.9) и рис. XIV.2. Схема Юнга позволяет описать основные особенности всех двухлучевых интерференционных схем. Максимумы интенсивности, согласно (92.9), находятся в точках

$$\varphi(x_m) \equiv \varphi_m = 2\pi m; \quad x_m = m\lambda \frac{L}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (92.15)$$

где a — расстояние между щелями. Таким образом, характерная величина периода интерференционной картины в L/a раз больше длины волны. Именно благодаря этому обстоятельству интерферен-

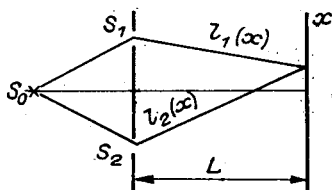


Рис. XIV.3. Интерференционная схема Юнга.

ционную картину света можно наблюдать невооруженным глазом. Номер максимума m принято называть *порядком интерференции*.

Задача. Найти видность интерференционной картины для схемы Юнга в случае, когда экран дополнительно освещается некогерентным фоновым потоком интенсивности I_{ϕ} .

$$V(x) = \frac{(I_{\max} + I_{\phi}) - (I_{\min} + I_{\phi})}{(I_{\max} + I_{\phi}) + (I_{\min} + I_{\phi})} = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2 + 2I_{\phi}} |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (92.16)$$

Таким образом, внешнее дополнительное освещение снижает видность интерференционной картины.

§ 93. ОБЛАСТЬ КОГЕРЕНТНОСТИ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА

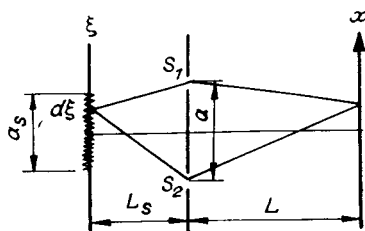
Рассмотрим влияние размеров опорного источника на видность интерференционной картины. Оказывается, увеличение размеров источника приводит к снижению видности интерференционной картины. Рассмотрим этот эффект на примере схемы Юнга.

Пусть опорный источник имеет размер a_s (рис. XIV.4). В типичном случае теплового источника элементы $d\xi$ можно рассматривать как независимые (некогерентные) источники, каждый из которых образует на экране x согласно (92.9) интерференционную картину

$$dI(x, \xi) = dI_1 + dI_2 + dI_{12}, \quad dI_{12}(x, \xi) = 2 \sqrt{dI_1 \cdot dI_2} \times \cos ka \left(\frac{\xi}{L_s} + \frac{x}{L} \right). \quad (93.1)$$

Примем для простоты поток энергии с единицы площади источника постоянным вдоль его поверхности. Тогда $dI_1 = I_1 d\xi / a_s$, $dI_2 = I_2 d\xi / a_s$. Подставив эти выражения в (93.1) и проинтегрировав

Рис. XIV.4. К расчету интерференционной картины от протяженного источника.



по координате ξ , найдем

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \varphi; \quad \alpha = ka \frac{a_s}{2L_s}; \quad \varphi(x) = ka \frac{x}{L}. \quad (93.2)$$

Видность интерференционной картины теперь является функцией размера источника:

$$V(\alpha) = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right|. \quad (93.3)$$

Отметим, что, как и в случае линейного монохроматического источника, видность не зависит от координаты точки наблюдений x , но по мере увеличения размера источника немонотонно убывает.

В более общем случае, когда яркость источника не постоянна по его площади, видность интерференционной картины как функция параметра a — расстояния между щелями пропорциональна модулю фурье-образа функции яркости (см. задачу 1).

Задача 1. Получить выражение для видности интерференционной картины в случае протяженного источника, яркость которого есть известная функция координаты ξ .

Элемент поверхности источника $d\xi$ создает на экране в точке x волну, интенсивность которой можно представить в виде: $dI_1 = \kappa_1 j(\xi) d\xi$; $dI_2 = \kappa_2 j(\xi) d\xi$. Здесь $j(\xi)$ — яркостная функция источника, индексы 1 и 2 обозначают величины, относящиеся к волнам, прошедшим через щели S_1, S_2 (см. рис. XIV.4), κ_1, κ_2 — коэффициенты пропорциональности, зависящие от пропускной способности щелей. Подставив эти выражения в (93.1) и интегрируем по ξ , найдем:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \kappa_{1,2} \int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) d\xi; \\ I_{12} &= 2 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) \cos ka \left(\frac{\xi}{L_s} + \frac{x}{L} \right) d\xi = \\ &= 2 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i k a x / L} \int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) e^{i k a \xi / L_s} d\xi \right\} = \\ &= 2 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \left| \int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) e^{i k a \xi / L_s} d\xi \right| \cos(\varphi(x) + \varphi_j), \end{aligned} \quad (93.4)$$

где φ_j — фаза комплексного фурье-образа функции $j(\xi)$, α и $\varphi(x)$ определены в (93.2). Таким образом, видность интерференционной картины

$$V(a) = \frac{2 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \frac{\left| \int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) e^{i k a \xi / L_s} d\xi \right|}{\int_{-a_s/2}^{a_s/2} j(\xi) d\xi}. \quad (93.5)$$

Выражение (93.3) содержит модуль фурье-образа прямоугольного импульса (см. § 78), что и соответствует случаю постоянной яркости. Соотношение (93.5) используется в астрономии и радиоастрономии для интерференционных измерений распределения яркости поверхности звезд.

Пользуясь выражениями для видности интерференционной картины (93.3), (93.5), можно ввести важное понятие *области когерентности* протяженного источника. Действительно, видность интерференционной картины порядка единицы в области

$$\alpha \leq \pi, \text{ или } \frac{a}{L_s} \leq \frac{\lambda}{a_s}. \quad (93.6)$$

Это соотношение имеет важный физический смысл: угол, внутри которого источник излучает «когерентно»,

$$\theta_{\text{coh}} \sim \frac{a}{L_s} \leq \frac{\lambda}{a_s}. \quad (93.7)$$

Это и есть угловая область когерентности протяженного источника.

Размеры щелей S_1, S_2 также влияют на интерференционную картину, что связано с явлением дифракции и будет рассмотрено в следующей главе.

Часто соотношение (93.7) представляют в несколько ином виде: если задать угловой размер источника $\theta_s = a_s/L_s$, то a_{coh} — размер области волнового фронта, в которой волна когерентна, составляет

$$a_{\text{coh}} \leq \lambda/\theta_s. \quad (93.8)$$

Это выражение удобно использовать при «конструировании» различных интерференционных схем.

Задача 2. Оценить область когерентности солнечного света.

Угловой размер Солнца с Земли $\theta_s \sim 10^{-2}$ рад. Для видимой части спектра ($\lambda \sim 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$) получим

$$a_{\text{coh}} \sim 5 \cdot 10^{-5}/10^{-2} = 0,05 \text{ мм.}$$

Соотношения (93.6) — (93.8) не распространяются на важный класс источников — так называемые квантовые генераторы, которые являются источниками когерентного излучения. В них отдельные элементы уже нельзя считать независимыми излучателями. В оптическом диапазоне это оптические квантовые генераторы (ОКГ), или лазеры, в диапазоне СВЧ — квантовые генераторы, или мазеры. Излучение таких источников когерентно в любой точке волнового потока, что связано с особенностями генерации ими электромагнитных волн (глава XXIV).

§ 94. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН

Рассмотрим теперь, как влияет на интерференционную картину немонохроматичность опорного источника. По-прежнему обсуждение будем вести на примере схемы Юнга. Упрощенное описание влияния немонохроматичности источника можно дать

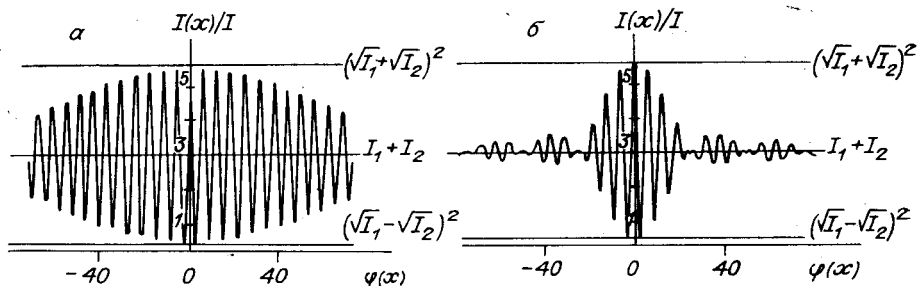


Рис. XIV.5. Распределение интенсивности в области интерференции для случая монохроматического опорного источника.

$I_1/I_2=2$; а — $\Delta h/h=0,025$, б — $\Delta h/h=0,25$.

аналогично тому, как это делалось в § 93 для протяженного источника. Представим точечный монохроматический источник в виде суперпозиции монохроматических, каждый из которых дает вклад в освещенность экрана в точке x :

$$dI(k, x) = \frac{dI_1}{dk} dk + \frac{dI_2}{dk} dk + \frac{dI_{12}}{dk} dk;$$

$$\frac{dI_{12}}{dk} = 2 \sqrt{\frac{dI_1}{dk} \cdot \frac{dI_2}{dk}} \cos \frac{kax}{L}. \quad (94.1)$$

Вначале ограничимся случаем источника, спектральная функция которого постоянна в интервале Δk . Тогда

$$I_{1,2} = \frac{dI_{1,2}}{dk} \Delta k;$$

$$I_{12} = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{\Delta k} \int_{k-\frac{\Delta k}{2}}^{k+\frac{\Delta k}{2}} \cos \frac{kax}{L} dk = 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(x) \frac{\sin \eta}{\eta};$$

$$\varphi(x) = \frac{kax}{L}; \quad \eta = \Delta ka \frac{x}{2L} = \frac{\Delta k}{2k} \varphi(x). \quad (94.2)$$

Распределение интенсивности на экране показано на рис. XIV.5. Видность интерференционной картины в этом случае есть функция координаты точки наблюдения:

$$V(x) = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot \frac{|\sin \eta|}{\eta}. \quad (94.3)$$

Задача 1. Получить видность интерференционной картины в схеме Юнга, если задана спектральная функция опорного источника.

Пусть волновой поток, проходящий через щель S_1 , создает в точке x экрана поле (см. § 80 и рис. XIV.3)

$$E(x, t) = \frac{\kappa_1 \sqrt{\tau_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega} e^{i(kl_1 - \omega t)} d\omega,$$

где F_ω — спектральная функция источника, $\kappa_{1,2}$ — коэффициенты пропорциональности, зависящие от размеров схемы, $\omega\tau_0 \gg 1$. Соответственно интенсивность этого потока

$$I_1(x) = \frac{\kappa_1^2 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_\omega|^2 d\omega. \quad (94.4)$$

Аналогичные выражения имеют место для щели S_2 . Интерференционный член получим согласно (92.7):

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{c\kappa_1\kappa_2}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\tau_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{F_\omega e^{i\omega\left(\frac{l_1}{c}-t\right)}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{F_{\omega'}^* e^{-i\omega'(l_2/c-t)}}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \frac{c\kappa_1\kappa_2}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F_\omega|^2 e^{i\omega(l_1-l_2)/c} d\omega \right\} \approx \\ &\approx \frac{c\kappa_1\kappa_2}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |F_\omega|^2 e^{i\omega x a/cL} d\omega \right| \cos \varphi_F(x), \end{aligned} \quad (94.5)$$

где $\varphi_F(x)$ — фаза комплексного выражения, заключенного в фигурные скобки. Ее конкретное значение для определения функции видности знать не нужно. Видность

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \left| \int |F_\omega|^2 e^{i\omega x a/cL} d\omega \right| \cdot \frac{1}{\int |F_\omega|^2 d\omega} = \\ &= \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \frac{\left| \int |F_k|^2 e^{ikhx/L} dk \right|}{\int |F_k|^2 dk}. \end{aligned} \quad (94.6)$$

Таким образом, функция видности пропорциональна фурье-образу спектра мощности источника (см. § 80). В частном случае $F_k = \text{const}$ в интервале Δk получаем результат (94.3).

Размер интерференционной картины на экране для немомохроматического опорного источника определяется областью значений параметра η , где функция видности порядка единицы. Соотношение (94.3) позволяет дать простую оценку размера картины:

$$\Delta\eta \leq \pi, \text{ или } \frac{x}{L} \leq \frac{k}{\Delta k} \cdot \frac{\lambda}{a}, \text{ или } m \leq \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (94.7)$$

Этот результат можно получить из простой физической картины. Если источник испускает волны в полосе частот $\Delta\omega$, то длительность волновых пакетов в соответствии с соотношением неопределенности есть $\Delta t \sim \pi/\Delta\omega$. Ясно, что при $l_1 - l_2 > c \cdot \Delta t$ волновые потоки, проходящие через щели S_1 и S_2 и соответствующие одному и тому же пакету, в точке x не встречаются и, стало быть, не образуют интерференционной картины. Поэтому условие интерференции

$$\frac{\Delta l}{c} \approx \frac{x a}{cL} < \Delta t \sim \frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad (94.8)$$

соответствует (94.7). Теперь можно ввести продольный размер области когерентности источника, или длину корреляции волны

$$l_k \sim c\Delta t \sim \frac{\pi c}{\Delta\omega}. \quad (94.9)$$

В совокупности с (93.6) — (93.8) это соотношение полностью определяет размеры области когерентности волны, испускаемой немонахроматическим источником конечных размеров.

Задача 2. Найти распределение интенсивности в интерференционной картине, если схема Юнга освещается опорным источником, спектр которого состоит из двух близких линий ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$.

В этом случае $|F_\omega|^2 = F_0^2 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega))$, и из (94.5) получили

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{c\kappa_1\kappa_2}{\pi} F_0^2 \left(\cos \frac{\omega_0 xa}{cL} + \cos \frac{(\omega_0 + \Delta\omega) xa}{cL} \right) \approx \\ &\approx 2 \frac{c\kappa_1\kappa_2}{\pi} F_0^2 \cos \frac{k_0 xa}{L} \cdot \cos \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k_0 xa}{2L} \right). \end{aligned} \quad (94.10)$$

Таким образом, интерференционная картина, как и в случае монохроматического источника, состоит из чередующихся светлых и темных линий с периодом $2\pi L/k_0 a$, но теперь интенсивность линий промодулирована медленной функцией с периодом $(2\pi L/k_0 a)(\omega_0/\Delta\omega)$. Видность такой картины есть функция координаты x :

$$V(x) = \cos \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k_0 xa}{2L} \right). \quad (94.11)$$

Результат, полученный в задаче 2, позволяет найти так называемую *спектральную разрешающую способность* схемы Юнга: какую минимальную разность частот $\Delta\omega$ можно зарегистрировать с помощью этой схемы. Измеряя интенсивность линий и регистрируя тем самым видность интерференционной картины $V(x)$, мы можем измерить период функции $V(x)$

$$\Delta x_V = \frac{2\pi L}{a \cdot \Delta k} \quad (94.12)$$

и определить тем самым разность Δk или $\Delta\omega$. Максимальное разрешение (минимально измеряемое Δk) достигается, когда на всей интерференционной картине уместается один полупериод функции $V(x)$. Если m — номер крайнего максимума интерференционной картины, то полупериод $V(x)$ есть

$$\frac{\Delta x_V}{2} = \frac{\pi L}{a \cdot \Delta k_{\min}} = m\lambda \frac{L}{a}.$$

Отсюда находим Δk_{\min} и спектральное разрешение схемы Юнга:

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{k}{|\Delta k_{\min}|} = 2m. \quad (94.13)$$

§ 95. ДВУХЛУЧЕВАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

Схема Юнга является, конечно, далеко не единственной возможностью осуществления интерференции волн, испускаемых каким-либо опорным источником. В двухлучевых интерференционных схемах (интерферометрах) деление потока от опорного источника на две части производится одним из двух способов: 1) деление фронта волны, 2) деление амплитуды (интенсивности) волны. Ниже оба способа мы проиллюстрируем на конкретных схемах.

Все применения интерферометров основаны на измерении малой разности хода интерферирующих световых потоков. Если, например, каким-либо способом увеличить путь l_1 в схеме Юнга (см. рис. XIV.3) на величину δl (например, сместить щель S_1), то положение максимума номер m , согласно (92.9), (92.15), сместится на экране на Δx_m , что соответствует изменению фазы $\varphi(x)$ в (92.9) на $\Delta\varphi = k\delta l = ka\Delta x_m/L$. Таким образом, смещение максимума $\Delta x_m = \frac{L}{a} \delta l$ значительно превосходит величину δl ($L/a \gg 1$).

Типичным является применение двухлучевых интерферометров для:

- измерения оптической плотности среды;
- регистрации изменений во времени оптической плотности среды (распространения волн в газах, плазме и т. п.);
- измерения малых перемещений тел (механическая деформация, вибрация);
- измерения малых угловых размеров источников электромагнитного излучения.

Ниже при описании трех конкретных схем интерферометров мы обсудим их использование для различных измерений.

Интерферометр Рэля является, по существу, «техническим оформлением» принципа схемы Юнга (рис. XIV.6). Параллельный пучок световых лучей формируется линзой L_1 , в фокусе которой расположен точечный источник S_0 . Экран с двумя тонкими щелями S_1 и S_2 вырезает из светового пучка два потока, которые сводятся на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы L_2 . Таким образом, здесь используется способ деления фронта. Из щелей $S_{1,2}$ выходят расходящиеся световые потоки. Как мы знаем,

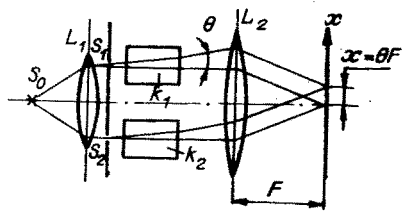


Рис. XIV.6. Схема интерферометра Рэля.

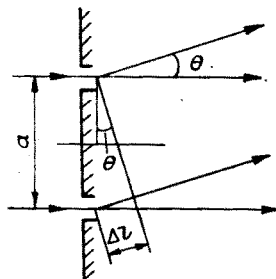


Рис. XIV.7. Возникновение разности хода интерферирующих лучей.

такой поток можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся вдоль всевозможных направлений или лучей в интервале углов $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Два луча, соответствующие одному и тому же значению θ , пересекутся на экране в точке $x = \theta F$ ($\theta \ll 1$). Разность путей, пройденных волной вдоль луча, есть (см. рис. XIV.7) $\Delta l = \theta a$, где a — расстояние между щелями. На экране возникает интерференционная картина, периодичность которой в соответствии с (92.9) определяется параметром

$$\varphi(x) = k\Delta l = k\theta a = kax/F; \quad x_m = m\lambda F/a. \quad (95.1)$$

Таким образом, фокусное расстояние F линзы L_2 в интерферометре Рэлея играет ту же роль, что и расстояние между экранами в схеме Юнга.

Интерферометр Рэлея обычно используется для относительных измерений оптической плотности прозрачной среды. Для этого на пути лучей помещаются две кюветы (K_1 и K_2), одна из которых содержит исследуемое, а вторая — эталонное вещество. Если показатель преломления вещества n , то вносимая дополнительная разность пути есть $(n-1)l_k$, где l_k — длина образца (кюветы). Тогда при различии в показателях преломления эталона и образца Δn интерференционная картина сдвигается на экране на величину Δx :

$$\varphi = k\Delta n l_k = k\Delta x/F; \quad \Delta x = \Delta n l_k F/a, \quad (95.2)$$

измерив которую можно найти Δn . Чаще применяют «нулевой метод», компенсируя вносимую образцом разность хода, например, с помощью оптического клина.

Интерферометр Майкельсона сыграл, как известно, в физике особую роль. Его автор, американский физик польского происхождения, совместно с Морли поставил знаменитые опыты по измерению скорости увлечения «эффира» (1885—1889 гг.), послужившие в свое время экспериментальным основанием теории относительности. Интерферометр (рис. XIV.8) состоит из двух зеркал M_1 , M_2 и полупрозрачного зеркала M_0 . Линза L_1 формирует поток света от опорного источника S_0 , линза L_2 сводит интерферирующие пучки на экране x . Этот интерферометр работает по принципу деления амплитуды волны, для чего используется полупрозрачное зеркало M_0 , разводящее световые пучки на зеркала M_1 и M_2 . Отразившись от этих зеркал, световые пучки вновь попадают на полупрозрачное зеркало M_0 и, еще раз поделившись, проходят к линзе L_2 , которая сводит их на экране x . Пластика P служит для компенсации разности фаз, которая вносится на пути к зеркалу M_1 при

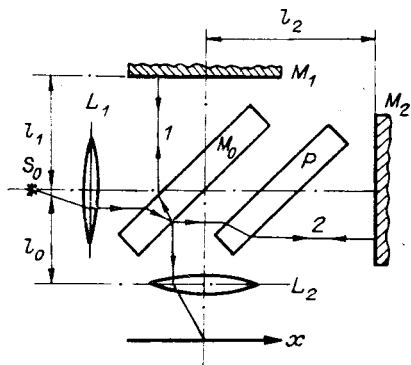


Рис. XIV.8. Схема интерферометра Майкельсона.

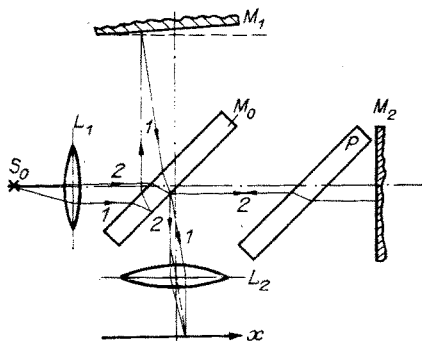


Рис. XIV.9. Схема интерферометра Майкельсона в режиме полос равной толщины. 1, 2 — интерферирующие лучи. Линза переносит на экран X изображение зеркала M_1 .

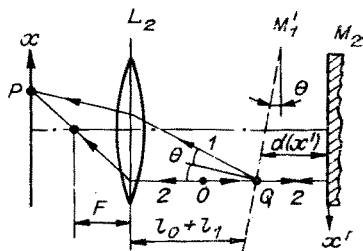


Рис. XIV.10. Эквивалентная схема интерферометра Майкельсона в режиме полос равной толщины.

1, 2 — интерферирующие лучи.

прохождении светом стеклянной пластинки зеркала M_0 . Лучи 1 проходят ее дважды, тогда как лучи 2 — только один раз. Если выполнить интерферометр Майкельсона в том виде, как это показано на рис. XIV.8, то на экране x получится не интерференционная картина, а точка, яркость которой зависит от разности плеч l_1 и l_2 . Для получения интерференционной картины используют один из двух возможных режимов работы интерферометра, которые называются: 1) полосы (линии) равной толщины, 2) полосы (линии) равного наклона. Такая классификация применима для всех интерференционных схем и приборов. Как ясно будет дальше, интерферометр Рэлея относится к классу приборов, работающих в режиме полос равного наклона.

Полосы равной толщины. В этом режиме интерференционная картина создается за счет поворота на малый угол одного из зеркал, например M_1 , вокруг оси, перпендикулярной рисунку (рис. XIV.9). Точечный источник S_0 помещают в фокусе линзы L_1 , так что интерферометр освещается параллельным пучком света. Линзу L_2 размещают так, чтобы на экране x возникло изображение зеркала M_1 . Эквивалентная схема интерферометра в режиме полос равной толщины показана на рис. XIV.10. Здесь оба зеркала M_1 и M_2 «сведены» на общую ось, а источник, полупрозрачное зеркало и компенсирующая пластинка не показаны. Луч θ , идущий от источника параллельно оси, отражается от поверхностей зеркала — лучи 1 и 2. Так как линза L_2 создает на экране x изображение точки Q , то на пути от Q до P разность фаз между лучами 1 и 2 не вносится (иначе вместо фотографий мы получали бы интерференционные картины!). Поэтому единственным источником разности фаз двух лучей является зазор между зеркалами $d(x')$:

$$\varphi(x) = kd(x') = k(\Delta l + \theta x') = k \left[\Delta l + \theta x' \left(1 + \frac{l_0 + l_1}{F} \right) \right], \quad (95.3)$$

где $\Delta l = l_2 - l_1$ — разность плеч интерферометра, остальные обозна-

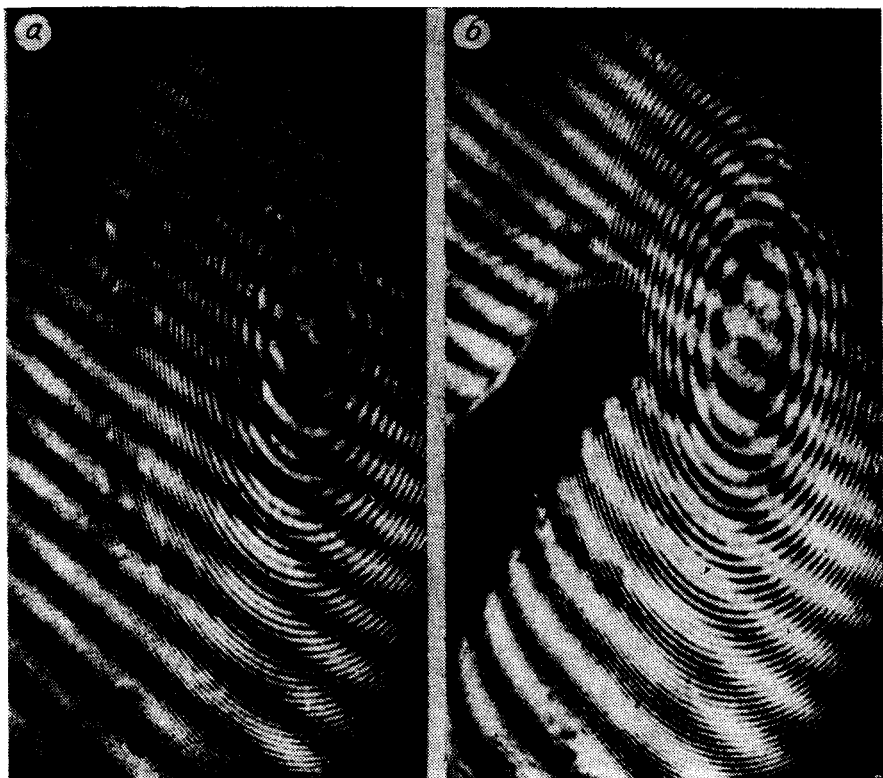


Рис. XIV.11. Интерференционная картина, полученная в режиме полос равной толщины.

Источник — гелий-неоновый лазер. а — невозмущенная картина; б — искажение картины тепловым потоком от «жала» паяльника. Частые интерференционные полосы — результат интерференции с выходным зеркалом лазера.

чения см. на рис. XIV.9; XIV.10. Распределение интенсивности на экране, как и в случае схемы Юнга,

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(x), \quad (95.4)$$

если источник S_0 — точечный и монохроматический. На рис. XIV.11 показана интерференционная картина, получаемая в режиме полос равной толщины при освещении интерферометра Майкельсона гелий-неоновым лазером.

Интерференционная картина, возникающая на экране X , налагается там на изображение зеркала M_1 — именно так «сфокусирована» линза L_2 . Поэтому говорят, что в режиме полос равной толщины интерференционная картина локализована на поверхности зеркала M_1 . Вопрос локализации интерференционной картины имеет очень важное значение для применений интерферометра. При локализации интерференционной картины на поверхности исследуемого объекта облегчается ее расшифровка.

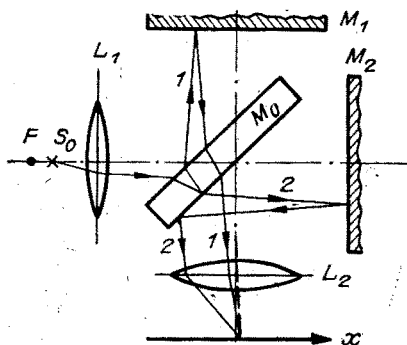


Рис. XIV.12. Схема интерферометра Майкельсона в режиме полос равного наклона (точечный опорный источник).

Полосы равного наклона. Интерферометр освещается непараллельным пучком света (рис. XIV.12), а экран X расположен в фокальной плоскости линзы L_2 . Луч, выходящий из источника под углом θ к оси прибора, делится на два луча, которые собираются на экране в одной и той же точке. Эквивалентная схема интерферометра в этом режиме показана на рис. XIV.13. Разность хода, возникающая при разности плеч $\Delta l = l_2 - l_1$, есть (рис. XIV.13, б)

$$AB + BC - AD = \frac{2\Delta l}{\cos \theta} - \sin \theta (2\Delta l \operatorname{tg} \theta) = 2\Delta l \cos \theta. \quad (95.5)$$

Тогда разность фаз двух лучей

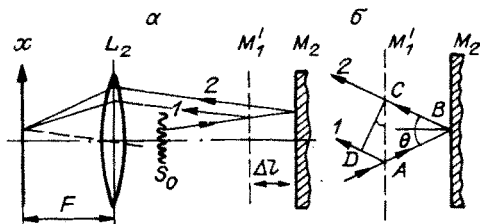
$$\varphi(x) = k \cdot 2\Delta l \cos \theta \approx 2k\Delta l \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right), \quad (95.6)$$

а распределение интенсивности, как и прежде, дается соотношением (95.4). Если поток лучей из источника аксиально-симметричный, то интерференционная картина на экране представляет собой чередующиеся светлые и темные концентрические окружности, радиус которых $r = \theta F$.

Задача. Найти расстояние между полосами максимальной интенсивности в интерференционной картине, возникающей при работе интерферометра Майкельсона в режиме полос равного наклона.

Из условия максимума интенсивности $\varphi(\theta_m) = 2\pi m$ находим $\theta_m \approx \sqrt{2 \left(\frac{m\pi}{k\Delta l} - 1 \right)} = \sqrt{2 \left(\frac{m\lambda}{2\Delta l} - 1 \right)}$. Расстояние между m -м и $(m+1)$ -м максимумами $\Delta r_m = F(\theta_{m+1} - \theta_m)$. В частности, порядок максимума в центре интерференционной картины $m_0 = 2\Delta l/\lambda$.

Рис. XIV.13. Эквивалентная схема интерферометра Майкельсона в режиме полос равного наклона (а) при протяженном опорном источнике. Рисунок (б) поясняет расчет разности хода.
1, 2 — интерферирующие лучи.



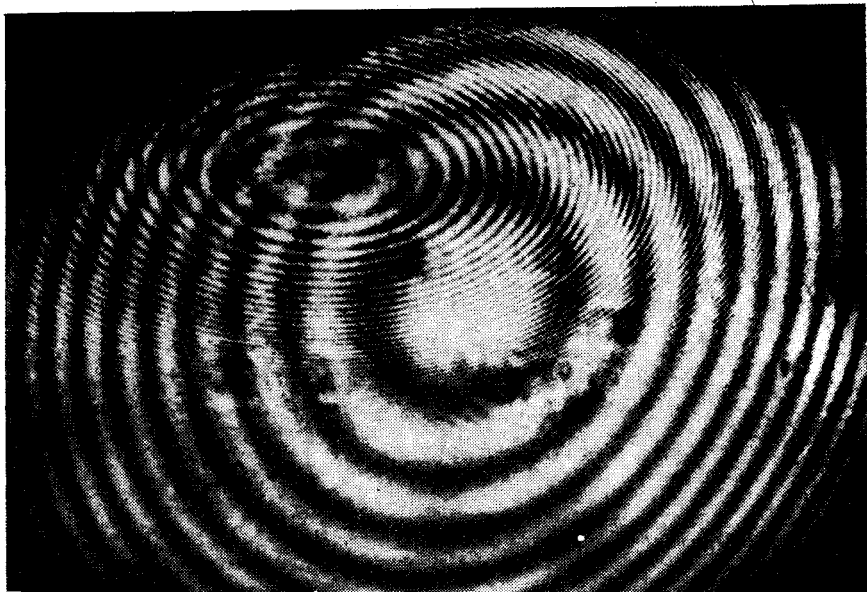


Рис. XIV.14. Интерференционная картина, полученная в режиме полос равного наклона.
Источник — гелий-неоновый лазер.

В режиме полос равного наклона интерференционная картина локализована в бесконечности, так как на экране собираются лучи, идущие справа от линзы L_2 параллельно.

Опорный источник S_0 при работе интерферометра в режиме полос равного наклона представляет собой точечный источник, расположенный между линзой L_1 и ее фокусом. В этом случае за линзой возникает расходящийся поток света. Вторым вариантом получения такого потока — использование протяженного источника, как показано на рис. XIV.13.

Интерферометр Рождественского — Маха — Цандера независимо предложен тремя авторами. Одним из них был профессор Ленинградского университета Рождественский, работы которого, посвященные исследованию аномальной дисперсии показателей преломления различных веществ, выполненные в 20—30-х гг., сыграли важную роль в развитии атомной физики и спектроскопии. Именно для этих исследований Рождественский и разработал этот прибор.

Интерферометр (рис. XIV.15) также работает по принципу деления амплитуды волны. В нем используются два непрозрачных (M_2 и M_4) и два полупрозрачных (M_1 и M_3) зеркала. Интерферометр освещается параллельным пучком света, а наклон одного из зеркал (M_2 или M_3) на угол, отличный от 45° , и образует «клин», на котором формируется интерференционная картина. Однако в от-

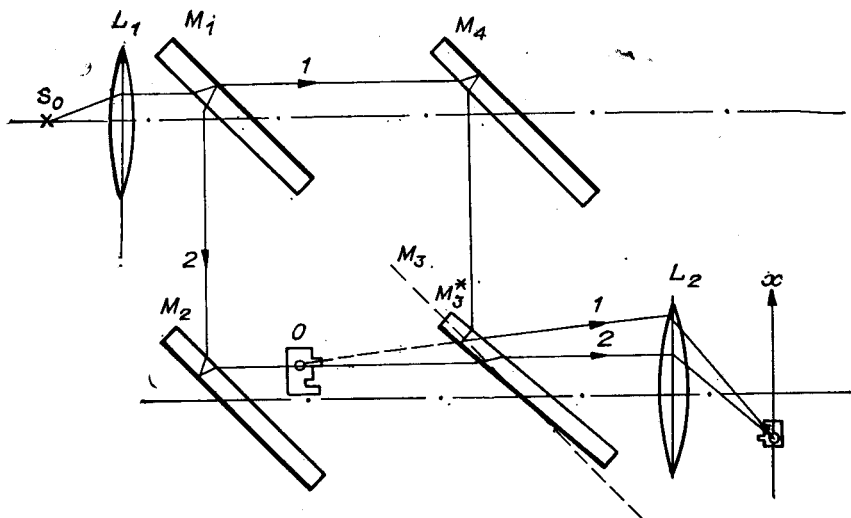


Рис. XIV.15. Схема интерферометра Рождественского — Маха — Цандера в режиме полос равной толщины.

В отличие от интерферометра Майкельсона здесь этот наклон можно выбрать таким, чтобы при продолжении интерферирующие лучи пересекались на поверхности исследуемого объекта (или в заданном его сечении). Эквивалентная схема интерферометра в значительной мере аналогична приведенной на рис. XIV.10. Фокусируя объектив L_2 на избранный слой исследуемого объекта (на рис. XIV.15 — плоскость, в которой лежит точка 0), мы тем самым локализуем интерференционную картину на этом слое. В результате на экране X возникает изображение объекта с наложенной на него интерференционной картиной, что представляет значительные удобства при расшифровке интерферограмм.

Интерферометры Майкельсона и Рождественского — Маха — Цандера находят применение в экспериментальном изучении различных волновых процессов в газовых средах и плазме. Их важным достоинством является возможность широкого разведения интерферирующих лучей, что, скажем, принципиально недоступно интерферометру Рэлея. Это позволяет проводить исследования на объектах значительных размеров. Применяя скоростную регистрационную аппаратуру типа СФР (сверхбыстрый фоторегистратор) или ЭОП, можно следить за развитием быстропротекающих процессов во времени. На рис. XIV.16 показана интерферограмма, полученная при движении сгустка плазмы «сквозь» одно из плеч интерферометра Майкельсона [1]. Картина процесса развернута во времени с помощью ЭОПа. По смещению полос можно определить скорость, с которой перемещался фронт сгустка ($v = 6 \text{ см}/0,2 \text{ мкс} = 3 \cdot 10^7 \text{ см/с}$), и его протяженность вдоль направления x ($0 \leq x \leq \leq 6 \text{ см}$). Можно проследить, как за фронтом ударной волны (рез-

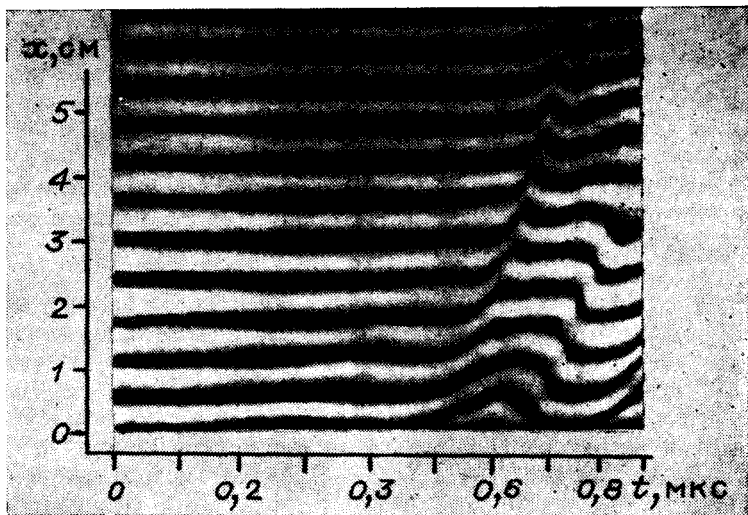


Рис. XIV.16. Интерферограмма параметров движущегося сгустка плазмы. Развертка во времени произведена электронно-оптическим преобразователем [1].

кие изломы линий) следует область пониженной плотности — линии почти возвращаются на место. В самом сгустке происходят колебания плотности: линии смещаются вдоль x , а величина смещения изменяется со временем. Количественная обработка интерферограммы дает описание движения сгустка.

§ 96. ОДНОФОТОННАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Обсуждение вопроса о когерентности источников и интерференции света неизбежно приводит на атомарный уровень. Действительно, элементарным излучателем света является атом, а излучаемые в атомных переходах «порции» света — кванты — есть, как известно, элементарные частицы — фотоны. И сразу же возникает целый «букет» вопросов. Фотоны излучаются атомом поодиночке. Как же тогда возникает интерференционная картина? Интерферируют ли между собой фотоны, испущенные разными атомами, или же интерференционная схема «делит» фотон на части, и эти части интерферируют друг с другом? Что такое размер фотона? Как понимать когерентность с точки зрения излучения отдельных атомов? Что означает принцип неопределенности, если размер источника — это размер атома? Ответить на эти вопросы, оставаясь в рамках классической электродинамики, нельзя. Поскольку мы дошли до атомарного уровня, в действие вступают законы квантовой физики и основанное на них квантово-физическое описание волновых процессов. Такое описание, конечно, выходит за рамки настоящего

курса. Однако мы считаем не только полезным, но и необходимым сделать попытку «перекинуть мостик» в квантовый мир, не ставя при этом задачу дать сколь-нибудь последовательное описание явлений с квантовой точки зрения, а скорее указать читателю круг вопросов, которые он должен выяснить для себя на следующих ступенях физического образования.

Итак, что такое принцип неопределенности? Домножив соотношения (79.2) на \hbar — постоянную Планка и вспомнив соотношения для энергии и импульса фотона:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega; \quad p = \hbar\omega/c, \quad (96.1)$$

мы получим не что иное, как знаменитые соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta\mathcal{E} \cdot \Delta t \gtrsim \hbar; \quad \Delta p \cdot \Delta x \gtrsim \hbar. \quad (96.2)$$

В квантовой механике они ограничивают точность описания микросистемы. Так, если квант света испущен атомом в какой-то момент времени, находящийся внутри интервала Δt , то неопределенность (разброс) энергии кванта есть $\hbar/\Delta t$. Аналогично, если фотон локализован в области Δx , то его импульс $\gtrsim \hbar/\Delta x$. Сопоставьте теперь сказанное с обсуждениями в § 79.

Перейдем к обсуждению пространственного распределения излучения. Будем регистрировать направления движения фотонов, испускаемых «неподвижным» одиночным атомом, который совершает (по какой-то причине, нас сейчас не интересующей) регулярные переходы из основного состояния в возбужденное, поглощая энергию, и обратно, излучая ее. Мы обнаружим, что направления их движений имеют некоторое пространственное распределение. Можно подсчитать вероятность движения каждого следующего фотона в заданном направлении. Это и есть одна из задач квантовой механики — нахождение вероятностных законов распределения частиц в пространстве. Пусть мы имеем дело с простейшей ситуацией — распределение направлений движения фотонов изотропно. Используем такой атом в качестве опорного источника S_0 схемы Юнга. Если в единицу времени атом излучает dN/dt фотонов, то через щель ширины σ , отстоящую от источника на расстояние L_s , в единицу времени пролетает

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma}{4L_s} \cdot \frac{dN}{dt} \quad (96.3)$$

фотонов. Иными словами, вероятность каждому очередному фотону попасть в щель

$$p = \sigma/4L. \quad (96.4)$$

Что мы увидим на экране x схемы Юнга, если будем дальше развивать такие «корпускулярные» представления? Очевидно, что «напротив» каждого из отверстий мы обнаружим максимумы плотности фотонов $p_{1 \max}$, $p_{2 \max}$, а распределение плотности фотонов по экрану будет плавной функцией $p_1(x) + p_2(x)$, ничего общего не

имеющей с интерференционной картиной, описанной в § 92 (см. рис. XIV.2). В чем же дело?

А дело в том, что мы используем «привычные» корпускулярные представления там, где существенно проявляются законы квантовой механики. В соответствии с этими законами мы и должны вычислять вероятность прохождения фотонов через первое или второе отверстие. А это, в свою очередь, означает, что закон суммирования вероятностей теряет силу. В квантовой механике суммируются не вероятности, а некоторые функции — так называемые амплитуды вероятности $\psi(x, t)$, определенные так, что квадрат их модуля $|\psi(x, t)|^2$ дает вероятность обнаружения частицы в данной точке пространства x в момент времени t . Оказывается, что если решить задачу квантовой механики (точнее, квантовой электродинамики) о прохождении фотона, испущенного атомом, через экран с двумя щелями (схема Юнга), то окажется, что вероятность попадания фотона в точку наблюдения x на втором экране, определенная как

$$p(x) = |\psi(x, t)|^2, \quad (96.5)$$

даст нам в точности распределение интенсивности в интерференционной картине для схемы Юнга. Так мы приходим к выводу, что фотон «интерферирует сам с собой» — однофотонная интерференция! Еще раз подчеркнем, что причина такого неожиданного результата заключается в специфическом законе квантовой физики — законе нахождения вероятности процесса, суммирования ψ -функцией, а не вероятностей.

Теперь можно перейти к обсуждению когерентности источника. Если атомы, входящие в состав источника, излучают независимо, то картина, возникающая на экране, описывается суммой (по всем атомам) выражений типа (96.5). Тем самым мы опять вернемся к классическому описанию области когерентности источника. На этом, пожалуй, следует прервать наш экскурс в квантовую механику.

Глава XV

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Явление дифракции (от английского *diffraction* — отклонение) состоит в огибании волной препятствия, размеры которого соизмеримы с длиной волны. Для света это явление впервые было описано еще в XVII в. итальянским физиком и астрономом Франческо Гримальди — профессором математики иезуитского колледжа в Болонье, в его «Физико-математическом трактате о свете, цветах и радуге»

(1665 г.). Свет Гримальди представлял в виде волн, распространяющихся в некой «световой жидкости», при их ударе о препятствие, и возникало явление дифракции. Гримальди первым наблюдал появление радужной окраски при дифракции. Независимо явление дифракции наблюдал и английский физик Гук (1672 г.). Однако впервые серьезные эксперименты по дифракции света (в том числе на таких объектах, как волос) были проведены Ньютоном и явились последними опытами в его жизни (1727 г.). Первая теория дифракции, правильно количественно описывавшая это явление, была предложена французским физиком Френелем (1788—1827), на которого большое влияние оказали работы Юнга по интерференции. Сам Юнг также пытался построить теорию дифракции и был близок к результатам Френеля. Современная теория дифракции заложена работами немецких физиков Кирхгофа (1824—1887) и Зоммерфельда (1868—1951).

§ 97. ДИФРАКЦИЯ НА ЩЕЛИ

Дифракция электромагнитных волн непосредственно связана с соотношением неопределенности: вырезав из плоской монохроматической волны участок фронта шириной d (рис. XV.1), мы вносим разброс поперечных волновых чисел $\Delta k_{\perp} \sim \pi/d$, откуда угол расходимости волны за экраном

$$\theta \sim \frac{\Delta k_{\perp}}{k_{\parallel}} \sim \frac{\lambda}{d}. \quad (97.1)$$

Решим теперь задачу о дифракции плоской волны на щели ширины d , предполагая волну неполяризованной. Нам достаточно проследить за изменением амплитуды волны, не заботясь о поляризации. Это так называемая скалярная теория дифракции.

Щель вырезает из фронта волны участок шириной d . Эту волну, вырезанную экраном, можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$E(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ik_x x} dk_x e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (97.2)$$

Спектральная функция $E_k(k_x)$ соответствует спектру прямоугольного импульса:

$$|E_{kx}| = \frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\left| \sin \frac{k_x d}{2} \right|}{k_x}. \quad (97.3)$$

Тем самым мы представили поле за экраном в виде суперпозиции плоских волн ($k_y = 0$):

$$\frac{E_{kx} dk_x}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \quad (97.4)$$

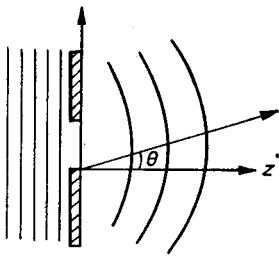


Рис. XV.1. Дифракция плоской волны на щели.

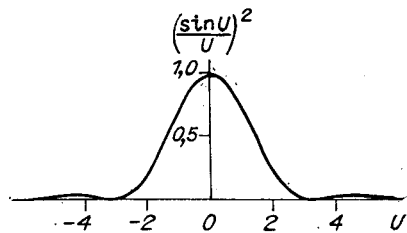


Рис. XV.2. Угловое распределение интенсивности в потоке, дифрагированном узкой щелью.

Направление распространения каждой данной «элементарной» волны составляет с осью z угол

$$\theta = \frac{k_x}{k_z} \approx \frac{k_x}{k}. \quad (97.5)$$

Поток энергии на единицу длины вдоль оси y (см. рис. XV.1) и в единичный интервал θ

$$j = \frac{c}{4\pi} |E_{kx}|^2 k_z \quad (97.6)$$

поскольку поток энергии в единичный интервал k_x пропорционален $|E_{kx}|^2$, а $dk_x = k \cdot d\theta$. Подставляя выражение (97.3) для $|E_{kx}|$, получим

$$j(\theta) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{E_0^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin U}{U}\right)^2 k d^2 = j(0) \cdot \left(\frac{\sin U}{U}\right)^2; \quad U = \frac{k\theta d}{2}. \quad (97.7)$$

Функция $\sin^2 U/U^2$, описывающая угловое распределение дифрагированного света, показана на рис. XV.2, а на рис. XV.3 представлена картина дифракции света на щели.

Интенсивность дифрагированного света на экране, расположенном на расстоянии $z \gg d$ от щели и ортогональном оси z , равна $I = j/z$, а напряженность поля

$$|E(x, z)| = \sqrt{\frac{k}{z}} |E_{kx}| = \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(x, 0) e^{-ik_x x} dx \right|. \quad (97.8)$$

Распределение по углу можно перевести в распределение по координате экрана, поместив его в фокальной плоскости цилиндриче-

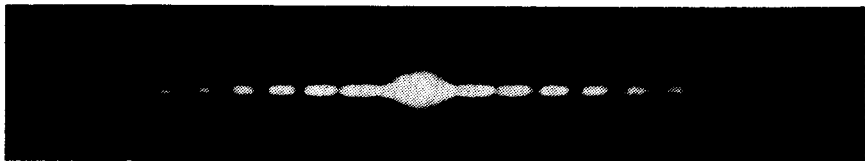


Рис. XV.3. Картина дифракции пучка света гелий-неонового лазера на щели.

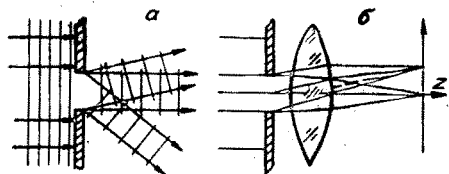


Рис. XV.4. Разложение дифрагированной волны на плоские потоки (а) и фокусировка плоской волны в «бесконечности» с помощью объектива (б).

ской линзы. Тогда плоская волна, соответствующая данному углу θ , сфокусируется в линию, параллельную оси y , как это изображено на рис. XV.4. Соответственно координата вдоль экрана и угол θ связаны между собой равенством $x = \theta F$, и соотношение (97.8) остается справедливым при замене $z \rightarrow F$.

Угловое распределение интенсивности в дифрагированном потоке описывается функцией $(\sin U/U)^2$, и угловой размер дифрагированного потока $\Delta\theta \sim \lambda/d$, что согласуется с оценкой (97.1).

§ 98. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА — ФРЕНЕЛЯ

В предыдущем параграфе мы представили волну, вырезанную щелью в экране, в виде плоских волн с различными k_{\perp} и проследили их распространение за экраном. Тот же результат можно получить и в результате иного подхода к этой задаче. Для описания распространения света Гюйгенс предложил некий механизм формирования фронта сферической волны, состоящий в следующем. Если принять, что каждая точка поверхности фронта волны (поверхности постоянной фазы $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$) является источником новой сферической волны с центром в этой точке, то поле в последующие моменты времени определяется суперпозицией волн от таких элементарных источников, а положение фронта — огибающей элементарных (сферических) волн. Основанием для этого приема служит простое и ясное физическое толкование явления: преградим путь волне непрозрачным экраном с «точечным» отверстием, тогда за экраном получим сферическую волну с центром в отверстии. Суперпозиция таких «точечных» источников и есть фронт начальной волны, а суперпозиция сферических волн — «вторичная» волна (рис. XV.5). Дальнейшее развитие этого принципа Френелем, добавившим к картине Гюйгенса интерференцию «волн-слагаемых», и придание Кирхгофом этой картине математического описания привели к созданию теории дифракции.

Рассмотрим теперь трехмерную задачу — дифракцию волны на отверстии произвольной формы, и не будем ограничиваться случаем плоской начальной волны. В соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля поле в точке P за экраном (рис. XV.6) есть суперпозиция сферических волн, исходящих из различных точек отверстия в экране:

$$E_P = A \iint_S dS \frac{E(S)}{R} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega t)}, \quad (98.1)$$

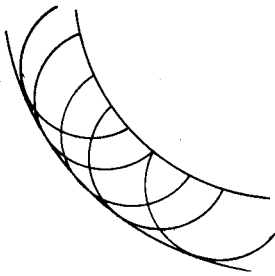


Рис. XV.5. Образование фронта волны по Гюйгенсу.

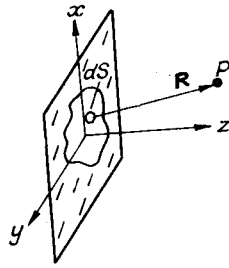


Рис. XV.6. К описанию дифракции на отверстии в плоском экране.

где $E(S)$ — напряженность поля в точке S отверстия, A — коэффициент, подлежащий определению. Расстояние между точкой-источником и точкой P

$$R = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + z^2} \approx z + \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z}. \quad (98.2)$$

Для нахождения коэффициента A устремим размеры отверстия в экране к бесконечности. Конечно, как и всегда, мы должны определить здесь физический масштаб бесконечности («по сравнению с чем»). Это мы сделаем несколько позже. Сейчас же заметим, что если волна перед экраном плоская, то при $S \rightarrow \infty$ поле в точке P также будем полем той же плоской волны, так что

$$E_0 e^{i(kz - \omega t)} = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dS \frac{E_0}{R} e^{i(kR - \omega t)}. \quad (98.3)$$

Принимая для R приближение (98.2), что, как увидим ниже, не противоречит «бесконечным» размерам отверстия, найдем

$$1 \approx \frac{A}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \exp \left\{ ik \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right\} = \frac{2A}{ik} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi \right]^2. \quad (98.4)$$

Интеграл в этом соотношении имеет следующее значение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = (1 + i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, $A = k/2\pi i$, и поле в точке P описывается соотношением

$$E(P) = \frac{k}{2\pi i} \int_S \frac{E(S)}{R} e^{i(kR - \omega t)} dS, \quad (98.5)$$

которое носит название интеграла Кирхгофа и представляет собой решение задачи о дифракции электромагнитной волны на экране с отверстием S .

Отметим одну существенную особенность полученного выражения: оно содержит множитель $-i = e^{-i\pi/2}$, что соответствует сдвигу фаз между реальным полем $E(S)$ в отверстии экрана и полем воображаемых точечных источников, которыми мы заменяем реальное поле в соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля. На это обстоятельство обратил внимание еще Френель, обнаруживший, что построение Гюйгенса для фронта вторичной волны (см. рис. XV.5), проводимое с учетом сдвига фаз и интерференции, дает правильный результат, если «принудительно» ввести сдвиг фаз $\pi/2$ в поле источников по отношению к полю первичной волны.

Теперь выясним справедливость наших приближений. Мы приняли при вычислении A , с одной стороны, $x, y \rightarrow \infty$, а с другой стороны, $x - x_p, y - y_p \ll z$ (см. (98.2)). Эти требования не противоречивы, так как, на самом деле, нужно, чтобы к бесконечности стремился фазовый множитель kR , т. е. величины x и y становились большими по сравнению с длиной волны λ . В то же время величина R слабо меняется при изменении x, y , если $x, y \ll z$. Поэтому для знаменателя в (98.3), (98.5) можно принять $R \approx z$.

Представим теперь разложение (98.2) в виде

$$R \approx z + \frac{x_p^2 + y_p^2 + x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_p + yy_p}{z}. \quad (98.6)$$

Если размеры отверстия в экране достаточно малы по сравнению с расстояниями z, x_p, y_p , т. е.

$$x \ll x_p, \quad y \ll y_p, \quad (98.7)$$

а точка наблюдения P расположена достаточно близко от оси, так что

$$\frac{kx_p^2}{z}, \quad \frac{ky_p^2}{z} \ll 1, \quad (98.8)$$

мы приходим к случаю, описанному в предыдущем параграфе. Действительно, компоненты вектора \mathbf{k} можно выразить через координаты точки наблюдения:

$$k_x = k\theta_x \approx k\frac{x_p}{z}; \quad k_y = k\theta_y \approx k\frac{y_p}{z}; \quad k_z \approx k,$$

и записать показатель экспоненты в (98.5) в виде

$$\begin{aligned} i(\mathbf{kR} - \omega t) &\approx ik \left(z + \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z} - \frac{x_p x + y_p y}{z} \right) - i\omega t \approx \\ &\approx i \left(k_z z - k_x x - k_y y + k \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z} \right) - i\omega t. \end{aligned} \quad (98.9)$$

Тогда поле в точке P описывается выражением, содержащим фурье-образ по волновым числам k_x, k_y от поля в отверстии,

$$E_p = \frac{k}{2\pi iz} e^{i \left(kz - \omega t + k \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z} \right)} \iint E(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (98.10)$$

Отметим, что фазовый множитель перед интегралом в (98.10) не влияет на распределение интенсивности в дифракционной картине. Если к тому же справедливы условия (98.8) и квадратичными членами в показателе экспоненты можно пренебречь, соотношение (98.10) есть не что иное, как разложение поля в отверстии по плоским волнам. В частности, для отверстия в виде щели (одномерный случай) множитель в интеграле Кирхгофа (98.5) следует заменить:

$$\frac{k}{2\pi i R} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{2\pi i z}}, \quad (98.11)$$

что соответствует переходу от разложения по сферическим волнам к разложению по цилиндрическим волнам^{*}). Тогда из (98.10) имеем

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i z}} e^{i(kz - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, 0) e^{-ikhx} dx. \quad (98.12)$$

Модуль этого выражения в точности совпадает с результатом (97.8), полученным в приближении плоских волн. Однако теперь найдено полное решение, учитывающее фазу дифрагированной волны.

Итак, интеграл Кирхгофа, являющийся математическим выражением принципа Гюйгенса — Френеля, может быть представлен в приближенном виде, существенно облегчающем вычисления, в двух важных частных случаях. Первый из них есть не что иное, как *параксиальное приближение*, или разложение по расходящимся сферическим волнам,

$$E(P) \approx \frac{k}{2\pi i z} \iint_S E(S) \exp \left\{ i \left(kz - \omega t + k \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right) \right\} dx dy; \quad (98.13)$$

$$x, x_p, y, y_p \ll z.$$

Второй случай — приближение Фраунгофера, или разложение по плоским волнам

$$E(P) = \frac{k}{2\pi i z} \iint_S E(x, y) \exp \{ i (kz - \omega t - k_x x - k_y y) \} dx dy; \\ x \ll d_x \ll x_p \ll \sqrt{\lambda z}; \quad y \ll d_y \ll y_p \ll \sqrt{\lambda z}. \quad (98.14)$$

Напомним, что при переходе к двумерному случаю (разложение по цилиндрическим волнам) множители перед интегралами в (98.13), (98.14) следует заменить согласно (98.11). Если же дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости объектива, расстояние до экрана z следует заменить на фокусное расстояние F .

Решение задачи дифракции в параксиальном приближении (98.13) носит название *дифракции Френеля*.

* Чтобы убедиться в необходимости такой замены, достаточно в (98.5) произвести интегрирование по одной из координат отверстия, приняв размер отверстия по этой координате бесконечным.

§ 99. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим задачу о дифракции плоской монохроматической волны на прямолинейном краю непрозрачного экрана (рис. XV.7), занимающего область $(x < 0, z = 0)$. Поскольку задача плоская, мы обязаны в (98.13) перейти от сферических волн к цилиндрическим (см. (98.11)):

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \int_0^{\infty} e^{ik(x-x_p)^2/2z} dx. \quad (99.1)$$

Проведя замену переменных, представим (99.1) в виде

$$E(x_p) = \frac{E_0}{\sqrt{\pi i}} e^{i(kz - \omega t)} \int_{-w}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi; \\ \xi = \sqrt{\frac{k}{2z}} (x - x_p); \quad w = x_p \sqrt{\frac{k}{2z}} = x_p \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}. \quad (99.2)$$

Таким образом, решение задачи о дифракции плоской волны на краю экрана сведено к так называемым *интегралам Френеля* (рис. XV.8):

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos \xi^2 d\xi; \quad S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin \xi^2 d\xi. \quad (99.3)$$

Их асимптотики при больших значениях w имеют вид

$$C(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin w^2}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right); \\ S(w) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos w^2}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right). \quad (99.4)$$

В частности, при $w \rightarrow \pm\infty$ оба интеграла стремятся к $\pm 1/2$. Таким

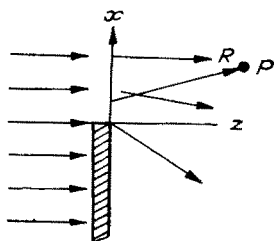


Рис. XV.7. Дифракция плоской волны на краю экрана.

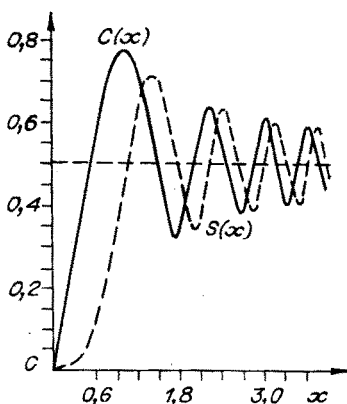


Рис. XV.8. Графики интегралов Френеля (99.3).

образом, дифрагированная волна описывается соотношением

$$E(x_p) = \frac{E_0 e^{i(kz - \omega t)}}{\sqrt{2i}} \left(\frac{1+i}{2} + C(w) + iS(w) \right), \quad (99.5)$$

а интенсивность в точке x_p

$$I(x_p) = \frac{c}{4\pi} |E(x_p)|^2 = \frac{cE_0^2}{8\pi} \left[\left(C(w) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(w) + \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (99.6)$$

График зависимости (99.6) приведен на рис. XV.9, а фотография дифракционной картины — на рис. XV.10.

Отметим, что масштаб дифракционной картины определяется соотношениями (99.2). Используя график, приведенный на рис. XV.9, можно оценить протяженность области полутени вблизи края экрана: $\Delta w \sim 1$, или $\Delta x_p \sim \sqrt{\lambda R}$. При больших w из асимптотики (99.4) следует, что период дифракционной картины соответствует сдвигу аргумента w : $\Delta(w^2) = 2\pi$, или $\Delta x_p \approx \lambda R/x_p$.

Величина $\sqrt{\lambda R}$ не случайно является масштабом дифракционной картины. Это параметр, определяющий размер так называемой *зоны Френеля*. Развивая волновую теорию света, Френель, как уже говорилось, предложил метод построения картины распространения волны. Поясним этот метод на простом примере. Допустим, необходимо найти поле волны, проходящей через круговое отверстие в экране, в точке P , лежащей на оси отверстия. Разобьем отверстие на концентрические кольцевые зоны и выберем радиусы колец r_n так, что расстояние до точки P от n -й и $(n+1)$ -й окружностей отличаются на $\lambda/2$. В приближении больших z_p

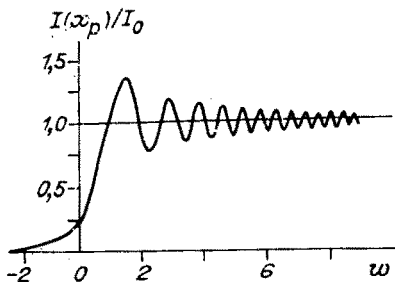


Рис. XV.9. Распределение интенсивности в волне, дифрагированной на краю полубесконечного экрана.

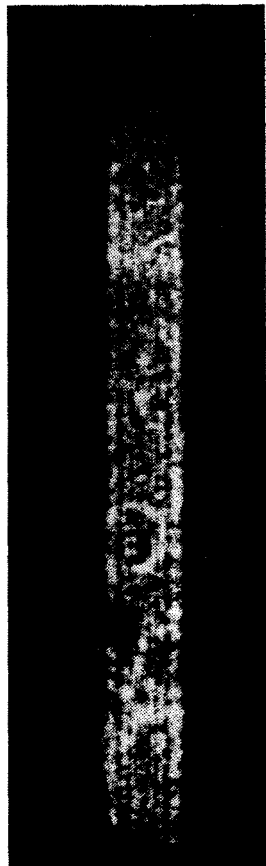


Рис. XV.10. Дифракция параллельного пучка света на краях широкой щели (гелий-неоновый лазер).

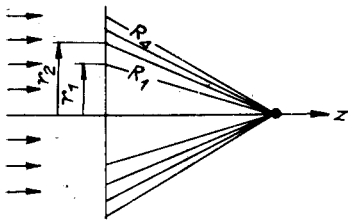


Рис. XV.11. Зоны Френеля;
 $r_n = \sqrt{n\lambda z_p}$.

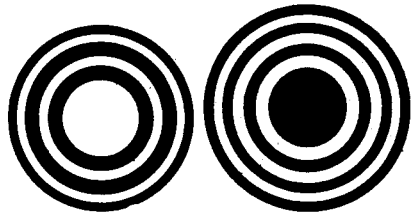


Рис. XV.12. Зонные пластинки.

нетрудно получить (рис. XV.11)

$$r_n \approx \sqrt{n\lambda z_p}; \quad r_n, \lambda \ll z_p. \quad (99.7)$$

Площадь каждого из колец не зависит от его номера и равна

$$\sigma = \pi (r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi \lambda z_p. \quad (99.8)$$

Поле в точке P определяется суперпозицией волновых потоков из каждой зоны. Приняв фазу волны в пределах зоны постоянной, можно считать, что две соседние зоны «гасят» друг друга. Прорисовав на отверстии заданного радиуса ρ зоны Френеля для заданной точки P и просуммировав их с учетом знака (множитель $(-1)^n$), можно оценить освещенность в точке P . Если первичная волна не плоская, а сферическая с источником на расстоянии z_s от выбранной поверхности, то радиусы зон Френеля описываются соотношением, аналогичным (99.8):

$$r_n = \sqrt{n\lambda \frac{z_p z_s}{z_p + z_s}}. \quad (99.9)$$

Метод Френеля дает качественно верное описание картины. В частности, он позволяет понять действие зонных пластинок-экранов (рис. XV.12), представляющих собой набор чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых возрастают пропорционально \sqrt{n} , как и размеры зон Френеля (99.7). Действительно, такая пластинка, состоящая, например, из нечетных прозрачных колец, ограниченных окружностями радиусов $r_n = \rho\sqrt{n}$, преобразует плоскую волну так, что в точку $z_p = r_n^2/n\lambda = \rho^2/\lambda$ волны от прозрачных колец придут в одинаковой фазе, и поле в этой точке будет много больше E_0 . Поэтому такие пластинки действуют аналогично линзе.

Задача 1. Рассмотреть методом интеграла Кирхгофа прохождение волны через зонную пластинку.

Пусть для определенности прозрачны нечетные кольца. В точке z_p на оси пластинки поле, согласно (98.5), есть

$$E_p = \frac{kE_0}{2\pi iz_p} \int_0^{r_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{ikr^2/2z_p} \Psi(r) r dr d\varphi, \quad (99.10)$$

где функция $\psi(r)$ равна 0 или 1 в зависимости от прозрачности кольца. Интегрируя (99.10), находим

$$E_p = -E_0 \sum_{n=0}^N \left(e^{ikr_{2n+1}^2/2z_p} - e^{ikr_{2n}^2/2z_p} \right) =$$

$$= -E_0 (e^{i\alpha} - 1) \sum_{n=0}^N e^{i2n\alpha} = E_0 (1 - e^{i\alpha}) \frac{1 - e^{i2N\alpha}}{1 - e^{i2\alpha}};$$

$$\alpha = k\rho^2/2z_p = \pi\rho^2/\lambda z_p.$$

Отсюда $|E_p| = E_0 \left| \frac{\sin N\alpha}{\cos(\alpha/2)} \right|$. При $\alpha = (2m+1)\pi$ числитель и знаменатель равны нулю. Раскрыв неопределенность, нетрудно получить, что в точках

$$z_m = \rho^2/(2m+1)\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (99.11)$$

имеет место фокус с полем $|E_p| = 2NE_0$. Ширину максимума вблизи фокуса m -го порядка можно оценить из очевидного условия $N(\alpha_m + \Delta\alpha) - N\alpha_m = \pm\pi$, т. е. $\Delta\alpha = \pm\pi/N$, или $\Delta z_p = \pm \lambda z_m^2/\rho^2 = \rho^2/(2m+1)^2\lambda$. (Сравни ниже с результатами для дифракционной решетки.)

Ясно, что зонная пластинка с прозрачными четными зонами обладает теми же свойствами (с заменой $2m+1 \rightarrow 2m$).

Зонные пластинки можно использовать для фокусировки электромагнитных волн вне оптического диапазона (СВЧ, рентген), где невозможно применение обычных оптических линз.

Задача 2. Описать распределение поля на оси круглого отверстия в экране, освещенном плоской монохроматической волной, падающей вдоль оси.

Пусть ρ — радиус отверстия. Тогда для точки P_n , отстоящей от экрана на расстоянии $z_n = \rho^2/n\lambda$, отверстие представляет собой набор n кольцевых зон Френеля. Стало быть, можно ожидать, что поле имеет максимумы в точках $n = 2m+1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и минимумы в точках $n = 2m$. Этот же результат следует из интеграла Кирхгофа ($x_p = y_p = 0$):

$$E(z) = \frac{kE_0}{2\pi iz} \int_0^{\rho} 2\pi e^{ikr^2/2z} r dr = -E_0 (e^{ik\rho^2/2z} - 1);$$

$$|E(z)| = 2E_0 \left| \sin \frac{\pi\rho^2}{2\lambda z} \right|, \quad (99.12)$$

Максимум поля — при $\pi\rho^2/2\lambda z = (2m+1)\pi/2$, минимум — при $\pi\rho^2/2\lambda z = m\pi$, в области $z > \rho^2/\lambda$ интенсивность монотонно убывает.

Рассмотренная выше картина дифракции, и в частности ее описание в форме интеграла Кирхгофа (98.5), позволяет сделать общее заключение о характере дифракции на так называемых дополнительных экранах. Два экрана называют дополнительными, если отверстия одного совпадают с непрозрачными участками другого (рис. XV.13). Волна, дифрагированная на каждом из них, описывается интегралом по поверхности прозрачной части экрана. Очевидно, что сумма полей, возникающих в точке P при дифракции на каждом из экранов, равна полю в невозмущенной волне

$$E^{(1)}(x_p) + E^{(2)}(x_p) = E_0. \quad (99.13)$$

Это утверждение и составляет суть теоремы Бабине. Например, при дифракции света на непрозрачном круге (см. (99.12)) за экраном

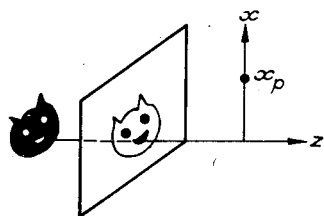
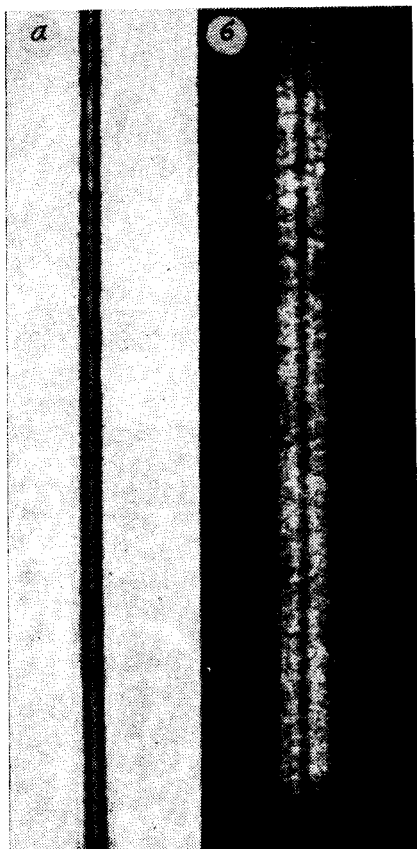


Рис. XV.13. Дополнительные экраны.

Рис. XV.14. Дифракция плоской волны на нити (а) и щели (б).

Диаметр нити 0,45 мм, диаметр щели 0,5 мм. Расстояние до экрана наблюдения 3 м. Источник — гелий-неоновый лазер.



на его оси $E(z) = E_0 \exp\{ik\rho^2/2z\}$, $I(z) = I_0$, т. е. интенсивность волны на оси (в центре геометрической тени) не зависит от расстояния и равняется интенсивности падающей волны (!). Наблюдение такого светлого пятна в центре тени было убедительным доказательством волновой природы света (Араго, 1818 г.). Если посмотреть на экран из центра тени, то вокруг экрана виден яркий ореол, который примерно соответствует первой зоне Френеля и является источником освещения приосевой области.

Обратим внимание, что изменения интенсивности в дифракционных картинах для дополнительных экранов, вообще говоря, не дополняют друг друга, поскольку соотношение (99.13) связывает напряженности полей.

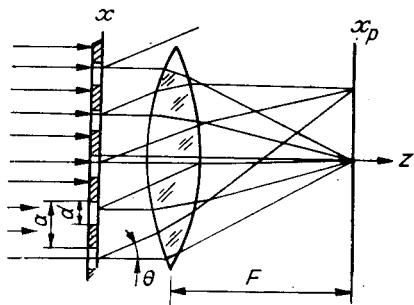
На рис. XV.14 приведены дифракционные картины для дополнительных экранов — щель и нить.

§ 100. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрим важный частный случай дифракции Фраунгофера на периодической структуре — дифракционной решетке. Такие оптические устройства представляют собой набор прозрачных щелей, разделенных непрозрачными полосами. Обычно это — стеклянные пластинки с нанесенными на них параллельными линиями. Схема такой решетки показана на рис. XV.15.

Пусть решетку освещает плоская монохроматическая волна, падающая вдоль оси z , ортогональной плоскости решетки, а интерфе-

Рис. XV.15. Схема дифракционной решетки.



ренционная (дифракционная) картина наблюдается на экране x_p , расположенном в фокальной плоскости линзы. В этом случае выполнены условия дифракции Фраунгофера (98.14) (интерференция в «бесконечности»), и можно воспользоваться результатами для дифракции Фраунгофера на щели. Если период одномерной решетки a , а ширина прозрачной щели d , то рассмотрение аналогично тому, которое проведено в § 97. Согласно (98.14) найдем

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} e^{i(kz - \omega t)} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{na}^{na+d} E_0 e^{-i h x x} dx. \quad (100.1)$$

Здесь N — полное число щелей решетки, освещенных падающей на нее волной, $k_x = k\theta$. Произведя интегрирование и суммируя возникающую геометрическую прогрессию, найдем интенсивность

$$\begin{aligned} I(x_p) &= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{kE_0^2}{2\pi F} \cdot \left| \frac{e^{-ik\theta d} - 1}{-ik\theta} \right|^2 \cdot \left| \frac{e^{-ik\theta Na} - 1}{e^{-ik\theta a} - 1} \right|^2 = \\ &= \frac{cN^2 E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F} \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2; \\ \alpha &= \frac{k\theta a}{2}; \quad U = \frac{k\theta d}{2} = \frac{d}{a} \cdot \alpha. \end{aligned} \quad (100.2)$$

Формула (100.2) содержит три множителя, каждый из которых имеет определенный физический смысл. Набор коэффициентов перед скобками есть интенсивность волны, дифрагировавшей под углом $\theta = 0$ — нулевой максимум

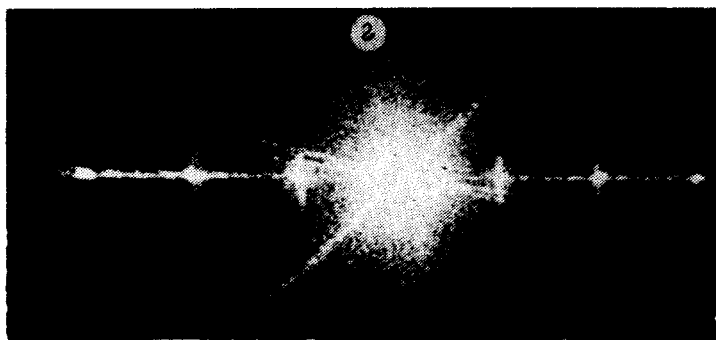
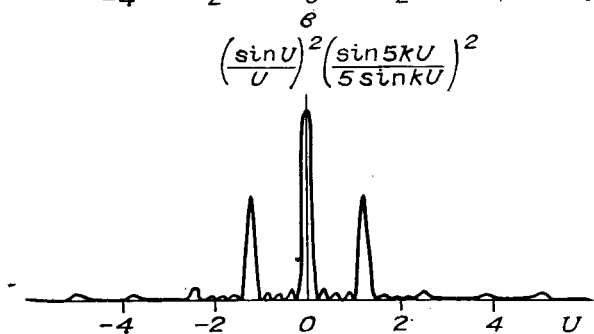
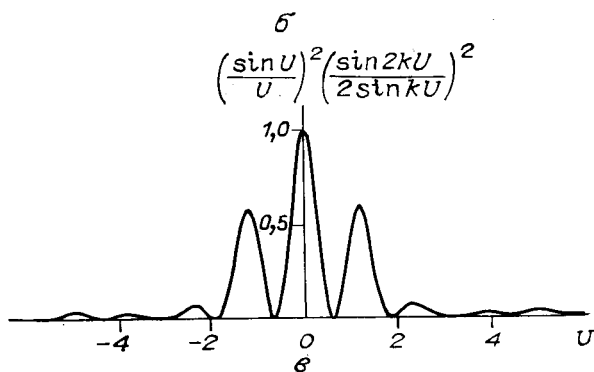
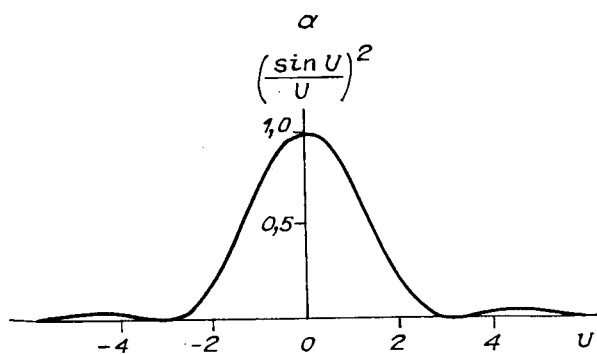
$$I_0 \equiv I(0) = cN^2 \frac{E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F}. \quad (100.3)$$

Характерно, что эта величина равна произведению интенсивности волны, прошедшей через щель d , на квадрат числа щелей N^2 , а не на N — результат когерентности полей в каждой из N щелей.

Второй множитель $(\sin U/U)^2$ описывает дифракцию на щели (сравни с (97.7)). Его роль мы обсудим ниже. Третий множитель учитывает эффект интерференции волн, прошедших через разные щели.

Распределение (100.2) удобно нормировать на нулевой максимум I_0 :

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2 \quad (100.4)$$



В этой форме особенно просто исследовать функцию $I(\theta)$ (рис. XV.16). В точках, где аргумент α принимает значения

$$\alpha_m = m\pi; \theta_m = \frac{2m\pi}{ka} = m \frac{\lambda}{a}, \quad (100.5)$$

расположены *главные максимумы*. Их величина убывает с номером m как

$$I_m = I_0 \left(\frac{\sin U_m}{U_m} \right)^2 \sim \frac{I_0}{m^2}. \quad (100.6)$$

Номер m называют порядком максимума. Отметим, что расстояние между максимумами обратно пропорционально периоду структуры a .

Кроме главных, функция $I(\theta)$ содержит вторичные максимумы, расположенные в точках

$$N\alpha_n = (2n+1)\pi/2; \quad \alpha_n \neq m\pi; \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (100.7)$$

а их интенсивности $I_n \sim I_0 N^2 U_n^2$, $U_n = d\alpha_n/a$. Для вторичных максимумов, расположенных между m -м и $(m+1)$ -м главными максимумами, значение параметра $\alpha_n \sim m\pi$, поэтому

$$I_n \sim \frac{I_0}{N^2 m^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi d} \right)^2 \sim \frac{I_m}{N^2}. \quad (100.8)$$

Таким образом, вторичные максимумы по порядку величины в N^2 раз меньше главных и в практически интересных случаях ($N \gg 1$) неразличимы. Это обстоятельство хорошо иллюстрируют кривые, приведенные на рис. XV.16.

Ширина главного максимума по основанию соответствует сдвигу на π аргумента «быстрого» синуса в (100.4) $N(\alpha_m + \Delta\alpha) = N\pi + \pi$, так что

$$\Delta\alpha = \pm\pi/N; \quad \Delta\theta_m = \pm\lambda/Na = \pm\lambda/h, \quad (100.9)$$

где $h = Na$ — апертура решетки. Ясно, что это не только очень малый абсолютный угловой размер, но и относительный:

$$\frac{\Delta\theta_m}{\theta_m} = \frac{1}{mN}. \quad (100.10)$$

Эта величина, как мы увидим в гл. XVI, определяет спектральную разрешающую способность решетки.

Задача 1. Найти распределение интенсивности в дифрагированной волне при косом падении первичной волны на дифракционную решетку (рис. XV.17). Теперь поле в каждой из щелей решетки описывается выражением

$$E(x, y, z=0) = E_0 e^{ik_x^0 x}; \quad k_x^0 = \theta_0 k \ll k.$$

Рис. XV.16. Распределение интенсивности в волне, прошедшей через дифракционную решетку из N щелей.

$a - N = 1$; $b - N = 2$; $c - N = 5$; $a/d = 2,5$; z — картина дифракции луча гелий-неонового лазера на решетке со структурой 120 линий/мм ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$).

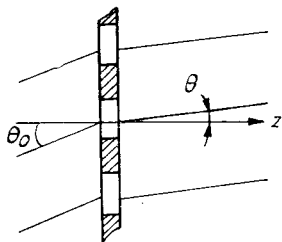


Рис. XV.17. Схема дифракционной решетки с косым падением первичной волны.

Подставив это соотношение в (100.4), найдем

$$I(x_p) = \frac{ckE_0^2}{8\pi^2} \left| \sum_{n=0}^N \int_{na}^{na+d} e^{i(k_x^0 - k_x)x} dx \right|^2; \quad x_p = \theta F. \quad (100.11)$$

Нетрудно видеть, что результат сводится к замене в (100.4) k_x на $k_x - k_x^0$. Итак, максимум нулевого порядка лежит теперь под углом $\theta = \theta_0$, а вся дифракционная картина повернута на угол θ_0 .

Обратим внимание на одно важное обстоятельство: при больших θ необходимо использовать соотношения $k_x = k \sin \theta$, $k_x^0 = k \sin \theta_0$, так что в (100.4)

$$U = kd(\sin \theta - \sin \theta_0)/2; \quad \alpha = ka(\sin \theta - \sin \theta_0)/2. \quad (100.12)$$

В частности, для углов дифракции, близких к θ_0 , получим

$$U \approx kd \cos \theta_0 (\theta - \theta_0)/2; \quad \alpha \approx ka \cos \theta_0 (\theta - \theta_0)/2, \quad (100.13)$$

т. е. в этом случае структура дифракционной картины определяется величиной $a \cos \theta_0$, которая много меньше a при углах падения θ_0 , близких к $\pi/2$ («скользящее» падение), что позволяет повысить разрешающую способность дифракционной решетки (см. (100.5)).

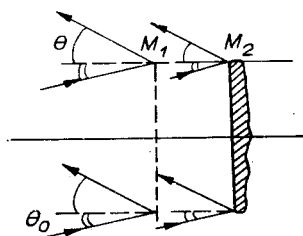
Обсудим теперь роль апертурной функции $(\sin U/U)^2$. Она представлена на рис. XV.16, a и является огибающей функции (100.4) в общем случае $N > 1$. Аргумент апертурной функции $U = kd\theta/2 = \pi d\theta/\lambda$ позволяет оценить угловой размер дифракционной картины:

$$\Delta U \sim \pi; \quad \Delta \theta \sim \lambda/d; \quad m \ll a/d. \quad (100.14)$$

Эти соотношения показывают, что для наблюдения высоких порядков дифракционной картины необходимо уменьшать d — ширину прозрачных полос решетки. В результате, естественно, снижается интенсивность света, прошедшего сквозь решетку. В частном случае $N = 2$ мы приходим к рассмотренной в гл. XIV схеме Юнга. Как мы теперь видим, для получения бесконечной по экрану интерференционной картины в схеме Юнга кроме монохроматичности и точности опорного источника требуется также точность отверстий в экране. Аналогичные вопросы возникают при рассмотрении схемы любого двухлучевого интерферометра. При этом обычно $\lambda/d \ll 1$, и дифракция сказывается, как правило, не на протяженности интерференционной картины, как в идеализированной схеме Юнга, а на размытии интерференционных полос (см. задачу 2).

Задача 2. Оценить влияние дифракции на апертуре в интерферометре Майкельсона, работающем по схеме линий равного наклона. Размер апертурного отверстия d , разность плеч интерферометра Δl .

Рис. XV.18. Эквивалентная схема интерферометра в режиме полос равного наклона. Дифракция на апертуре зеркала.



Проследим за лучом, падающим на зеркало M_0 (см. рис. XIV.12) под углом θ_0 к оси интерферометра. Разность хода между двумя интерферирующими лучами, возникающими при делении луча зеркалом M_0 , есть $2\Delta l \cos \theta_0$ (см. (95.6)). Распределение интенсивности на экране x интерферометра в пренебрежении дифракцией на апертуре описывается соотношением (95.4), которое в простейшем случае симметричного интерферометра ($I_1 = I_2$) имеет вид

$$I(x) = 4I_0 \cos^2(\varphi(\theta_0)/2); \quad \varphi(\theta_0) = 2k\Delta l \cos \theta_0. \quad (100.15)$$

Учтем дифракцию на апертуре, приняв, что интерферирующие потоки ограничены размерами зеркал M_1 и M_2 , которые одинаковы и равны d . Тогда плоская волна, падающая на интерферометр под углом θ к его оси, после деления на зеркале M_0 претерпевает дифракцию и отражение на зеркалах M_1 и M_2 . Волны, дифрагированные под углом θ к оси интерферометра (рис. XV.18), сводятся линзой на экране x и интерферируют. Задача во многом аналогична предыдущей при $N = 2$. Однако теперь «щели» — зеркала разнесены вдоль оси z . Поэтому поля волн, падающих на зеркала (см. рис. XV.18),

$$E_1(x_1, z=0) = E_0 e^{ik_x x_1}; \quad E_2(x_2, z=\Delta l) = E_0 e^{ik_x x_2 + ik_z \Delta l}; \quad (100.16)$$

$$k_x^0 = k \sin \theta_0; \quad k_z^0 = k \cos \theta_0.$$

Поля волн, дифрагированных на угол θ и пришедших на экран в точку $x = \theta F$, сдвинуты по фазе из-за вторичного прохождения зазора Δl волной от зеркала M_2 . Поэтому вместо (100.11) получим

$$I(\theta) = \frac{ckE_0^2}{8\pi^2} \left| \int_0^d e^{i2Ux/d} dx + e^{i\delta} \int_0^d e^{i2Ux/d} dx \right|^2 = I_0 (\sin U/U)^2 \cos^2(\delta/2); \quad (100.17)$$

$$U = kd(\sin \theta_0 - \sin \theta)/2; \quad \delta = k\Delta l(\cos \theta_0 + \cos \theta).$$

Если размеры зеркал велики, так что $d \gg \lambda$, дифракция не оказывает заметного влияния, так как множитель $(\sin U/U)^2$ не мал только при $\theta \approx \theta_0$. Мы приходим к прежнему результату (100.15). По мере уменьшения размера зеркал дифракция «размывает» интерференционные полосы, пока, наконец, дифракционная ширина данной полосы не станет сравнимой с расстояниями между полосами и интерференционная картина не исчезнет. Расстояние между двумя соседними максимумами (см. задачу 1, § 95)

$$\Delta\theta_m = \sqrt{2\left(\frac{m}{m_0} - 1\right)} - \sqrt{2\left(\frac{m-1}{m_0} - 1\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{m_0}},$$

где $m_0 = \pi/(k\Delta l)$ — порядок центрального максимума, $m - m_0 \ll m_0$. Ширина полосы вблизи m -го максимума из-за дифракции на апертуре d имеет значение ($\Delta U \sim \pi$)

$$\Delta\theta_d \sim \frac{2\pi}{kd \cos \theta_{om}} \sim \frac{\lambda}{d}.$$

Интерференционная картина исчезает, если $\Delta\theta_d \sim \Delta\theta_m$, или

$$d \sim \sqrt{m_0} \lambda. \quad (100.18)$$

В спектроскопических задачах интерферометр Майкельсона используют в высоких порядках, вплоть до $m_0 \sim 10^6$. Даже и в этом случае соотношение (100.18) не дает реального ограничения размеров зеркал: $d \gtrsim 10^3 \lambda \sim 0,5$ мм.

Двумерная периодическая структура (например, система взаимно перпендикулярных линий, нанесенных с периодом a) образует дифракционную картину, которая описывается произведением двух функций вида (100.4), а суперпозиция полей, дифрагированных по обоим направлениям, образует на экране картину, показанную на рис. XV.19.

Изготовление оптических дифракционных решеток — довольно сложный технологический процесс, так как при большой плотности линий (порядка 10^3 мм⁻¹) необходимо выдерживать с высокой точностью их параллельность, в противном случае возникают искажения дифракционной картины. Кроме того, решетка, работающая «на просвет», неизбежно и поглощает, что затрудняет работу со слабыми источниками и практически исключает применение таких решеток в ультрафиолетовой части оптического диапазона. К тому же неоднородная прозрачность по площади решетки, многократные отражения света на внутренних поверхностях решетки и т. п. приводят к появлению в дифракционной картине слабых паразитных линий (называемых «духами»), которые запутывают истинную картину. Более просты в изготовлении так называемые фазовые дифракционные решетки.

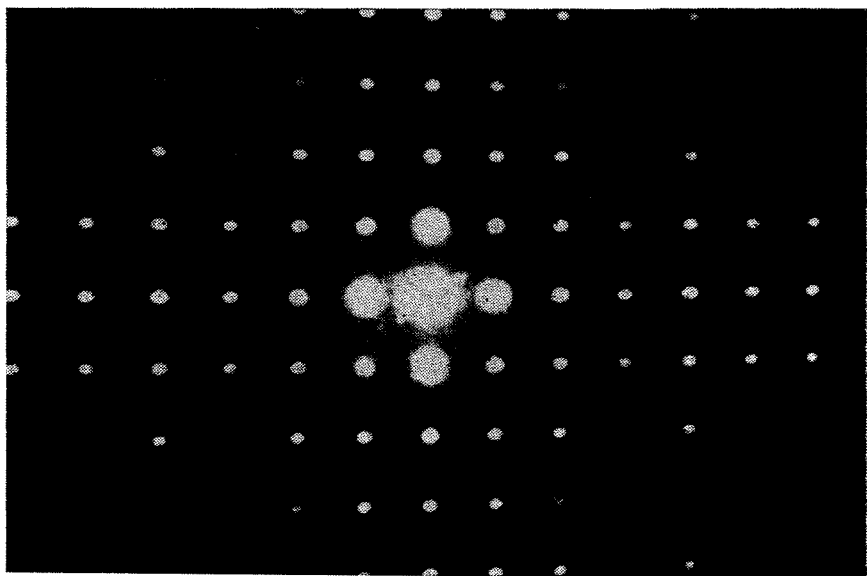


Рис. XV.19. Картина дифракции света гелий-неонового лазера на двумерной решетке (структура 2×500 линий/мм).

§ 101. ФАЗОВЫЕ РЕШЕТКИ

По своему физическому принципу фазовые решетки во многом аналогичны дифракционным. Отличие состоит прежде всего в способе создания периодической структуры, на которой происходит дифракция. На рис. XV.20 показаны различные типы фазовых решеток и возможные схемы их использования. Действие фазовой решетки рассмотрим вначале на простейшей симметричной конструкции (см. рис. XV.20, а). Пусть $a = 2d$ — период решетки, d — ширина «канавок», h — их глубина. Монохроматический источник освещает решетку плоской волной, падающей по нормали к ее плоскости. Волна, дифрагированная под углом θ к оси z , собирается в точку $x_p = = \theta F$ в фокальной плоскости объектива. В этом случае выполнены условия приближения Фраунгофера, и из (98.14) найдем

$$E(x_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i F}} \int E(x) e^{-ik\theta x} dx = \\ = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \left\{ \sum_{n=0}^N \int_{na}^{na+d} e^{-ik\theta x} dx + \sum_{n=0}^N \int_{na+d}^{(n+1)a} e^{ik2h - ik\theta x} dx \right\}. \quad (101.1)$$

Проделав стандартную операцию вычисления интенсивности (все преобразования аналогичны производившимся для дифракционной решетки в § 100), получим

$$I(x_p) = \frac{c}{4\pi} |E(x_p)|^2 = \frac{cN^2 E_0^2}{8\pi^2 F} kd^2 |\mathcal{F}(\theta)|^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2; \\ x_p = \theta F; \quad \alpha = ka\theta/2; \quad (101.2)$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{i}{kd\theta} \{ e^{-ikh\theta} (1 - e^{ikh2h}) - (1 - e^{ik(2h-a\theta)}) \}.$$

Соотношение (101.2) отличается от знакомого уже распределения интенсивности в дифракционной картине для одномерной решетки (100.2) множителем $|\mathcal{F}(\theta)|^2$, который в максимуме порядка m ($ka\theta_m = 2m\pi$) принимает значение

$$|\mathcal{F}(\theta_m)|^2 = (2 \cos kh)^2 (\sin U_m/U_m)^2, \quad (101.3)$$

где $U_m = k \cdot \theta_m d/2$. Выбрав глубину канавок равной

$$h = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda/2, \quad (101.4)$$

можно «погасить» дифракционную картину: такое «зеркало» не будет отражать свет в направлении главных максимумов.

Можно так выполнить фазовую дифракционную решетку, что она не погасит дифракционную картину, а перераспределит интенсивность света в дифрагированном потоке, направив основную его часть в выбранный максимум высокого порядка. Такие решетки называют *эшелетами* (Вуд, 1910 г.). Примером эшелета является отражательная решетка с пилообразным профилем (см. рис. XV.20, б).

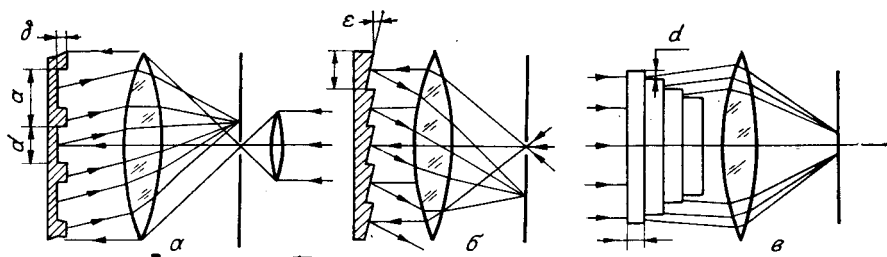


Рис. XV.20. Фазовые решетки.

a — отражательная решетка, освещаемая плоской волной, нормальное падение; *b* — отражательная решетка — эшелет, освещаемая плоской волной; *c* — эшелон Майкельсона.

Если угол наклона пины $\varepsilon \ll 1$, а период равен a (в данном случае $a = d$), то аналогично (101.1) найдем

$$E(x_p) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N \int_{na}^{(n+1)a} e^{i2\varepsilon(x-na) - ih\theta x} dx.$$

Для простоты мы приняли, что первичная волна падает вдоль оси («нормальное» падение). Повторяя стандартные вычисления, получим

$$I(x_p) = \frac{cN^2 E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F} \cdot \left(\frac{\sin U^*}{U^*} \right) \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2; \\ U^* = \frac{kd(\theta - 2\varepsilon)}{2}; \quad \alpha = \frac{kd\theta}{2}. \quad (101.5)$$

«Наиглавнейший» максимум распределения (101.5) соответствует $U^* = 0$ и находится при $\theta^* = 2\varepsilon$, в то время как порядок этого максимума определяется значением аргумента α . Как и прежде (см. (100.5)), в максимуме порядка m величины $\alpha_m = m\pi$, $\theta_m = m\lambda/a$. Поэтому основная энергия дифрагированного потока направлена в максимум, порядок которого есть $m^* = 2\varepsilon d/\lambda$. (Сравни со случаем косою падения света на дифракционную решетку (100.12), когда такое перераспределение интенсивности не имеет места.) Этот результат имеет простой смысл: разность хода между падающим лучом (см. рис. XV.20, *b*) и лучом, отраженным под углом 2ε к падающему, есть $2\varepsilon a$, т. е. максимум с наибольшей интенсивностью соответствует геометрическому отражению падающей волны от зеркала решетки.

Важным частным случаем фазовой дифракционной решетки является эшелон Майкельсона (см. рис. XV.20, *c*). Он выполняется из плоскопараллельных стеклянных пластинок, имеющих различные поперечные размеры. Дифракционная периодическая структура возникает за счет уступов и разности хода среда — воздух.

Задача. Описать дифракцию плоской монохроматической волны на эшелоне Майкельсона при нормальном падении.

Пусть d, h — размеры пластинок эшелона (см. рис. XV. 20, *c*), n_0 — показатель преломления вещества пластинок. Тогда дифракционная картина созда-

ется дифракцией света на N щелях, в каждую из которых свет приходит с запаздыванием по фазе в соответствии с номером щели n (номер отсчитывается от края эшелона). Можно считать, что эти щели лежат в плоскости последней пластинки эшелона, тогда $k\Delta x_n = k(n_0nh + (N-n)h)$. Для поля и интенсивности в дифрагированном потоке получим

$$E(x_p) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N \int_{nd}^{(n+1)d} \exp\{ik(n_0nh + (N-n)h - \theta x)\} dx;$$

$$I(x_p) = \frac{cN^2 E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F} \left(\frac{\sin U}{U}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha^*}{N \sin \alpha^*}\right)^2; \quad (101.6)$$

$$x_p = \theta F; \quad U = kd\theta/2; \quad \alpha^* = k((n_0 - 1)h - \theta d)/2.$$

Максимумы интенсивности дифрагированного света достигаются при $\alpha_m^* = m\lambda$, $\theta_m = ((n_0 - 1)h - m\lambda)/d$. В частности, если при $\theta = 0$ наблюдается максимум, то порядок центрального максимума $m_0 = (n_0 - 1)h/\lambda$. Порядки следующих максимумов будут меньше m_0 ($\theta \geq 0!$). Таким образом, здесь ситуация аналогична имеющей место в интерференционной картине для режима полос равного наклона.

Обычно пластинки, из которых изготавливают эшелон Майкельсона, довольно толстые: $h \sim 1$ см (их число сравнительно невелико, $N \sim 10$). Поэтому порядки дифракционной картины высокие: $m_0 \sim 10^4$ ($n_0 \approx 1,5$).

§ 102. ДИФРАКЦИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Принцип Гюйгенса — Френеля применим не только для описания различных видов дифракции. Пользуясь этим принципом и его математической формой — интегралом Кирхгофа, можно рассчитать прохождение света через оптические устройства. В то же время учет дифракционных явлений позволяет выяснить предел применимости геометрической оптики и определить важнейшую характеристику оптических устройств — разрешение.

Тонкая линза (см. § 89) фокусирует плоскую волну в точку — фокус. В геометрической оптике это результат преломления лучей на сферических границах. Рассмотрим, как описывается действие линзы на языке волновых преобразований.

Пусть на линзу вдоль ее оси падает плоская монохроматическая волна. Пройдя через линзу, волна получает некоторый сдвиг фазы, величина которого зависит от расстояния точки фронта волны от оси линзы. В результате плоская волна перестает быть плоской — преобразуется в сходящуюся или расходящуюся (в зависимости от формы линзы) сферическую волну. Если линза ограничена двумя сферическими поверхностями радиусов R_1, R_2 , то толщина линзы на расстоянии от оси (рис. XV.21)

$$d(x) = d_1(x) + d_2(x); \quad d_1(x) = d_1(0) - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2}\right) \approx d_1(0) - \frac{x^2}{2R_1};$$

$$d_2(x) \approx d_2(0) - \frac{x^2}{2R_2}; \quad x \ll R_1, R_2. \quad (102.1)$$

Тогда сдвиг фазы, возникающей в результате прохождения волной

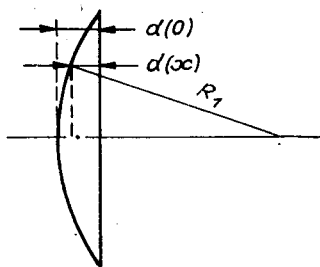


Рис. XV.21. К расчету прохождения плоской волны через тонкую линзу (показана половина линзы).

тонкой линзы, описывается соотношением

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= k(d(0) - d(x)) + knd(x) \approx knd - k(n-1) \times \\ &\times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x^2}{2} = k \left(nd - \frac{x^2}{2F} \right); \\ F^{-1} &= (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (102.2)$$

Здесь n — показатель преломления материала линзы. Для простоты все вычисления проделаны для плоскости $y=0$. Таким образом, действие линзы описывается фазовым множителем $\exp\{ik(nd - x^2/2F)\}$, и плоская волна с амплитудой E_0 , пройдя линзу, превращается в сферическую волну

$$F(x, z) \propto \exp\left\{ik\left(nd + z - \frac{x^2}{2F} - \omega t\right)\right\}. \quad (102.3)$$

(Здесь нас интересует только фаза волны.) Фазовый множитель $\exp\{iknd\}$ не зависит от координат и поэтому не влияет на форму волнового фронта, так что в большинстве расчетов его можно не учитывать. Если $F > 0$, то это сходящаяся волна, она фокусируется в точку, отстоящую от линзы на расстояние $\Delta z = F$. Если же $F < 0$, то волна расходящаяся, ее центр — точка на расстоянии $\Delta z = -F$ от линзы. Эти результаты получены в приближении $x \ll R_1, R_2$, которое есть не что иное, как известное уже параксиальное приближение (см. § 89). Именно в этом приближении волновой пакет

$$E(x) \propto \exp\left\{ik\left(z \pm \frac{x^2}{2z} - \omega t\right)\right\} \quad (102.4)$$

описывает сферическую волну (сравни (98.13)).

Призма поворачивает фронт волны на угол, величина которого определяется в геометрической оптике также преломлением лучей на границах. В волновом рассмотрении действие призмы описывается изменением фазы волны. Если угол при вершине равен α (рис. XV.22), то сдвиг фазы, возникающий при прохождении призмы,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) &= k\{d - (h-x)\alpha + n(h-x)\alpha\} = \\ &= kd + k(n-1)\alpha(h-x); \quad \alpha \ll 1. \end{aligned} \quad (102.5)$$

Для призмы с углом $\alpha \sim 1$ необходимо в выражении (102.5) заменить α на $\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2$, где $\alpha_{1,2}$ — углы при вершине между стороной

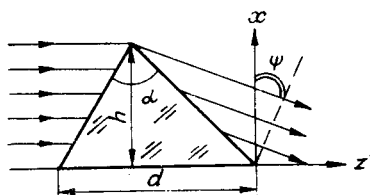


Рис. XV.22. Прохождение плоской волны через призму.

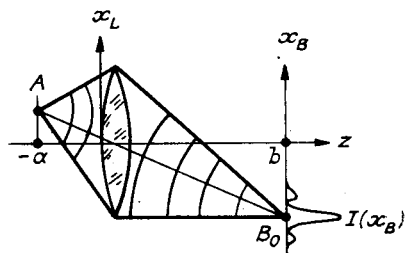


Рис. XV.23. К расчету тонкой линзы.

призмы и высотой. Фронт волны соответствует условию $\varphi(x, z) = \text{const}$. Поскольку за призмой $\varphi(x, z) = \Delta\varphi(x) + kz$, то угол поворота фронта

$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left/ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right. = -\alpha(n-1). \quad (102.6)$$

Тот же результат дают построения для лучей в приближении геометрической оптики.

Теперь применим интеграл Кирхгофа к построению изображения, получаемого с помощью тонкой линзы (рис. XV.23). Пусть точка A — предмет. Найдем поле в некоторой точке B , расположенной в плоскости, сопряженной с плоскостью предмета. Выберем систему координат так, чтобы предмет находился в плоскости $y=0$, в точке $A(x_A, 0, -a)$. Поле от точечного источника A в плоскости линзы $z=0$ описывается, согласно (98.13), выражением, содержащим интеграл по плоскости предмета. Интегрирование дает

$$E(x_L, y_L, 0) = -\frac{kS_0}{2\pi ia} E_0 \exp \left\{ ik \left(-a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2(-a)} \right) \right\},$$

где S_0 — некоторая эффективная площадь «точечного» источника (обычно задан его поток энергии). Поле в точке $B(x_B, 0, b)$ аналогично:

$$E_B = \frac{k}{2\pi ib} e^{ikb} \int_D dx_L dy_L E(x_L, y_L, 0) \times \\ \times e^{ik[(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2]2b - ik(x_L^2 + y_L^2)/2F},$$

интеграл берется по апертуре линзы D . Подставляя сюда $E(x_L, y_L, 0)$, найдем

$$E_B = -\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} E_0 \iint_D e^{i\varphi(x_L, y_L)} dx_L dy_L; \quad (102.7) \\ \varphi(x_L, y_L) = -k \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} - k \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} + \\ + k \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} + k(b - a).$$

Второе слагаемое в φ учитывает сдвиг фазы, вносимый линзой (см. (102.3)). Используя условие (89.15) для сопряженных плоскостей $1/(-a) + 1/b = 1/F$, получим

$$\varphi(x_L, y_L) = kx_L \left(\frac{x_A}{a} - \frac{x_B}{b} \right) - ky_L \frac{y_B}{b} + \varphi_0;$$

$$\varphi_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{x_B^2 + y_B^2}{b} - \frac{x_A^2}{a} \right) + k(b - a),$$

где φ_0 — добавка в фазе, не зависящая от переменных интегрирования. Приняв для простоты апертуру линзы квадратной ($\pm D/2$ по обеим координатам), произведя интегрирование и вычислив $|E_B|^2$, найдем интенсивность в точке B :

$$I_B = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} D^2 E_0 \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_x}{U_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_y}{U_y} \right)^2; \quad (102.8)$$

$$U_x = \frac{kD}{2} \left(\frac{x_A}{a} - \frac{x_B}{b} \right); \quad U_y = \frac{kD}{2} \cdot \frac{y_B}{b}.$$

Как видим, φ_0 не входит в окончательный результат. Максимум интенсивности соответствует некоторой точке B_0 , где $U_x = U_y = 0$; $x_A/x_{B_0} = a/b$; $y_{B_0} = y_A = 0$, что находится в полном соответствии с результатами геометрической оптики. Таким образом, точка A изображается в сопряженной плоскости в виде дифракционной картины, интенсивность которой имеет максимум в точке B_0 , совпадающей с геометрическим изображением точки A .

Полученный результат позволяет обсудить *дифракционные ограничения* в оптических приборах. Эффективный размер изображения точечного предмета, согласно (102.8), соответствует значению $U_x \sim U_y \sim \pi$, или $\Delta x_B \sim \Delta y_B \sim \lambda b/D$. Это и есть так называемое линейное разрешение линзы: два точечных предмета могут быть разрешены (различены) в плоскости изображения, если расстояние между центрами их изображений

$$\delta x_{B_0} = x_{B_0}^{(1)} - x_{B_0}^{(2)} \geq \frac{\lambda}{D} b. \quad (102.9)$$

В частном случае, когда расстояние от предмета до объектива намного превышает фокусное расстояние последнего, условию (102.9) можно придать вид ($a \gg b \approx f$)

$$\delta \theta \geq \lambda/D, \quad (102.10)$$

где $\delta \theta = \delta x_{B_0}/F$ — угловое разрешение линзы. Это типичная ситуация для телескопа, а также фотоаппарата.

Рассмотрим теперь разрешение микроскопа (рис. XV.24). Для него характерно обратное отношение $b \gg a \approx F$ и большая апертура $D \sim F$. Поэтому разрешение в плоскости объекта, получаемое непосредственно из углового разрешения (102.10),

$$\delta x_a \sim \delta \theta \cdot a \sim \lambda. \quad (102.11)$$

Этот же результат можно получить и другим способом. Выберем в

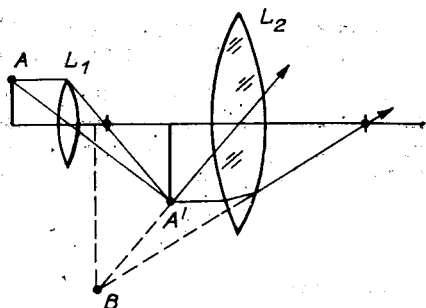


Рис. XV.24. Схема микроскопа.

A — предмет, L_1 — объектив; A' — промежуточное изображение; B — мнимое изображение; L_2 — окуляр.

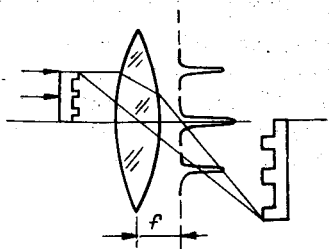


Рис. XV.25. К определению разрешающей способности микроскопа.

качестве предмета прозрачное тело, обладающее некоторой периодической структурой (рис. XV.25), и найдем минимальное значение периода этой структуры l , который еще присутствует в изображении. Свет, прошедший сквозь предмет и объектив, создает в фокальной плоскости объектива дифракционную картину типа (100.4). Если угловая апертура объектива $\text{tg } \theta_{\max} = D/(2a)$, то первый дифракционный максимум лежит под углом θ_1 (см. (100.12), $\theta_0 = 0$): $\sin \theta_1 = \lambda/l$. Из условия $\theta_1 < \theta_{\max}$ находим разрешение микроскопа

$$l = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{D}\right)^2}, \quad (102.12)$$

что совпадает с оценкой (102.11).

Можно несколько повысить разрешение микроскопа с помощью двух приемов. Во-первых, применять косое освещение предмета. Тогда в соответствии с (100.12) следует заменить $\sin \theta_1$ на $\sin \theta_1 + |\sin \theta_0|$, и вместо (102.12) получим

$$l = \frac{\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{D}\right)^2}}{1 + |\sin \theta_0| \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{D}\right)^2}}. \quad (102.13)$$

Это дает выигрыш примерно в два раза. Во-вторых, можно заполнить пространство между предметом и объективом иммерсионной (от англ. immersion — погружение) жидкостью с коэффициентом преломления n , что уменьшает в n раз длину волны перед объективом, величина которой и входит в (102.13). Таким образом, разрешение микроскопа ограничено длиной волны света, который используется для освещения предмета. Радикальным решением является переход к «освещению» быстрыми электронами. В этом случае поток электронов ведет себя как свет с длиной волны $\lambda = 2\pi\hbar/p$, где $\hbar = 0,65829 \cdot 10^{-15}$ эВ·с — постоянная Планка, p — импульс электрона. Даже при довольно скромной энергии электронов 100 кэВ эффективная длина волны $\lambda \approx 0,04$ Å. Предельное разрешение такого

микроскопа по-прежнему можно оценивать по формуле (102.13). В электронных микроскопах $\theta_{\max} \sim 10^{-2}$. Поэтому в приведенном примере ($a \gg D$) теоретическое разрешение $l \sim 4 \text{ \AA}$. Реально разрешение еще в несколько раз хуже из-за аберраций электронно-оптической системы микроскопа. Отметим, что при косом освещении предмета электронным пучком с $\theta_0 > \theta_{\max}$ разрешение может значительно возрастать.

§ 103. СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ

Как мы видели в § 102, минимальный размер деталей объекта, разрешаемый микроскопом, имеет порядок длины волны излучения, в котором рассматривается объект. Этот предел и ограничивает реальное увеличение микроскопа, так как при его возрастании наблюдаемая дифракционная картина грубо искажает действительную структуру предмета. В эпоху, когда описанные ограничения еще не были известны, возникали даже «открытия» несуществующей структуры мелких объектов.

Возникает вопрос: можно ли каким-то способом восстановить по дифракционной картине действительные детали, размер которых много меньше длины волны? Положительный ответ был дан в 1952 г. итальянским физиком Торальдо ди Франсиа. Он показал, что дифракционные картины от двух объектов, различающихся сколь угодно мелкими деталями, не будут тождественными. Поэтому, строго говоря, принципиального предела разрешения микроскопа вообще не существует. При помощи предложенных в дальнейшем специальных оптических систем со «сверхразрешением» оказалось возможным обрабатывать дифракционные картины и восстанавливать изображение объекта. Было выяснено, что практический предел такого сверхразрешения определяется очень жесткими допусками на точность изготовления оптической системы и на уровень различных помех. Величину предела можно получить, воспользовавшись общими соотношениями теории информации (см. § 82).

Согласно формуле Шеннона (82.7) количество информации (в битах), которую содержит любой сигнал в полосе частот $\Delta\omega$ и в единичном интервале времени,

$$\frac{\Delta I}{\Delta t \cdot \Delta\omega} = \frac{1}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (103.1)$$

где P_c , $P_{\text{ш}}$ — мощности сигнала и шума соответственно. Поскольку этот закон основан только на соотношении неопределенности и общем понятии о количестве информации, он непосредственно переносится на плотность информации на единицу длины изображения в интервале Δk_x :

$$\frac{\Delta I}{\Delta x \cdot \Delta k_x} = \frac{1}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right). \quad (103.2)$$

Для микроскопа величина Δk_x определяется апертурой объектива и длиной волны света и вблизи оптической оси при единичном увеличении (см. (102.12))

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{D}\right)^2}}. \quad (103.3)$$

Примем, что для разрешения детали объекта размера δ требуется минимальная информация в один бит. Тогда

$$\Delta I \approx (\Delta x)_0 / \delta, \quad (103.4)$$

где $(\Delta x)_0$ — размер объекта, который, вообще говоря, не равен размеру его изображения Δx даже при единичном увеличении из-за дифракции ($\Delta x \gg (\Delta x)_0$).

Рассмотрим теперь два предельных случая. Если размер объекта $(\Delta x)_0 \gg l$, то $\Delta x \approx (\Delta x)_0$, и из (103.2), (103.4) находим для коэффициента сверхразрешения значение

$$\frac{l}{\delta} \approx \log_2 \left(\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right); \quad P_c \gg P_{\text{ш}}. \quad (103.5)$$

В принципе эта величина ничем не ограничена сверху, однако для получения заметного сверхразрешения необходимо обеспечить ничтожный уровень шума. Случай $(\Delta x)_0 \gg l$ соответствует обычному режиму работы микроскопа.

В обратном предельном случае ($(\Delta x)_0 \ll l$) размер изображения не зависит от размера объекта и определяется только дифракцией на апертуре объектива: $\Delta x \sim l \gg (\Delta x)_0$. При этом коэффициент сверхразрешения

$$\frac{l}{\delta} \approx \frac{\Delta x}{(\Delta x)_0} \log_2 \left(\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right). \quad (103.6)$$

При том же отношении сигнал/шум последнее значение много больше, чем (103.5). Однако для разрешения относительно мелких деталей маленького объекта

$$\frac{\Delta x_0}{\delta} \approx \frac{\Delta x}{l} \log_2 \left(\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right) \quad (103.7)$$

требуется все же большое отношение сигнал/шум ($\Delta x \sim l$).

Полученные формулы легко обобщаются на двумерный случай. Для квадратной апертуры вместо (103.2) получаем

$$\frac{\Delta I}{\Delta S \cdot \Delta k_x \Delta k_y} = \frac{1}{(2\pi)^2} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (103.8)$$

где ΔS — площадь изображения, а ширина спектра $\Delta k_x = 2\pi/l_x$, $\Delta k_y = 2\pi/l_y$. Поскольку теперь $\Delta I \approx (\Delta S)_0 / \delta^2$, то коэффициент сверхразрешения определяется соотношениями

$$\frac{l_x l_y}{\delta^2} \approx \log_2 \left(\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (103.9)$$

если $(\Delta S)_0 \gg l_x l_y$ ($\Delta S \approx (\Delta S)_0$), и

$$\frac{l_x l_y}{\delta^2} \approx \frac{\Delta S}{(\Delta S)_0} \log_2 \left(\frac{P_c}{P_m} \right), \quad (103.10)$$

если $(\Delta S)_0 \ll l_x l_y$ ($\Delta S \gg (\Delta S)_0$).

Недавно был предложен совершенно иной метод [7] получения сверхразрешения, состоящий в следующем. На объект накладывается тонкая диафрагма с маленьким отверстием диаметра d . Перемещая эту диафрагму, регистрируют интегральную интенсивность проходящего сквозь объект и диафрагму света. Это и дает изображение достаточно тонкого объекта с разрешением $\delta \approx d$ независимо от длины волны. В частности, достижимо значение $\delta \ll \lambda$. Этот метод получил название «оптического стетоскопа» по аналогии с медицинским стетоскопом, с помощью которого можно, например, определять положение сердца с точностью порядка размера отверстия стетоскопа независимо от длины соответствующей звуковой волны.

Заметим, что последний метод можно рассматривать как некоторый специальный случай предыдущего, используя соотношение, аналогичное (103.7), в двумерном случае:

$$\frac{(\Delta S)_0}{\delta^2} \approx \frac{\Delta S}{l_x l_y} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_m} \right). \quad (103.11)$$

Режим оптического стетоскопа соответствует $P_c \sim P_m$, когда обработка дифракционной картины становится невозможной и можно использовать только интегральную интенсивность. Если при этом $(\Delta S)_0 \sim d^2 \ll l_x l_y$, то $\Delta S \sim l_x l_y$ и $\delta \sim d$.

Глава XVI

ОПТИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ

Измерение спектров источников электромагнитного излучения составляет основную задачу спектроскопии. Такие измерения в каждом из диапазонов шкалы электромагнитных волн имеют свои особенности, находящие отражения прежде всего в методах спектрального анализа. В данной главе будут рассмотрены методы спектроскопии в оптическом диапазоне.

§ 104. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ

Важнейшей характеристикой спектрального прибора является спектральная разрешающая способность, или, кратко, спектральное разрешение, т. е. способность различить в спектре исследуемого источника линии, соответствующие двум близким частотам (длинам

волн):

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda_{\min}|} = \frac{k}{|\Delta k_{\min}|} = \frac{\omega}{|\Delta\omega_{\min}|}. \quad (104.1)$$

Грубый критерий спектрального разрешения можно выразить через видность дифракционной картины спектра

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \sim 1. \quad (104.2)$$

Так же как и линейное разрешение оптического прибора, спектральное разрешение может быть в принципе неограниченно увеличено (см. § 103) за счет специальной обработки дифракционной картины спектра.

Рассмотрим дифракционную решетку, освещаемую источником, спектр которого содержит две близкие линии λ и $\lambda + \Delta\lambda$ (k и $k + \Delta k$). Дифракционная картина в этом случае будет иметь два максимума m -го порядка под углами

$$\theta_m = \frac{2m\pi}{ka} \text{ и } \theta_m + \delta\theta = \frac{2m\pi}{(k + \Delta k)a} \approx \theta_m \left(1 - \frac{\Delta k}{k}\right). \quad (104.3)$$

Распределение интенсивности на этом участке дифракционной картины (рис. XVI.1) описывается суммой двух функций вида (100.4), в одной из которых k заменено на $k + \Delta k$. Ширина каждого из максимумов есть (см. (100.9)) $2\Delta\theta = 2\lambda/Na$. Из условия $2\Delta\theta \sim \delta\theta$ получаем спектральное разрешение

$$R_\lambda = \frac{k}{|\Delta k_{\min}|} \sim mN. \quad (104.4)$$

Такое же выражение следует из так называемого критерия Рэлея, согласно которому две линии могут быть разрешены, если максимум одной из них совпадает с минимумом другой (см. задачу 1).

Задача 1. Пользуясь критерием Рэлея, найти спектральное разрешение дифракционной решетки.

Критерий Рэлея будет выполняться, если при переходе от λ к $\lambda + \Delta\lambda$ аргумент $N\alpha$ «быстрого синуса» в (100.4) будет меняться на π , т. е.

$$N(k + \Delta k)\theta_m a/2 = Nm\pi + \pi; \quad k\theta_m a/2 = m\pi.$$

Отсюда $\Delta k/k = 2\pi/(kN\theta_m a) = 1/mN$, что совпадает с (104.4).

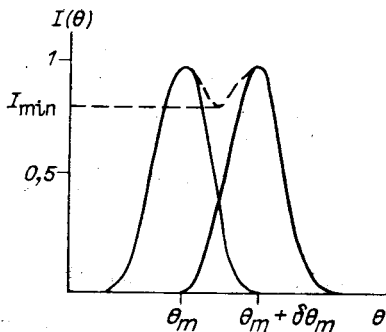


Рис. XVI.1. Распределение интенсивности спектральной картины при разрешении двух близких линий.

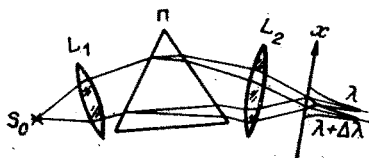


Рис. XVI.2. Схема призмного спектрографа.

S_0 — источник; L_1 и L_2 — линзы, Π — призма (условно показано распределение интенсивности по экрану X).

Другим широко распространенным спектральным прибором является *призмный спектрограф*. Способность прозрачных тел при определенных условиях разлагать белый свет в спектр известна с незапамятных времен. Во всяком случае, Декарт упоминает об этом явлении в своем «Трактате о свете», а Ньютон подробно его исследовал и описал в «Оптике». Тем не менее призмный спектрограф до сих пор «верой и правдой» служит человеку.

В основе работы прибора лежит явление дисперсии показателя преломления оптически прозрачной среды $n = n(\lambda)$. Угол отклонения световой волны, падающей на призму, зависит поэтому от длины волны, так что согласно (102.6)

$$\frac{d\psi}{d\lambda} \approx \alpha \frac{dn}{d\lambda}; \quad \alpha \ll 1. \quad (104.5)$$

Здесь α — угол при вершине призмы. Схема призмного спектрографа приведена на рис. XVI.2. «Точечный» источник S_0 , помещенный в фокусе линзы, освещает призму плоским волновым потоком, который в соответствии с (104.5) разлагается призмой на монохроматические составляющие — каждая из них отклоняется на «свой» угол $\psi(\lambda)$. Линза L_2 фокусирует каждую из составляющих в соответствующую точку экрана, расположенного в ее фокальной плоскости. Обычно в спектрографах применяют не «точечные», а линейные источники (вытянутая щель) — это более удобно, так как тогда спектральная картина имеет вид параллельных линий, окрашенных в цвета монохроматических составляющих. В случае непрерывного спектра возникает хорошо известная картина цветов радуги.

Спектральное разрешение призмного спектрографа определяется дифракцией света на апертуре. Если свет источника S_0 содержит две близкие линии λ и $\lambda + \Delta\lambda$, то распределение интенсивности на экране для каждой из них описывается функцией вида (97.7), и линии будут разрешены при условии

$$\Delta U = k \cdot \Delta\theta \cdot d/2 \sim \pi, \quad (104.6)$$

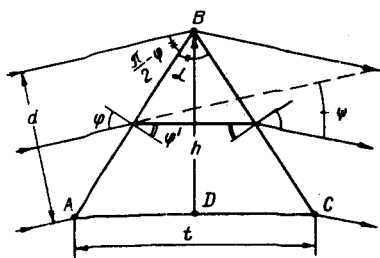
где d — апертура спектрографа. В оптимальном случае апертура ограничена высотой призмы h , которая при $\alpha \ll 1$ совпадает с d (рис. XVI.3). Угол $\Delta\theta$ есть в данном случае $\Delta\psi$ из (104.5). В результате находим ($\Delta\theta = \Delta\psi$, $d = h$):

$$R_\lambda^{-1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\psi}{\alpha \left(\frac{dn}{d\lambda}\right) \lambda} \sim \frac{1}{\alpha h \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)}.$$

Поскольку размер основания призмы $t \approx \alpha h$, окончательно получим

$$R_\lambda \sim t \frac{dn}{d\lambda}. \quad (104.7)$$

Рис. XVI.3. Ход лучей в призме (симметричная геометрия).



Призменные спектрографы применяются в видимом и ближних ультрафиолетовом и инфракрасном участках оптического диапазона. В спектрографах, предназначенных для работы в видимом свете, используются специальные оптические стекла: крон, флинт и их различные модификации. Максимальная дисперсия достигается в оптическом стекле ТФ5 (тяжелый флинт): $dn/d\lambda \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. В ультрафиолетовом диапазоне применяются кварц, флюорит (CaF_2), соли LiF , NaF , BaF_2 , дисперсия которых того же порядка на длинах волн $2000 \div 4000 \text{ \AA}$. Для инфракрасного диапазона используют кристаллы солей NaCl , KCl (сильвин) и некоторые другие. Их дисперсия примерно в пять раз меньше на длинах волн $7000 \div 10\,000 \text{ \AA}$.

Спектральное разрешение призмного спектрографа (104.7) ограничено дисперсией стекла и размером основания призмы t . Обычно апертура спектрографа, а стало быть, и высота призмы h ограничены. В то же время основание $t = 2h \text{ tg}(\alpha/2)$ не может быть сколь угодно большим, так как при $\sin \varphi' > 1/n$ (см. рис. XVI.3) начинается полное внутреннее отражение. Это ограничивает значение угла $\alpha = 2\varphi' \leq 2 \arcsin(1/n) \sim 60^\circ$. Поэтому обычно $t \sim 10 \text{ см}$, и спектральное разрешение призмного спектрографа составляет по порядку величины $R_\lambda \sim 10^4$.

Попутно отметим, что явление дисперсии приводит к так называемой хроматической aberrации объектива — зависимости фокусного расстояния от длины волны света.

Задача 2. Оценить хроматическую aberrацию тонкой линзы.

Используя выражение для фокусного расстояния тонкой линзы, найдем $dF/d\lambda = F(dn/d\lambda)/(n-1)$. Относительное изменение фокусного расстояния $\Delta F/F = \delta n/(n-1)$, где δn — изменение показателя преломления материала линзы по спектру. Обычно в справочниках для оптических стекол приводится величина $(n_D - 1)/(n_F - n_C)$, называемая коэффициентом дисперсии, n_C , n_D , n_F — значения показателя преломления для C (6563\AA), D (5893\AA) и F (4861\AA) линий Фраунгофера — эталонных линий в спектрах известных элементов. Коэффициент дисперсии для оптических стекол порядка 50, т. е. $\Delta F/F \approx 2 \cdot 10^{-2}$.

§ 105. ИНТЕРФЕРОМЕТР ФАБРИ — ПЕРО

Спектроскопический прибор высокого разрешения, интерферометр Фабри — Перо, представляет собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала и относится к оптическим приборам, работающим в режиме полос равного наклона (рис. XVI.4).

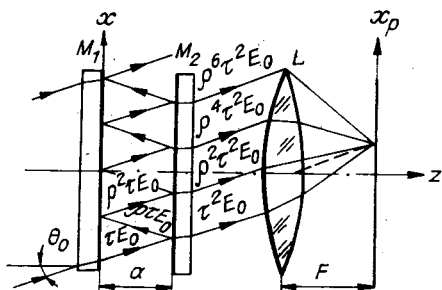


Рис. XVI.4. Схема интерферометра Фабри — Перо.

M_1 , M_2 — полупрозрачные зеркала; L — линза (показан ход луча нижней границы волны и не показаны «второстепенные» лучи, отраженные от «незеркальных» границ, т. е. лучи, уходящие налево).

Проследим за судьбой плоской волны, падающей на интерферометр под углом θ_0 к его оси:

$$E(x, z=0) = E_0 e^{ik_x x} = E_0 e^{ik \sin \theta_0 x}. \quad (105.1)$$

Пусть каждое из зеркал имеет одинаковые покрытия с амплитудными коэффициентами отражения ρ и пропускания τ . Пренебрегая потерями в зеркалах, примем $\rho^2 + \tau^2 = 1$. Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы L . Поэтому первичная волна (105.1) дает поток, который в приближении Фраунгофера есть суперпозиция плоских волн, распространяющихся под всевозможными углами θ . Каждая такая волна, многократно претерпев отражения на зеркалах, поделится на N волн, интерферирующих в точке $x_p = F \operatorname{tg} \theta$ фокальной плоскости объектива. При этом каждая последующая отраженная волна набирает по сравнению с предыдущей дополнительно разность хода вдоль z , равную $\Delta z = 2a$, а амплитуда на каждом отражении падает в ρ раз. Будем считать для простоты, что апертура задана одним из зеркал. Тогда в приближении Фраунгофера поле в точке x_p экрана есть

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N \rho^{2n} \tau^2 \int_0^d E_0(x) e^{i(k_z z_n - k_x x)} dx; \quad (105.2)$$

$$z_n = 2na; \quad k_z = k \cos \theta; \quad k_x = k \sin \theta.$$

Подставляя (105.1), интегрируя по x и затем суммируя геометрическую прогрессию, найдем

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N \rho^{2n} \tau^2 E_0 \frac{e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)} - 1}{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)} \cdot e^{ik \cos \theta \cdot 2na} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} E_0 \tau^2 \frac{e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)} - 1}{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)} \cdot \frac{\rho^{2N} e^{i2Nak \cos \theta} - 1}{\rho^2 e^{i2ak \cos \theta} - 1}.$$

Поскольку $\rho < 1$, а число отражений $N \gg 1$, можно пренебречь членом ρ^{2N} . Вычисляя интенсивность в точке x_p , получим

$$I(x_p) = \frac{c E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F} \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \frac{\tau^4}{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \alpha}; \quad (105.3)$$

$$U = k(\sin \theta_0 - \sin \theta) d/2; \quad \alpha = ka \cos \theta; \quad x_p = F \operatorname{tg} \theta.$$

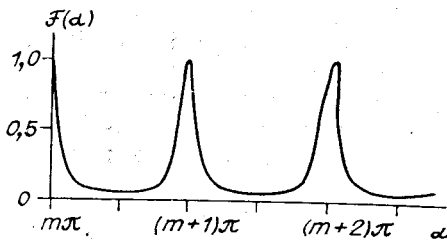


Рис. XVI.5. Функция $\mathcal{F}(\alpha) = (1 + A \sin^2 \alpha)^{-1}$. $A = 19,75$ ($\rho = 0,8$).

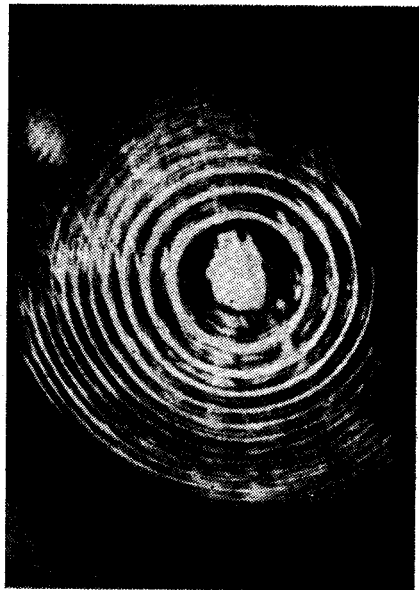


Рис. XVI.6. Интерферограмма, полученная при освещении интерферометра Фабри — Перо светом гелий-неонового лазера.

Обычно апертура интерферометра $d \gg \lambda$, поэтому вклад дифракции мал, а под углом $\theta_{\max} = \theta_0$ наблюдается максимум интенсивности, вокруг которого возникает дифракционное размытие, соответствующее $\Delta U \sim \pi$, или $(\Delta\theta)_{\text{диф}} \sim \lambda/d$. Ниже мы оценим его влияние на интерференционную картину.

Так формируется одна линия, соответствующая данному углу θ_0 первичной волны. Для формирования интерференционной картины интерферометр освещают расходящимся световым потоком, т. е. набором волн с различными θ_0 . Главный максимум образуется волной с $\theta_0 = 0$:

$$I_0 = \frac{cE_0^2 k d^2}{8\pi^2 F}; \quad \alpha_0 = ka = m_0 \pi. \quad (105.4)$$

Если же $\alpha_0 = ka = \pi(m_0 + 1/2)$, то в центре интерференционной картины ($\theta_0 = 0$) возникает минимум интенсивности.

Распределение интенсивности по экрану можно представить в виде

$$I(\theta_0) = \frac{I_0}{1 + A \sin^2 \alpha}; \quad A = \frac{4\rho^2}{(1 - \rho^2)^2}; \quad \alpha = ka \cos \theta_0. \quad (105.5)$$

Соотношения (105.5) носят название формулы Эйри. График функции $\mathcal{F}(\alpha) = (1 + A \sin^2 \alpha)^{-1}$ показан на рис. XVI.5. При больших A , что характерно для интерферометров Фабри — Перо ($\rho \approx 0,8$), эта функция имеет узкие максимумы в точках экрана, для которых

$$\alpha = ka \cos \theta_{0m} = m\pi \leq m_0 \pi. \quad (105.6)$$

Таким образом, порядок максимумов убывает по мере удаления от центра интерференционной картины (сравни задачи в § 100, 101). Для простоты мы провели все вычисления для плоского случая. Ясно, что в аксиально-симметричном случае интерференцированная картина имеет вид концентрических колец (рис. XVI.6).

Расстояние между полосами интерференционной картины найдем из условия (105.6)

$$\delta\theta_m \approx \frac{\pi}{ka \sin \theta_m} = \frac{\lambda}{2a} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 - m^2}}. \quad (105.7)$$

Обычно в интерферометрах Фабри — Перо $d \gg a$, $m_0 \gg 1$, поэтому для $m \leq m_0$ расстояние $\delta\theta_m \gg (\Delta\theta)_{\text{диф}}$. Но, как уже говорилось, сами полосы довольно узкие. Полуширина распределения интенсивности вблизи максимума порядка m определяется соотношением $I(\theta_{0m} + \Delta\theta_{\text{инт}}) = I_{0m}/2$ или из (105.5) $A \sin^2(ka \cos(\theta_{0m} + \Delta\theta_{\text{инт}})) \sim 1$. Отсюда интерференционная полуширина полосы

$$\Delta\theta_{\text{инт}} \sim \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A} \sqrt{m_0^2 - m^2}}; & m < m_0; \\ \sqrt{\frac{2}{m_0 \pi \sqrt{A}}}; & m = m_0. \end{cases} \quad (105.8)$$

Таким образом, влияние дифракции на апертуре несущественно, если $(\Delta\theta)_{\text{диф}} \ll (\Delta\theta)_{\text{инт}}$ или $d \gg \lambda/\Delta\theta_{\text{инт}}$.

Принцип работы интерферометра Фабри — Перо используется в *интерференционных фильтрах*, представляющих собой плоскопараллельную пластинку с отражающими поверхностями. Чаще всего для этого применяют диэлектрические покрытия, нанесенные на стеклянную подложку. Отражения происходят на границах сред с разными коэффициентами преломления (см. (73.15)).

Задача 1. Оценить полосу пропускания интерференционного фильтра с толщиной диэлектрика $a = m\lambda/2$ и показателем преломления n , нанесенного на стекло.

Учитывая, что коэффициенты отражения на границах воздух — диэлектрик и диэлектрик — стекло для $\theta_0 \ll 1$ есть $\rho = (n-1)/(n+1)$ и $\rho_0 = (n-n_0)/(n+n_0)$, аналогично (105.2) — (105.5) получим в фокальной плоскости линзы с фильтром

$$I(\theta_0) = \frac{I_0}{1 + A \sin^2 \alpha}; \quad A = \frac{4(\rho + \rho_0)}{(1 - (\rho + \rho_0)^2)^2}, \quad (105.9)$$

Из условия $I(\theta_0 = 0, k) \sim 2I(\theta_0 = 0, k + \delta k)$ и (105.9) найдем полосу пропускания фильтра $\delta\lambda$:

$$\frac{|\delta k|}{k} = \frac{|\delta\lambda|}{\lambda} \sim \frac{1}{m_0 \pi \sqrt{A}} \frac{1 - (\rho + \rho_0)^2}{2m_0 \pi \sqrt{\rho + \rho_0}}, \quad (105.10)$$

Для покрытия из сернистого цинка ($n = 2,34$) и стекла ($n_0 = 1,5$) однослойный фильтр ($m_0 = 1$) дает $\delta\lambda/\lambda \sim 0,1$. Узкополосные фильтры изготавливают, последовательно напыляя несколько слоев диэлектрика (толщиной $\lambda/2$ каж-

дый) с разными значениями ε . Другим применением этого же принципа является так называемая *просветленная оптика* — объектив с нанесенным на него диэлектрическим покрытием, т. е. фильтр с широкой полосой пропускания и малым коэффициентом отражения на входной границе (см. также задачу 2).

Спектральное разрешение интерферометра Фабри — Перо оценим из условия смещения максимума интерференционной картины для линии $\lambda + \Delta\lambda$ на угол $\Delta\theta_{\text{инт}}$ (105.8). Это смещение найдем из условия (105.6)

$$|\delta\theta_{0m}| = \frac{|\Delta k|}{k} \cdot \frac{\cos \theta_{0m}}{\sin \theta_{0m}} = \frac{|\Delta k|}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ka}{m\pi}\right)^2 - 1}} = \frac{|\Delta k|}{k} \cdot \frac{m}{\sqrt{m_0^2 - m^2}}.$$

Условие $|\delta\theta_{0m}| \sim \Delta\theta_{\text{инт}}$ дает

$$R_\lambda = \frac{k}{|\Delta k|} \sim \sqrt{A} m = m \frac{2\rho}{1 - \rho^2} = m N_{\text{эфф}}, \quad (105.11)$$

где $N_{\text{эфф}} \sim 2\rho/(1 - \rho^2)$ — эффективное число интерферирующих лучей. Для $\rho = 0,9$ величина $N_{\text{эфф}} \approx 20$, и при работе в далеких порядках ($m \sim m_0 \sim 10^5$) $R_\lambda \sim 3 \cdot 10^6$.

Задача 2. Найти ослабление волнового потока интерферометром Фабри — Перо.

Поле и интенсивность в фокусе (цилиндрической) линзы описываются соотношениями (см. § 97)

$$|E(x_p = 0, z = F)| = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} E_0 d; \quad I_F = \frac{ckd^2}{8\pi^2 F} E_0^2,$$

что совпадает с (105.4) — случаем, когда перед линзой помещен интерферометр Фабри — Перо и в центре картины наблюдается главный максимум. Таким образом, в этом случае интерферометр не ослабляет падающую на него волну, если не учитывать отражение от входной и выходной границ подложек его зеркал.

§ 106. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРОМЕТРОВ

В предыдущих разделах рассмотрены четыре оптических прибора, которые широко применяются для спектроскопии: дифракционная решетка, призмный спектрограф, интерферометр Фабри — Перо и интерферометр Майкельсона. Конечно, ими далеко не исчерпывается весь обширный класс спектроскопических устройств, однако они являются основными и наиболее употребительными.

Спектральное разрешение для всех приборов равно произведению порядка максимума m , в котором наблюдается интерференционная картина, на число интерферирующих лучей N (для призмного спектрографа $N = \infty$, $m = 0$). Табл. 1 позволяет сравнить все четыре прибора.

Задача 1. Оценить спектральное разрешение двухлучевых интерферометров.

Из условия смещения максимума интерференционной картины (92.15) для линии $\lambda + \Delta\lambda$ на ширину линии $\Delta x \sim \lambda L/2a$ найдем

$$\delta x = m\Delta\lambda L/a \sim \lambda L/2a, \text{ откуда } R_\lambda \sim 2m. \quad (106.1)$$

Т а б л и ц а 1. Сравнительные характеристики спектроскопических приборов

Прибор	N	m	R	$G, \text{Å}$
Призмный спектрограф	∞	0	$2 \cdot 10^4$	∞
Эшелон Майкельсона	20	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^5$	0,005
Дифракционная решетка	$3 \cdot 10^5$	2—3	$1 \cdot 10^6$	1000
Интерферометр Майкельсона	2	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	0,0005
Интерферометр Фабри — Перо	30	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$	0,0025

Задача 2. Найти спектральное разрешение эшелона Майкельсона (см. § 101).

Из соотношения (101.6) найдем величину сдвига m -го максимума линии $\lambda + \Delta\lambda$: $|\delta\theta| = 2\alpha_m^* |\Delta k| / k^2 d = 2m\pi |\Delta k| / k^2 d$ и (аналогично (100.9)) ширину m -го максимума $\Delta\theta_m = 2\Delta\alpha^* / kd = 2\pi / Nkd$. Как и в предыдущей задаче, условие $|\delta\theta| \sim \Delta\theta_m$ дает

$$R_\lambda \sim mN. \quad (106.2)$$

Область применимости спектральных приборов зависит не только от их размещения. Другой важной характеристикой является область свободной дисперсии $G = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ — интервал длин волн, в котором не перекрываются m -й максимум для длины волны λ_{\max} и $(m+1)$ -й максимум для волны λ_{\min} . Ясно, что именно этот интервал можно свободно анализировать с помощью данного прибора. Для всех рассмотренных спектрометров область свободной дисперсии описывается соотношением

$$G = \lambda / m. \quad (106.3)$$

Задача 3. Найти область свободной дисперсии для а) дифракционной решетки, б) интерферометра Фабри — Перо, в) интерферометра Майкельсона, г) эшелона Майкельсона.

Во всех четырех случаях область свободной дисперсии находится из уравнений

- а) $\alpha(\lambda - G, \theta_m) = (m+1)\pi$, $\alpha(\lambda, \theta_m) = \pi$,
 б) $\alpha(\lambda - G, \theta_{0m}) = (m+1)\pi$, $\alpha(\lambda, \theta_{0m}) = \pi$,
 в) $\delta(\lambda - G, x_m) = (m+1)\pi$, $\delta(\lambda, x_m) = \pi$,
 г) $\alpha^*(\lambda - G, \theta_m) = (m+1)\pi$, $\alpha^*(\lambda, \theta_m) = \pi$,

Из этих уравнений найдем (106.3).

Как правило, высокое спектральное разрешение у приборов сопровождается малой областью свободной дисперсии. Поэтому выбор того или иного прибора для решения спектроскопической задачи определяется конкретными условиями последней. Так, призмные спектрографы обычно используются для записи широких спектров или для выделения с относительно низким разрешением участка широкого спектра, который затем анализируется спектрометром высокого разрешения (рис. XVI.7).

Современные спектрометры часто снабжают регистрирующими устройствами, которые позволяют производить запись спектра непо-

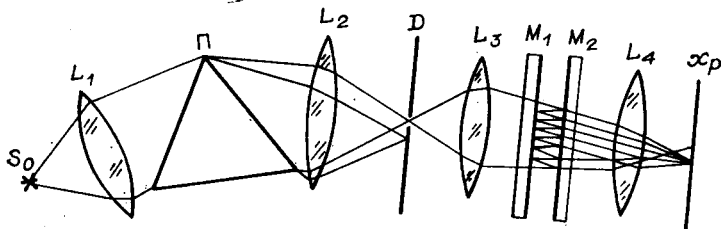


Рис. XVI.7. Спектрометр с высоким разрешением и большой областью свободной дисперсии, состоящий из призмного спектрографа и интерферометра Фабри — Перо.

S_0 — источник, L_1 — L_4 — линзы, П — призма; M_1 , M_2 — зеркала интерферометра Фабри — Перо; D — диафрагма, вырезающая участок спектра; x_p — экран или фотопластинка.

средственно на ЭВМ. Для этого можно, например, использовать ФЭУ со щелью, по которой сканируют спектральную картину, а специальный аналого-цифровой преобразователь (АЦП) переводит сигнал ФЭУ (напряжение, т. е. «аналог») в машинный код (цифровой сигнал). Библиотеки известных спектров хранятся в памяти ЭВМ, и расшифровка спектра исследуемого источника «поручается» ЭВМ. В частности, так работают интерферометры Майкельсона, в которых сканирование по спектру осуществляют изменением размера одного из плеч.

Глава XVII

ГОЛОГРАФИЯ

Голография буквально означает «полное описание» (от греческого «ολοξ» — полный, весь, «γραφω» — описывать, рисовать), и в оптике этим термином называют специальный метод, позволяющий регистрировать и воспроизводить изображение объемных предметов. Принципиальное отличие голографии от фотографии состоит в регистрации полной информации о волне, излучаемой (рассеянной) предметом — ее амплитудах и фазах, тогда как в фотографическом методе регистрации сохраняется информация лишь об амплитуде (регистрируется интенсивность). Иногда голографию называют «безлинзовой фотографией», но такое название неверно отражает сущность метода. К тому же в голографических схемах линзы используются довольно широко.

Предложена голография в 1948 г. английским физиком Габором, но практически она была развита в 60-е годы с появлением мощных когерентных источников света — лазеров. Габор разработал основные принципы голографии, пытаясь решить проблему повы-

шения разрешающей способности электронного микроскопа. Голография возникла не на пустом месте. К моменту появления идей Габора фазовые методы в оптике получили значительное развитие, и можно указать на несколько работ, являющихся прямыми предшественницами голографии. Среди них — фазово-контрастный метод Цернике в микроскопии, оптические фурье-преобразования (опыт Аббе — Портера), цветная фотография Липпмана и другие. В то же время «второе рождение» голографии в 60-х годах началось с работ американских физиков Лейта и Упатниекса, идейной пищей для которых послужило изучение первым из авторов проблем радиолокационных станций с синтезом апертуры (так называемые РЛС бокового обзора). В дальнейшем голографические методы нашли широкое применение в радиолокации высокого разрешения, дав начало развитию нового направления — радиоголографии.

В голографии можно выделить три основных метода: голография Френеля — Лейт и Упатниекс (1962 г.), голография Фурье — Строук и Фальконер (1964 г.), объемная (или «толстая») голография (Денисюк, 1964 г.).

Все рассмотрение во избежание излишней громоздкости проведем в двумерном варианте (x, z).

§ 107. ГОЛОГРАФИЯ ФРЕНЕЛЯ

Поместим рядом с предметом зеркало (рис. XVII.1) и направим на них монохроматический поток света от когерентного опорного источника (лазера). Свет, отраженный предметом и зеркалом, падает на фотопластинку и образует на ее поверхности интерференционную картину. После экспонирования и проявления фотопластинки получается интерферограмма, при освещении которой светом лазера возникает изображение предмета. Такую интерферограмму называют *голограммой*, а вторую операцию — восстановлением изображения.

Принципиальным для голографии Френеля является выбор взаимного расположения фотопластинки и зеркала: свет, отраженный зеркалом, должен падать на фотопластинку под некоторым углом θ .

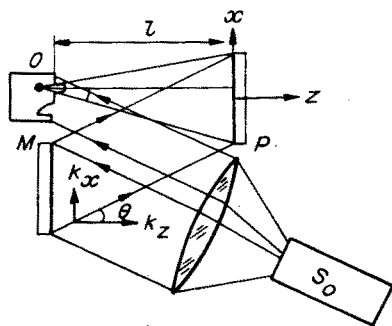


Рис. XVII.1. Схема записи в голографии Френеля.

S_0 — опорный источник (лазер);
 M — зеркало, P — фотопластинка,
 O — объект.

Как мы увидим позже, это позволяет при восстановлении отделить полезный поток, несущий изображение, от фонового.

Пусть свет, отраженный предметом, создает на поверхности фотопластинки волновое поле $E(x)$. Свет, отраженный зеркалом, есть плоская волна $E_0 e^{ikh_0 x} = E_0 e^{ikh_0 x}$. Суммарное волновое поле (общий множитель $e^{i(kz^2 - \omega t)}$ опускаем) есть $E_r(x) = E(x) + E_0 e^{ikh_0 x}$, и квадрат его модуля

$$|E_r|^2 = |E(x)|^2 + E_0^2 + E_0 (E(x) e^{-ikh_0 x} + E^*(x) e^{ikh_0 x}). \quad (107.1)$$

Экспонируя фотопластинку световым потоком этой интенсивности, получим после проявления некоторое «почернение» негатива $\mathcal{D}(x)$. Механизм образования почернения состоит в разложении солей серебра (см. § 63) под действием света и осаждении чистого серебра. Ясно, что плотность почернения должна возрастать по мере роста световой энергии \mathcal{E} , выделившейся в светочувствительном слое. В свою очередь, $\mathcal{E} \propto I \cdot \Delta t$, где I — интенсивность светового потока, Δt — длительность экспозиции. Зависимость $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ для негативных фотоматериалов представляется кривой почернения (Хартер и Дриффилд, 1890 г.), типичный вид которой показан на рис. XVII.2. Кривая имеет три участка: 1 — область «вуали», в которой плотность почернения \mathcal{D} практически не зависит от экспозиции, 3 — область насыщения или на языке фотолюбителей — «область передержек» и, наконец, линейная область 2, где $\mathcal{D} \propto \gamma \lg(I \cdot \Delta t)$. Коэффициент γ — так называемая контрастность фотоматериала. У большинства материалов γ близко к единице. В свою очередь, коэффициент пропускания (прозрачности) негатива τ^2 обратно пропорционален плотности почернения. Поскольку $I \propto E^2$, амплитудный коэффициент пропускания

$$\tau = \kappa |E|^{-\gamma}, \quad (107.2)$$

κ — коэффициент пропорциональности. Подставляя (107.1) в (107.2) и приняв $E_0 \gg E(x)$, получим уравнение голограммы (Габор)

$$\tau(x) \approx \kappa E_0^{-\gamma-2} (2E_0^2 - \gamma |E(x)|^2 - \gamma E_0 (E(x) e^{-ikh_0 x} + E^*(x) e^{ikh_0 x})). \quad (107.3)$$

Оно описывает распределение амплитудной прозрачности по голограмме.

Для восстановления изображения голограмму освещают плоской монохроматической волной амплитуды E_λ (рис. XVII.3). Примем, что длина волны восстанавливающего света та же, что и при регистрации голограммы. Волновое поле за голограммой

$$E'(x) = E_\lambda \tau(x) = E_\phi(x) + A (E(x) e^{-ikh_0 x} + E^*(x) e^{ikh_0 x}). \quad (107.4)$$

В этом выражении явно выделены множители, содержащие информацию о предмете ($E(x)$ и $E^*(x)$), остальные объединены в слагаемое $E_\phi(x)$ — поле, и коэффициент A . Как следует из (107.4), за голограммой возникают две волны, распространяющиеся под углами $\pm \theta$ к оси z (см. рис. XVII.1, XVII.3) и пропорциональные полю

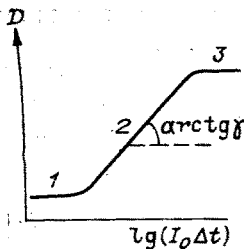


Рис. XVII.2. Кривая почернения фотопленки.

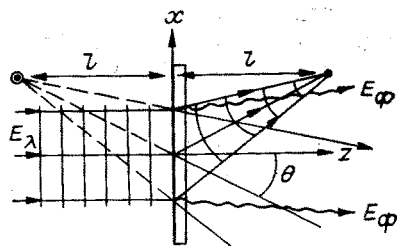


Рис. XVII.3. Восстановление изображения в голографии Френеля.

в волне, рассеянной предметом, $E(x)$ и $E^*(x)$. Для выяснения дальнейшей судьбы восстановленного поля $E'(x)$ следует, вообще говоря, записать соотношения типа интеграла Кирхгофа (98.13) и затем найти положение точек, в которых образуется изображение предмета. Эту процедуру можно значительно упростить, если рассмотреть случай точечного предмета, расположенного на оси z (см. рис. XVII.1). Тогда поле на голограмме (см. (102.4)) $E(x) = E_0 e^{ikx^2/2l}$. При восстановлении изображения получим поле сразу за голограммой

$$E'(x) = E_\phi(x) + AE_0(e^{i\psi(x)} + e^{-i\psi(x)});$$

$$\psi(x) = \frac{kx^2}{2l} - k\theta x = k \frac{(x - \theta l)^2}{2l} - k \frac{\theta^2 l}{2}. \quad (107.5)$$

Два слагаемых в скобках описывают (после домножения на $e^{i(kz - \omega t)}$ и амплитудный множитель) соответственно расходящуюся волну, распространяющуюся под углом $-\theta$ к оси z , и сходящуюся под углом θ . Центры этих волн, очевидно, лежат на расстояниях $\pm l$ от поверхности голограммы и на расстоянии θl от оси z . Они являются соответственно мнимым и действительным изображениями точки-предмета (см. рис. XVII.3). Обобщение результата, полученного для точечного предмета, на предмет конечных размеров (совокупность точек) трудности не представляет.

Подчеркнем одно важное обстоятельство, вытекающее из проведенного рассмотрения; при восстановлении голограммы Френеля слагаемое с $E(x)$ передает мнимое, а с $E^*(x)$ — действительное изображение. Итак, при освещении голограммы возникают действительное и мнимое изображения предмета, смещенные на $(\theta l, \pm l)$ относительно центра голограммы. Поэтому иногда голограмму Френеля представляют в виде эквивалентной схемы линза + призма — первая формирует изображение, а вторая выводит его из фонового потока. Для наблюдателя мнимое изображение хорошо видно сквозь голограмму.

Проведенное обсуждение позволяет выяснить смысл названия схемы — «голография Френеля». По существу, на голограмме записывается интерференция двух потоков — плоского опорного и потока, дифрагированного предметом, причем последний описывается в приближении Френеля (разложение по сферическим волнам).

Задача 1. Рассмотреть восстановление изображения точечного предмета при освещении голограммы Френеля светом с длиной волны λ' .

В выражениях (107.5) следует учесть, что теперь множитель $e^{i(k'z - \omega't)}$ содержит $k' = 2\pi/\lambda'$. Тогда экспоненциальные сомножители в (107.5) можно представить в виде

$$\exp\left\{\pm ik' \left(\frac{x'^2}{2l'} - \theta'x'\right)\right\}, \text{ где } x' = kx/k' = \lambda'x/\lambda; \quad l' = kl/k' = \lambda'l/\lambda.$$

Таким образом, возникает увеличенное изображение, коэффициент увеличения равен λ/λ' .

Задача 2. На голограмме записаны по схеме рис. XVII.1 изображения двух точечных предметов: один расположен на оси z , другой сдвинут на расстояние δ от оси z . Голограмму восстанавливают светом λ' точечного монохроматического источника, расположенного на расстоянии L слева от голограммы. Найти положение изображений.

Примем яркость предметов одинаковой, так что их поля на голограмме

$$E(x) = E \left(e^{ikhx^2/2l} + e^{ik(x-\delta)^2/2l} \right).$$

При восстановлении изображения точечный опорный источник, расположенный в точке $z_\lambda = -L$, $x_\lambda = 0$, создает на поверхности голограммы поле $E_\lambda(x) = E_\lambda \exp\{ik'x^2/2L\}$, так что за голограммой возникает, согласно (107.4), волновое поле

$$\begin{aligned} E'(x) &= E_\Phi(x) + \sum_{n=1}^4 A_n e^{i\psi_n}; \\ \psi_{1,3}(x) &= \frac{k'x^2}{2L} \pm k \left(\frac{x^2}{2l} - \theta x \right); \\ \psi_{2,4}(x) &= \frac{k'x^2}{2L} \pm k \left(\frac{(x-\delta)^2}{2l} - \theta x \right). \end{aligned} \quad (107.6)$$

Поскольку нас интересует положение изображения, а не его яркость, амплитуды A_n можно не анализировать. Преобразуем выражения для фаз к виду

$$\begin{aligned} \psi_{1,3}(x) &= \frac{k'x^2}{2L'} \mp k'\theta'x; \quad \psi_{2,4}(x) = k' \left(\frac{(x-\delta')^2}{2L'} \mp \theta'x \right) \pm k \frac{\delta^2}{l} \cdot \frac{L'}{L}; \\ \frac{1}{L'} &= \frac{1}{L} \pm \frac{k}{k'} \cdot \frac{1}{l}; \quad \theta' = \frac{k}{k'}\theta; \quad \delta' = \pm \frac{k}{k'} \cdot \frac{L'}{l} \delta = \frac{L}{L \pm \frac{\lambda}{\lambda'} l} \cdot \delta. \end{aligned} \quad (107.7)$$

Постоянное слагаемое, содержащее δ^2 в выражении для $\psi_{2,4}(x)$, на положение изображения не влияет, и его можно включить в комплексную амплитуду.

Сравнивая (107.5) и (107.7), заключаем, что изображения точек возникают на расстояниях L_\pm от голограммы, причем одно изображение смещено на $\theta'L'$ от оси z , а второе на $\theta'L' + \delta'$. Обе пары изображений мнимые, если $L' > > 0$, или $L < \lambda l/\lambda'$. Увеличение изображения

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{L}{L \pm \frac{\lambda}{\lambda'} l}. \quad (107.8)$$

Таким образом, при восстановлении в свете точечного источника голограмма эквивалентна оптической схеме, в которой предмет рассматривают через призму (отклонение на угол θ') и линзу с фокусным расстоянием $F_{\text{эвк}} = \pm \lambda l/\lambda'$.

§ 108. ЛИНЗА КАК ФУРЬЕ-АНАЛИЗАТОР

Плоская волна $E(x, z) = E_0 e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)}$ без учета дифракции фокусируется в точку $x_p = k_x f / k_z$ фокальной плоскости линзы. Поле произвольного вида, как мы знаем, можно разложить по плоским волнам

$$E(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_{k_x} e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} dk_x.$$

Пропустив эту волну через линзу, получим в этом приближении в ее фокальной плоскости поле, напряженность которого $E(x_p) \propto \int E_{k_x} dk_x$, $x_p = k_x f / k_z$, т. е. поле в фокальной плоскости пропорционально фурье-образу исходного поля. Таким образом, линза производит фурье-преобразование поля $E(x, z)$ в пространстве поперечных волновых чисел k_x . Влияние дифракции можно учесть при помощи интеграла Кирхгофа. При прохождении через тонкую линзу волна $E(x)$ приобретает фазовый сдвиг в соответствии с (102.3), так что в плоскости 2 (рис. XVII.4), опуская постоянные фазовые множители, получим

$$E_2(x) = E(x) e^{-ik_x^2/2f}. \quad (108.1)$$

Поле на экране x_p согласно (98.13)

$$E_3(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i l}} \int E_2(x) e^{i\left(kl - \omega t + k \frac{(x-x_p)^2}{2l}\right)} dx.$$

Подставляя сюда (108.1) и преобразуя показатель экспоненты, при $l = f$ запишем:

$$E_f(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i f}} \cdot e^{i\left(kf - \omega t + \frac{kx_p^2}{2f}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) e^{ikh_x x/f} dx. \quad (108.2)$$

Интеграл берется по апертуре линзы, которая много больше λ , поэтому пределы можно принять равными бесконечности. Поскольку $kx_p/f = k_x$, напряженность $E_f(x_p)$ пропорциональна фурье-компоненте поля $E(x)$ по волновым числам k_x .

Действие линзы как фурье-преобразователя убедительно демонстрирует опыт Аббе — Портера (Аббе, 1873 г., Портер, 1906 г.), состоящий в следующем. С помощью объектива на экран проектируют изображение проволочной сетки (рис. XVII.5, а). В фокальной плоскости объектива фурье-образ

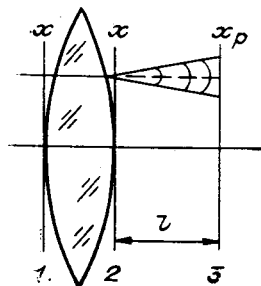


Рис. XVII.4. К расчету фурье-преобразования с помощью тонкой линзы.

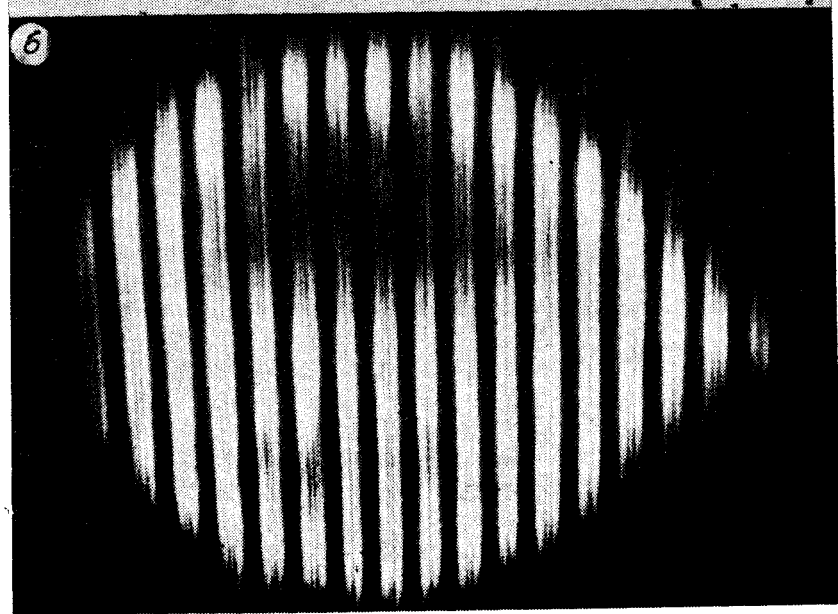
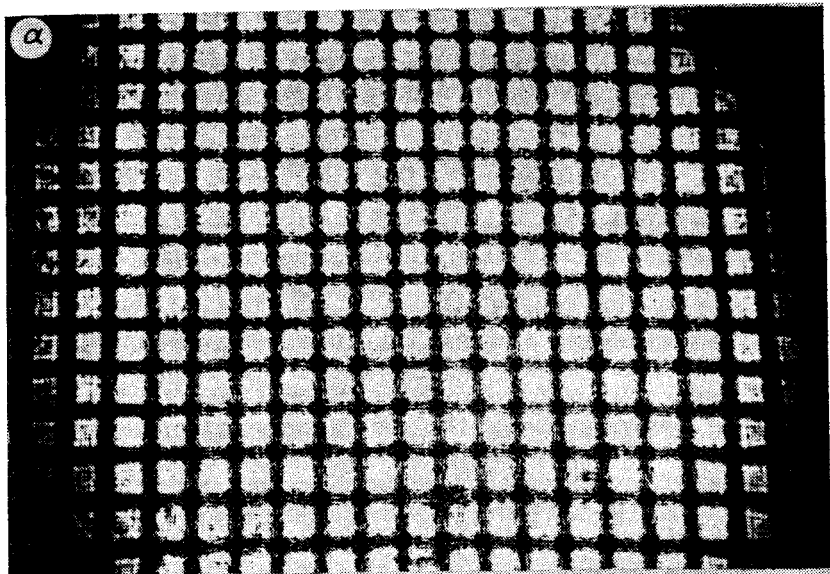


Рис. XVII.5. Опыт Аббе — Портера.

а — изображение решетки, *б* — изображение той же решетки, «отфильтрованной» горизонтальной щелью.

решетки имеет вид набора максимумов, как при дифракции на двумерной решетке (см. рис. XV. 19). Если же в фокальной плоскости поместить, например, горизонтальную щель, которая «срежет» все максимумы, кроме расположенных вдоль щели, то на экране оста-

нется изображение только... *вертикальных* проволок сетки (см. рис. XVII.5, б).

Опыт Аббе — Портера положил начало целому направлению в оптике — оптической фильтрации (§ 112).

§ 109. ГОЛОГРАФИЯ ФУРЬЕ

Рассмотрим вначале вариант голографии Фурье, в котором используется линза (рис. XVII.6). В ее передней фокальной плоскости располагают предмет и точечный источник, а фотопластинку помещают в заднюю фокальную плоскость. Примем, что передний фокус линзы совпадает с точкой, где находится опорный источник. На рис. XVII.6, а показан вариант схемы для записи голограммы непрозрачного предмета, когда свет лазера падает на предмет и зеркало, отклоняющее свет так, что освещается точечное отверстие S_0 . Рис. XVII.6, б поясняет действие схемы на примере точечного предмета: за линзой образуются две плоские волны — одна от предмета, другая от опорного источника, они интерферируют, образуя на фотопластинке интерференционную картину, как в схеме Юнга.

В общем случае протяженного предмета поле на фотопластинке найдем, воспользовавшись интегралом Кирхгофа. Перед линзой в плоскости x_L

$$E(x_L, z=f) = \sqrt{\frac{k}{2\pi if}} \int_{\sigma} E(x) e^{ik(x-x_L)^2/2f} dx + E_0(x_L) \equiv \equiv E_1(x_L) + E_0(x_L). \quad (109.1)$$

Здесь $E(x)$ — поле волны на поверхности предмета, $E_1(x_L)$ — поле волны, отраженное предметом, интеграл берется по поверхности предмета σ , а $E_0(x_L)$ — поле опорного источника. Последнее преоб-

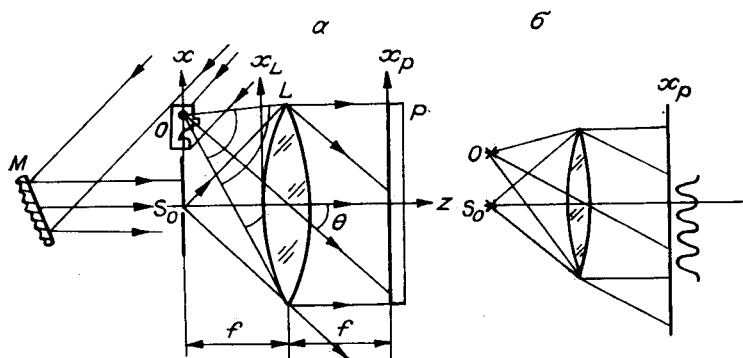
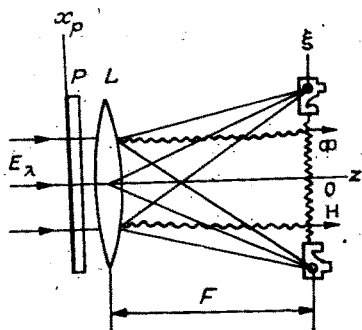


Рис. XVII.6. Схема записи голограммы непрозрачного предмета (а) и ее эквивалентная схема (б).

M — зеркало, S_0 — отверстие в непрозрачном экране, O — предмет, L — линза, P — фотопластинка.

Рис. XVII.7. Схема восстановления изображения в голографии Фурье.



разуется линзой в плоскую волну, амплитуду которой обозначим E_0 . Множитель $e^{i(kf-\omega t)}$ можно опустить, так как в конечном счете он дает только некоторый общий фазовый сдвиг в поле восстановленной волны, что не влияет на формирование изображения. Поле волны от предмета преобразуется в соответствии с (108.2), и в плоскости фотопластины получим

$$E_r(x_p) = \frac{k}{2\pi i f} e^{i(2kf-\omega t + \frac{kx_p^2}{2f})} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_L) e^{-ikx_p x_L / f} dx_L + E_0 e^{i(kf-\omega t)} \equiv (E_2(x_p) + E_0) e^{i(kf-\omega t)}. \quad (109.2)$$

Вычисляя распределение интенсивности по фотопластинке и амплитудное пропускание $\tau(x_p)$, аналогично (107.3) в приближении $E_0 \gg E_1$ найдем

$$\tau(x_p) \approx \kappa E_0^{-\nu-2} \{2E_0^2 - \gamma |E_2(x_p)|^2 - \gamma E_0 [E_2(x_p) + E_2^*(x_p)]\}. \quad (109.3)$$

Таким образом, голограмма содержит запись фурье-образа поля $E(x)$, рассеянного предметом. Поэтому при восстановлении изображения неизбежна операция обратного фурье-преобразования, а соответствующая оптическая схема (рис. XVII.7) состоит из голограммы, освещаемой плоской монохроматической волной E_λ , и объектива, в фокальной плоскости которого и возникает восстановленное изображение. Рассмотрим это подробнее.

Поле в фокальной плоскости объектива L согласно (108.2)

$$E(\xi) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} e^{ik\xi^2/2F} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x_p) E_\lambda e^{-ik\xi x_p / F} dx_p. \quad (109.4)$$

Подставляя сюда (109.3), (109.2), (109.1) и переобозначая коэффициенты, найдем

$$E(\xi) = E_\Phi(\xi) + A e^{ik\xi^2/2F} \int \int \int dx_p dx_L dx [E_1(x) e^{ik\psi_1} + E^*(x) e^{ik\psi_2}]; \quad (109.5)$$

$$\psi_{1,2} = -\frac{\xi x_p}{F} \pm \left(\frac{x_p^2}{2f} - \frac{x_p x_L}{f} + \frac{(x - x_L)^2}{2f} \right).$$

Дополним $\psi_{1,2}$ до полного квадрата по x_L :

$$\psi_{1,2} = -\frac{\xi x_p}{F} \pm \left[\frac{(x_L - x_p - x)^2}{2f} - \frac{x x_p}{f} \right] \quad (109.6)$$

и проинтегрируем по x_L . Вспомнив значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha^2} d\alpha = (1+i)\sqrt{\pi/2}$ и включив появляющиеся при интегрировании коэффициенты в A , получим

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E_\Phi(\xi) + A e^{ik\xi^2/2F} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx_p \left[E(x) e^{ih\left(\frac{\xi}{F} + \frac{x}{f}\right)x_p} + \right. \\ &\quad \left. + E^*(x) e^{-ih\left(\frac{\xi}{F} - \frac{x}{f}\right)x_p} \right] = \\ &= E_\Phi(\xi) + B \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[E(x) \cdot \delta\left(\frac{\xi}{F} + \frac{x}{f}\right) + E^*(x) \cdot \delta\left(\frac{\xi}{F} - \frac{x}{f}\right) \right] e^{ik\xi^2/2F} = \\ &= E_\Phi(\xi) + B \left[E\left(x = -\frac{f}{F}\xi\right) + E^*\left(x = \frac{f}{F}\xi\right) \right] e^{ik\xi^2/2F}. \quad (109.7) \end{aligned}$$

Таким образом, в точках экрана $\xi = -Fx/f$ возникает волновое поле $E(x)$ — такое же, как на поверхности предмета, а в точках $\xi = Fx/f$ — комплексно сопряженное с ним поле $E^*(x)$. Что это означает, проще всего понять, выбрав в качестве предмета точку с координатой x_0 . Тогда $E(x) = E$ — действительная функция, а в точках $\xi = \pm Fx_0/f$ получим изображения точки x_0 . Обобщая этот результат на протяженный предмет, приходим к выводу, что по обе стороны от оси z возникают два симметричных изображения предмета (см. рис. XVII.7). Линейное увеличение изображений $V = \xi/x_0 = \pm F/f$. Фазовый множитель $e^{ik\xi^2/2F}$ в (109.7) вклада в интенсивность не дает. Его действие эквивалентно действию рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F , однако «линза» вплотную приставлена к экрану, т. е. не дает увеличения. Константа B — яркостный коэффициент: интенсивность поля в точке-изображении в $|B|^2$ раз больше, чем в точке-предмете.

Применение линзы при записи фурье-голограммы необязательно (рис. XVII.8 и задачи 1—3).

Задача 1. Получить уравнение голограммы по схеме записи, показанной на рис. XVII.8 ($l \gg x$).

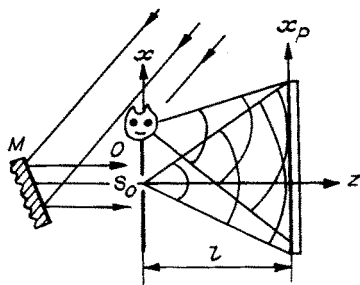
Поле на поверхности голограммы запишем в виде

$$\begin{aligned} E_r(x_p) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i l}} \int_{\sigma} E(x) e^{ih(x-x_p)^2/2l} dx + E_0 e^{ihx_p^2/2l} = \\ &= E_1(x_p) + E_0(x_p), \end{aligned}$$

где $E_1(x_p)$ — поле волны, рассеянной предметом, $E_0(x_p)$ — поле волны точечного опорного источника. Тогда уравнение голограммы имеет вид

$$\tau(x_p) = \kappa |E_r|^{-\gamma} \approx \kappa E_0^{-\gamma-2} \{ 2 |E_0(x_p)|^2 - \gamma |E_1(x_p)|^2 - \gamma (E_0^* E_1 + E_0 E_1^*) \}. \quad (109.8)$$

Рис. XVII.8. Схема записи в безлинзовой голографии Фурье.



Задача 2. Восстановить изображение голограммы (109.8), используя схему рис. XVII.7.

В этом случае

$$E(\xi) = E_{\Phi}(\xi) + A e^{i k \xi^2 / 2 F} \int_{-\infty}^{\infty} dx_p dx [E(x) e^{i k \psi_1} + E^*(x) e^{i k \psi_2}];$$

$$\psi_{1,2} = -\frac{\xi x_p}{F} \mp \left(\frac{x_p^2}{2l} - \frac{(x - x_p)^2}{2l} \right) = -\frac{\xi x_p}{F} \mp \left(\frac{x x_p}{l} - \frac{x^2}{2l} \right).$$

Интегрируя по переменной x_p , получим

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E_{\Phi}(\xi) + B e^{i k \xi^2 / 2 F} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[E(x) e^{i k x^2 / 2 l} \delta\left(\frac{\xi}{F} + \frac{x}{l}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E^*(x) e^{-i k x^2 / 2 l} \delta\left(\frac{\xi}{F} - \frac{x}{l}\right) \right] = \\ &= E_{\Phi}(\xi) + B e^{i k \xi^2 / 2 F} \left[E(x_1) e^{i k x_1^2 / 2 l} + E^*(x_2) e^{-i k x_2^2 / 2 l} \right]; \\ x_{1,2} &= \mp l \xi / F. \end{aligned}$$

Этот результат аналогичен (109.7): в точках $\xi = \pm Fx/l$ возникают изображения точки x предмета.

Задача 3. При восстановлении голограммы в задаче 2 используется источник с длиной волны λ' . Как изменится восстановленное изображение?

В соотношениях, описывающих выше процесс восстановления, нужно в выражениях для восстанавливающей волны заменить k на k' . В результате аналогичных вычислений получим

$$x_{1,2} = \mp \frac{k'}{k} \cdot \frac{l}{F} \xi, \text{ или } \xi = \pm \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{F}{l} x, \quad (109.9)$$

т. е. линейное увеличение изображения возрастает в λ'/λ раз.

Безлинзовая голография позволяет осуществить запись голограмм вне оптического диапазона (рентген, СВЧ, акустические волны) с восстановлением изображения в видимом свете (см. § 113).

Необходимость применения точечного источника в голографии Фурье естественно приводит к трудностям, связанным с ограниченностью его яркости. Оказывается, что требование точности источника можно снять, если в качестве опорного использовать источник, удовлетворяющий некоторым специальным требованиям.

§ 110. ОБЪЕМНАЯ ГОЛОГРАФИЯ

До сих пор мы рассматривали схемы голографии, в которых изображение записывалось в тонком эмульсионном слое фотопластинки, а влияние толщины голограммы не учитывалось. Как мы увидим в § 111, конечная толщина голограммы в этих схемах создает определенные трудности. Принципиально иначе обстоит дело в объемной голографии, где изображение записывается по всей глубине толстого светочувствительного слоя специальной фотопластинки.

При записи объемной голограммы (рис. XVII.9) предмет и зеркало освещаются монохроматическим светом и располагаются так, чтобы отраженные ими потоки падали на светочувствительный слой фотопластинки с двух сторон, навстречу друг другу. Волновое поле

$$E_r(x, z) = E_0 e^{-ikz} + E(x) e^{ikz}, \quad (110.1)$$

возникающее в эмульсии, образует во всем объеме систему интерференционных волн (слоев), E_0 — амплитуда опорной волны, падающей навстречу оси z . Теперь необходимо учесть зависимость и от координаты z (отметим, что в (110.1) и ниже опущен общий фазовый множитель, соответствующий постоянной разности оптических путей интерферирующих потоков).

На рис. XVII.10 показаны два варианта расположения предмета и источника при записи объемной голограммы.

При проявлении фотопластинки в эмульсии образуются слои повышенной плотности серебра, которые определяют не только прозрачность голограммы, но и ее способность отражать свет. Как и прежде, вычислив распределение интенсивности потока (110.1)

$$|E_r(x, z)|^2 = E_0^2 + |E(x)|^2 + E_0(E(x)e^{2ikz} + E^*(x)e^{-2ikz}), \quad (110.2)$$

найдем коэффициент амплитудного пропускания эмульсии. Однако если в тонких голограммах соотношения (107.3), (109.3) носили интегральный характер, описывая амплитудное пропускание всей толщи эмульсионного слоя, то в толстослойной эмульсии аналогичное выражение следует применять к элементарному слою толщины dz :

$$\frac{d\tau(x, z)}{dz} \approx \kappa E_0^{-\gamma-2} [2E_0^2 - \gamma |E(x)|^2 - \gamma E_0 (E(x)e^{2ikz} + E^*(x)e^{-2ikz})]. \quad (110.3)$$

Восстановление изображения производится как в проходящем, так и в отраженном свете. Поэтому кроме объемного коэффициента пропускания необходимо знать и коэффициент отражения. Пренебрегая потерями энергии, можно принять

$$\tau^2 + \rho^2 = 1, \text{ или } \frac{d\rho}{dz} = -\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \cdot \frac{d\tau}{dz}. \quad (110.4)$$

В приближении $E_0 \gg E(x)$ множитель перед $d\tau/dz$ в (110.4) — мед-

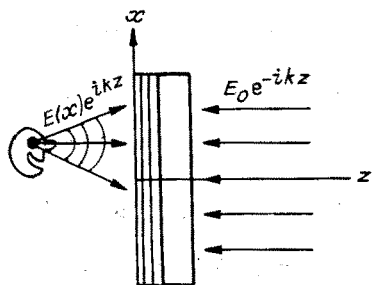


Рис. XVII.9. Схема записи в объемной голографии (зеркало не показано).

ленная функция координат. Кроме того, амплитудное пропускание проявленной фотопластинки можно считать близким к единице. Поэтому

$$\frac{d\rho}{dz} \approx \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_0 + A (E(x) e^{2ikz} + E^*(x) e^{-2ikz}). \quad (110.5)$$

Для восстановления изображения направим на голограмму со стороны эмульсии плоскую волну белого света под углом θ к оси z :

$$E_w = \int_{-\infty}^{\infty} E_{k'} e^{i(k'z + k'\theta x)} dk'; \quad k_x = k'\theta \ll k'. \quad (110.6)$$

Слой dz на глубине z отражает элементарную плоскую (немонохроматическую!) волну

$$dE_p(x, z) = \frac{d\rho(x, z)}{dz} \cdot E_w(x, z); \quad \tau \approx 1. \quad (110.7)$$

На поверхность голограммы ($z = 0$) эта волна придет с дополнительным сдвигом фазы $k'z$ (сдвиг фазы положительный, так как и Δz и k' меняют знак). Полная отраженная волна описывается интегралом по глубине эмульсионного слоя $d \gg \lambda'$:

$$E_p = \int_0^d \frac{d\rho}{dz} E_w e^{ik'z} dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{d\rho}{dz} E_{k'} e^{i(k'z + k'\theta x)}.$$

Подставляя сюда (110.5) и производя интегрирование по z , придем

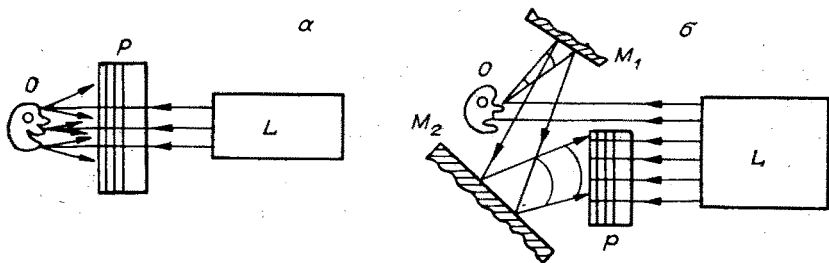


Рис. XVII.10. Варианты расположения предмета и источника при записи объемной голограммы.

α — запись «сввоз» фотопластинку; β — разводка света с помощью зеркал; L — источник (лазер), P — фотопластинка, O — объект; M_1, M_2 — зеркала.

к выражению, содержащему δ -функции по волновым числам:

$$E_p(x) = E_{\text{фон}} + A \int dk' E_k \mathcal{F}(x, k, k');$$

$$\mathcal{F}(x, k, k') = E(x) e^{ik'\theta x} \delta(k' + k) + E^*(x) e^{ik'\theta x} \delta(k' - k);$$

откуда

$$E_p(x) = E_{\text{фон}} + A[E_{-k}E(x)e^{-ik\theta x} + E_kE^*(x)e^{ik\theta x}]. \quad (110.8)$$

Отметим, что появление здесь δ -функции — результат интегрирования по интервалу $d \rightarrow \infty$, что физически соответствует интерференции бесконечного числа волн, отраженных голограммой. Данное выражение описывает волновое поле на поверхности голограммы ($z = 0$). Конечно, этот результат является приближенным, поскольку вместо более точного вычисления интеграла Кирхгофа по x , z мы ограничились интегрированием по толщине эмульсии d .

Для выяснения положения и характера изображения воспользуемся тем же приемом, что и в § 107 — рассмотрим точечный предмет

$$E(x) = Ee^{ikx^2/2l}.$$

Тогда поле на поверхности голограммы (110.8) будет содержать составляющие

$$Ee^{ikx^2/2l - ik\theta x} \quad \text{и} \quad Ee^{-ikx^2/2l + ik\theta x},$$

которые описывают две волны — одну, расходящуюся под углом $-\theta$ к оси z (вниз, $k_x = -k\theta < 0$), и другую, сходящуюся под углом θ к оси z (рис. XVII.11). Как и в голографии Френеля, на расстоянии $\pm l$ от поверхности голограммы возникнут мнимое (за голограммой) и действительное изображения предмета. Однако теперь схема принципиально отличается тем, что восстановление производится в *белом* свете. Голограмма работает как интерференционный фильтр, отбирая из спектра свет с длиной волны, на которой была сделана запись.

Аналогия с интерференционным фильтром станет полной, если записать на голограмме «изображение» плоской волны. В этом случае (см. рис. XVII.9 и (110.1)) слои повышенной плотности, т. е. максимумы интенсивности, представляют собой плоскости, отстоящие друг от друга на $\lambda/2$. При восстановлении волна, отраженная n -й плоскостью, приходит на поверхность голограмм со сдвигом фазы $2k'n(\lambda/2) = 2\pi n$ при $\lambda' = \lambda$.

Записывая голограмму в трех базисных цветах (см. § 61, 62), получают при восстановлении цветное объемное изображение предмета.

Данная схема восстановления изображения не удобна тем, что мнимое изображение накладывается на восстанавливаемое поле E_x . Этого можно избежать, осветив голограмму со стороны (прозрачной!) подложки (рис. XVII.12). В этом случае, вычисляя волновое

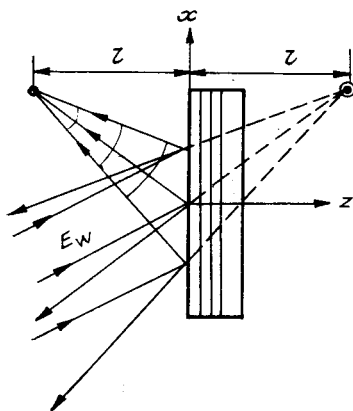


Рис. VII.11. Схема восстановления изображения в объемной голографии.

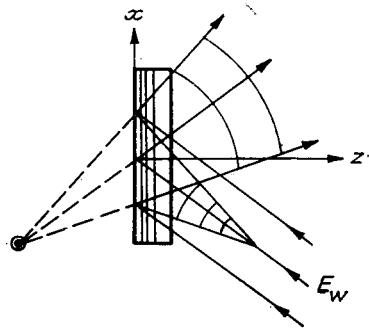


Рис. XVII.12. Восстановление изображения в объемной голографии при освещении со стороны подложки.

поле отраженного потока в плоскости $z = d$, найдем по аналогии с (110.8).

$$E_{\rho}(z = d) = \int_0^d \frac{d\rho}{dz} E_w e^{ik'(d-z)} dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{d\rho}{dz} E_{k'} e^{i(2k'(d-z) + k'\theta x)} =$$

$$= E_{\text{фон}} + A[E_k E(x) e^{ik\theta x} + E_{-k} E^*(x) e^{-ik\theta x}].$$

Таким образом, мнимое изображение возникает за голограммой, вне восстанавливающего потока, а действительное накладывается на восстанавливающий поток перед голограммой.

§ 111. ПРОБЛЕМЫ ФОТОГРАФИИ В ГОЛОГРАФИИ

Курьезное на первый взгляд название параграфа тем не менее точно отражает суть проблемы: в голографии существуют значительные трудности, связанные с качеством фотографических материалов и их обработки. И первая из них — ограничение линейной разрешающей способности голограмм.

В голографии Френеля при записи изображения точечного (линейного) предмета, расположенного на оси z (см. рис. XVII.1), получается голограмма, интерференционные полосы которой имеют максимум почернения в точках $x = x_m$ таких, что (см. (107.5)), $(kx_m^2/2l) - k\theta x_m = 2\pi m$, откуда

$$x_m = \theta l \pm \sqrt{(\theta l)^2 + 2m\lambda l}. \quad (111.1)$$

Используя это условие, можно прежде всего найти требование к разрешению фотоматериала. Полосы будут разрешены, если фото-

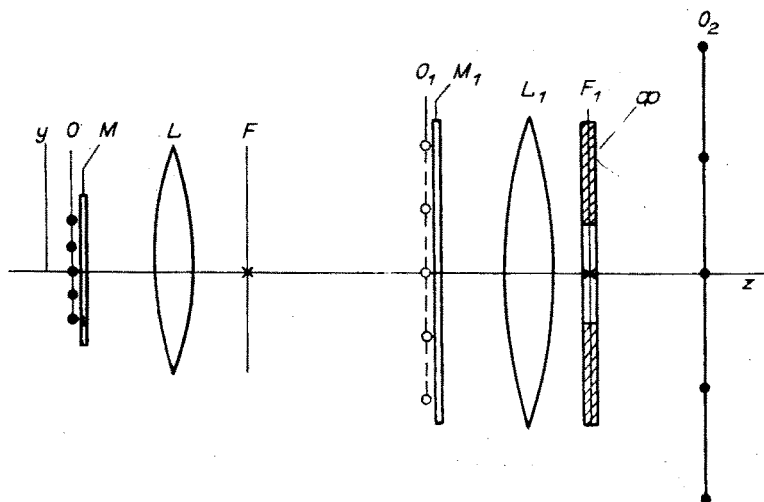


Рис. XVII.13. Схема повышения разрешающей способности объектива. O — предмет; M, M_1 — «синусоидальные» маски; L, L_1 — основная и вспомогательная линзы; F, F_1 — их фокусы; O_1 — промежуточное изображение; Φ — щелевой фильтр; O_2 — изображение.

пластинка обеспечивает линейное разрешение N линий/мм:

$$\frac{1}{N} < \sqrt{(\theta l)^2 + 2(m+1)\lambda l} - \sqrt{(\theta l)^2 + 2m\lambda l} \approx$$

$$\approx \frac{\lambda l}{\sqrt{(\theta l)^2 + 2m\lambda l}} \sim \frac{\lambda l}{x_m}; \quad (111.2)$$

или

$$N > D/\lambda \geq \theta/\lambda,$$

где D — апертура голограммы. При угле $\theta \sim 10^\circ$ требуется $N > 300$ линий/мм.

Теперь найдем разрешение собственно голограммы при сколь угодно большом N . Для этого «запишем» изображение двух точечных предметов, отстоящих на расстоянии δ один от другого, причем первый из них по-прежнему расположен на оси z (см. рис. XVII.13). Аналогично (111.1) получим

$$\frac{kx_m^2}{2l} - k\theta x_m = 2\pi m; \quad \frac{k(x_m + \delta)^2}{2l} - k\theta x_m = 2\pi m'. \quad (111.3)$$

Изображения предметов будут разрешены, если (см. § 104)

$$\delta \geq \frac{\lambda l}{2x_m} \sim \frac{\lambda}{D}. \quad (111.4)$$

Таким образом, размер голограммы Френеля определяет ее разрешение. Отметим, что формула (111.4) в точности повторяет результат для разрешения объектива с фокусным расстоянием l и апертурой D .

В голографии Фурье характер интерференционной картины иной. В этом случае при записи точечного (линейного) предмета интерференционная картина на голограмме (см. § 109) аналогична картине, возникающей в схеме Юнга, и уравнение голограммы (109.3) содержит слагаемые (E_2 и E_2^*) вида

$$\tau_3(x_p) = Ce^{-ikh_0 x_p/f}; \quad \tau_4(x_p) = \tau_3^*(x_p), \quad (111.5)$$

где C — некоторая константа. Положение максимумов полос почернения находим из условия $kx_0 x_p/f = 2\pi m$, или $x_0 x_p = m\lambda f$. Требование к разрешению фотоматериала имеет вид

$$N \geq \frac{1}{x_p^{(m+1)} - x_p^{(m)}} = \frac{x_0}{\lambda f} \equiv \frac{\theta}{\lambda}, \quad (111.6)$$

что совпадает с (111.2), так как $x_0/f = \theta$ — угол пересечения с осью луча, проходящего через центр линзы (см. рис. XVII.6).

Разрешение голограммы Фурье найдем аналогично предыдущему случаю:

$$\delta_{\min} \approx \frac{\lambda f}{2x_0} = \frac{\lambda}{2\theta}. \quad (111.7)$$

Этот результат означает, что в отличие от голограмм Френеля разрешение голограммы Фурье не зависит от ее размера (апертуры).

Голограммы Фурье обладают еще одним интересным отличием: если разрешение фотоматериала N не удовлетворяет условию (111.6) для данной точки x_0 , то ее изображение не записывается на голограмме, так как соответствующие полосы сливаются. Это означает, что разрешение N ограничивает поле зрения голограммы Фурье, т. е. размер предмета. Разрешение же самой голограммы от N , как мы видели, не зависит. Поэтому голографию Фурье иногда называют голографией высокого разрешения.

Существенное влияние на качество изображения оказывает однородность фотоматериала. Представим себе, что проявленная после записи голограмма кроме «законной» плотности почернения обладает еще некоторым «незаконным» распределением прозрачности по фотопластинке. Это означает, что в уравнении голограммы появляется фазовый множитель

$$e^{i\varphi(x_p)}; \quad \varphi(x_p) = k[(n(x) - 1)d(x) + d(0)], \quad (111.8)$$

где n , d — показатель преломления и толщина пластинки (сравни (102.5)). Такие фазовые сдвиги приводят к искажению изображения.

Задача. Голограмма Френеля записана на фотопластинке, которая после проявления приобрела из-за неравномерности усадки эмульсии переменную толщину, так что $d(x) = d(0) + (x^2/2R)$. Как такое искажение влияет на изображение точечного предмета x_0 , записанного на голограмме?

Поле восстановленной волны

$$E'(x) = E_\Phi(x) + Ae^{i\varphi(x)} [E(x)e^{-ikh_0 x} + E^*(x)e^{ikh_0 x}];$$

$$E(x) = Ee^{ikh(x-x_0)^2/2l}$$

Отсюда, переобозначив константы, получим

$$E'(x) = E_{\Phi}(x) + A(e^{i\psi_1} + e^{i\psi_2});$$

$$\Psi_{1,2}(x) = k \left(\frac{(n-1)x^2}{2R} \pm \frac{(x-x_0)^2}{2l} \mp \theta x \right) = k \left(\frac{(x-Ux_0)^2}{2L} \mp \theta x \pm \frac{(n-1)x_0^2 L}{Rl} \right);$$

$$\frac{1}{L} = \frac{n-1}{R} \pm \frac{1}{l}; \quad U = \pm \frac{L}{l}.$$

Структура фазовых множителей в выражении для $E'(x)$ показывает, что прогиб эмульсии с постоянным радиусом кривизны R действует как дополнительная линза, в данном случае дефокусирующая, с фокусным расстоянием $(n-1)/R$. В результате оба изображения могут, вообще говоря, стать мнимыми. Параметр U дает увеличение изображения.

§ 112. ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Опыт Аббе — Портера как пример оптической фильтрации описан в § 108. Оптическая фильтрация позволяет также улучшить разрешение оптической системы и качество изображения. Ее можно использовать в системах оптической обработки информации. В этом параграфе мы разберем еще три примера, иллюстрирующих существование метода.

Пример первый. Фотография предмета выполнена в условиях сильного снегопада. Можно ли «убрать» изображение падающего снега с фотографии?

Предположим для простоты, что снежинки падают с некоторым периодом по вертикальной координате x . На негативе присутствует помеха («шум») с периодом l_x :

$$I_{\text{ш}} \propto e^{i\alpha_x x}, \quad \alpha_x = 2\pi/l_x.$$

Вместе с полезным «сигналом» E_c (изображением предмета) этот «шум» определяет амплитудное пропускание негатива $\tau(x) \propto (E_c^2(x) + E_{\text{ш}}^2(x))^{-\nu/2}$. Процедура «очистки» выглядит следующим образом. Отпечатываем наш негатив контактным способом на другой фотопластинке. После проявления получим

$$\tau'(x) \propto [\tau^2(x)]^{-\nu'/2} \propto [E_c^2 + E_{\text{ш}}^2]^{\nu\nu'/2} \approx E_c^2 + E_{\text{ш}}^2,$$

поскольку при проявлении можно подобрать контрастность негативов так, что $\nu\nu' \approx 2$. Промежуточный негатив («позитив») с прозрачностью $\tau'(x)$ осветим плоской монохроматической волной E_0 и поместим за ним линзу. Тогда в ее фокальной плоскости монохроматическое шумовое слагаемое даст точку (линию), которую можно убрать с помощью непрозрачного экрана — мы отфильтруем пространственные частоты снега. Затем, поместив в плоскости изображения фотопластинку, получим изображение, очищенное от шума. При этом, конечно, убираются те же частоты и изображения, что приводит к его искажению. Поэтому метод применим, если спектры волновых чисел предмета и шума не перекрываются значительно.

Второй пример — микроскоп Цернике (1935 г.), позволяющий повысить контрастность прозрачных предметов, рассматриваемых в микроскоп.

Если прозрачность предмета близка к единице, то он в основном влияет на изменение фазы проходящей волны, причем за предметом

$$E(x) = E_0 e^{i\varphi(x)} \approx E_0 (1 + i\varphi(x)); \quad \varphi(x) \ll 1. \quad (112.1)$$

В плоскости изображения с учетом линейного увеличения интенсивность волнового поля

$$|E'(x')|^2 = \frac{E_0^2}{U^2} |1 + i\varphi(x)|^2 = \frac{E_0^2}{U^2} (1 + \varphi^2) \approx \frac{E_0^2}{U^2}. \quad (112.2)$$

Таким образом, прозрачный предмет просто неразличим (эффект порядка φ^2), если $\tau = 1$. Ситуацию можно изменить, поместив в фокусе объектива L_1 (см. рис. XV.24) четвертьволновую пластинку, сдвигающую фазу проходящей волны на $(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (оптическая длина пути возрастает на $n\lambda/2 + \lambda/4$). Через фокус проходит преимущественно свет, недифрагированный структурой предмета, т. е. фон. Внося сдвиг фаз в фоновую компоненту, получим в плоскости изображения

$$\begin{aligned} |E'(x')|^2 &= \frac{E_0^2}{U^2} |e^{i(2n+1)\pi/2} + i\varphi(x)|^2 = \frac{E_0^2}{U^2} ((-1)^n + \varphi(x))^2 \approx \\ &\approx E_0^2 (1 \pm \varphi(x)) / U^2. \end{aligned} \quad (112.3)$$

Знак «+» соответствует четным n , «-» нечетным. В итоге изображение становится контрастным, его яркость промодулирована (линейно) функцией, пропорциональной оптической плотности предмета.

Третий пример — повышение разрешения линзы по одному направлению за счет другого [2].

Будем считать для простоты, что линза имеет квадратную апертуру со стороной D . Пусть пространственный спектр предмета имеет разную ширину по обоим направлениям: $\Delta k_x > \Delta k_y$ (рис. XVII.14, а), поскольку по каждому направлению линза пропускает полосу частот (см. (102.12))

$$\Delta k_D = \frac{2k}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{D}\right)^2}}, \quad (112.4)$$

где a — расстояние от предмета до линзы, $k = 2\pi/\lambda$, и размер предмета считается много меньшим a . В случае $\Delta k_D < \Delta k_x$ линза дает искаженное изображение предмета, «обрезая» высокие частоты по x . Если при этом $\Delta k_D > \Delta k_y$, то незанятую часть полосы пропускания по y можно использовать для передачи срезанной части спектра по x . Для этого нужно только трансформировать спектр предмета.

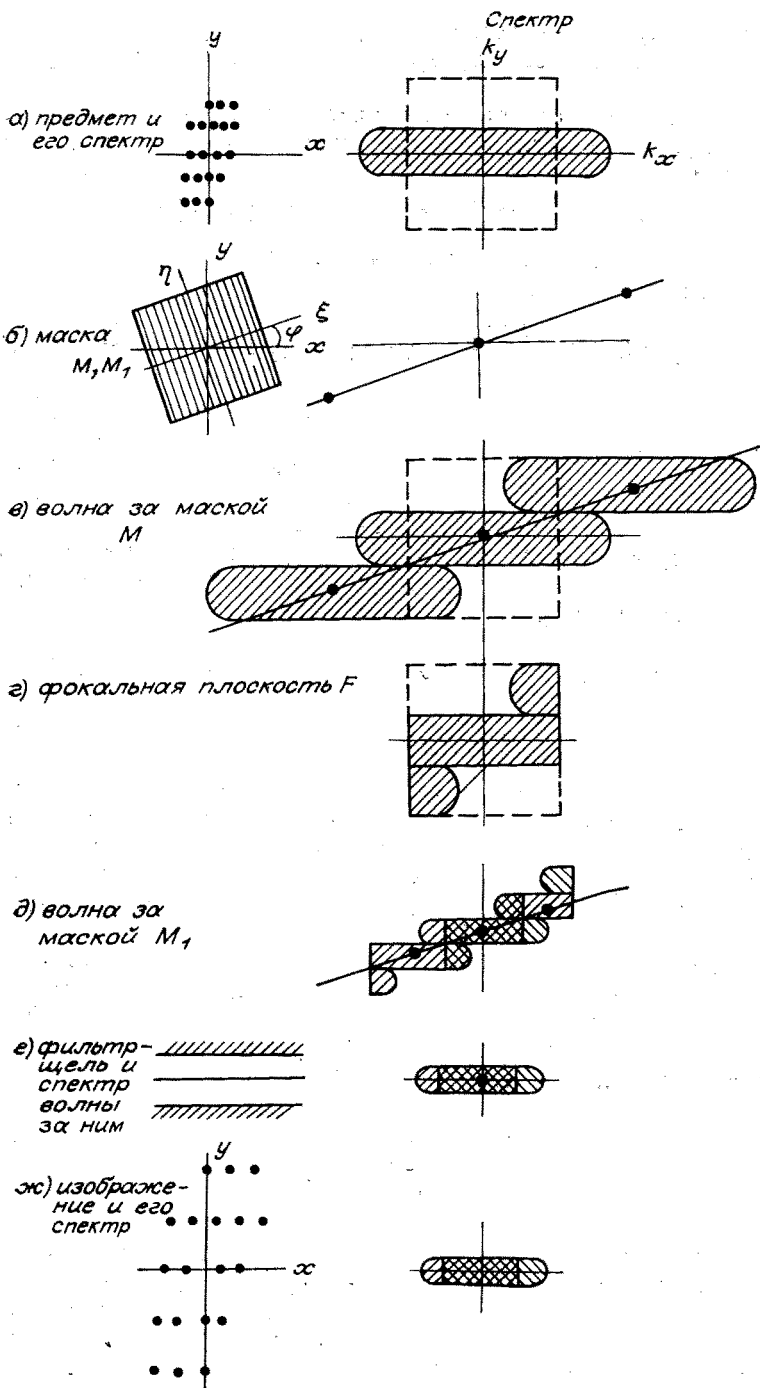


Рис. XVII.14. Повышение разрешающей способности линзы по одной степени свободы за счет другой.

Для этого поместим сразу за предметом O (см. рис. XVII.13) маску M_1 , амплитудное пропускание которой меняется по некоторому направлению ξ на поверхности маски по закону

$$\tau(\xi) = A + B \cos(\alpha\xi) = A + \frac{B}{2}(e^{i\alpha\xi} + e^{-i\alpha\xi}) \quad (112.5)$$

и не зависит от координаты η , перпендикулярной ξ . Такая маска представляет собой разновидность дифракционной решетки. Если направить по нормали к ней плоскую монохроматическую волну, то за маской, в фокальной плоскости линзы L возникнут три точки — фокусы с координатами $\xi_f = 0, \pm\alpha f/k$ и $\eta_f = 0$. Это есть не что иное, как фурье-образ функции (112.5). Пусть ось ξ составляет угол φ с осью x . Тогда координаты фокусов в плоскости F $x_f = \xi_f \cos \varphi$, $y_f = \xi_f \sin \varphi$ (см. рис. XVII.14, б). Посмотрим, как такая маска преобразует спектр волны $E(x, y)$, испускаемой предметом. За маской поле волны

$$E_m(x, y) = \tau(\xi_\varphi)E(x, y); \quad \xi_\varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi. \quad (112.6)$$

Спектр этой функции состоит из трех частей:

$$E_m(k) = AE_0(k) + \frac{B}{2}(E_1(k) + E_2(k)),$$

$$E_{1,2}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{\pm i\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (112.7)$$

Здесь $E_0(k)$ — исходный спектр волны $E(x, y)$, а спектры $E_{1,2}(k)$ отличаются от него тем, что в них произведена замена

$$k_x \rightarrow k_x \pm \alpha \cos \varphi; \quad k_y \rightarrow k_y \pm \alpha \sin \varphi. \quad (112.8)$$

Это означает, что полный спектр волны, пропущенной маской, имеет вид, показанный на рис. XVII.14, в для случая, когда $\alpha \sin \varphi = \Delta k_y$. Ясно, что такая же картина возникла бы и в фокальной плоскости линзы L , если бы последняя имела достаточно большую апертуру. Линза, однако, обрезает спектр по x ; картина в фокальной плоскости изображена на рисунке XVII.14, г. Теперь спектр волны несет полную информацию о предмете, но он деформирован, так что изображение в плоскости O_1 , сопряженной с плоскостью предмета, сильно искажено. Нужно придать спектру исходный вид (см. рис. XVII.14, а). Для этого сразу за плоскостью промежуточного изображения поставим вторую маску M_2 , которая проделает со спектром волны такое же преобразование, как и маска M_1 , в результате чего спектр примет вид, показанный на рис. XVII.14, д. Далее с помощью фильтра-щели, помещенного в фокальной плоскости линзы L_1 (см. рис. XVII.13), срезаем «лишние» части промежуточного спектра и в плоскости O_2 получаем неискаженное изображение предмета. Заметим, что фильтр-щель можно поместить и непосредственно рядом с линзой L_1 , уменьшив тем самым ее вертикальную апертуру. Существенно, что линза L_1 может обладать и меньшей апертурой, чем линза L , поскольку ширина спектра про-

межуточного изображения зависит от его увеличения (в плоскости O_1) в силу сохранения фазового объема светового пучка (см. § 91). Именно такая ситуация и приведена на рис. XVII.14, δ , где коэффициент увеличения линзы L больше единицы. Ширина спектра окончательного изображения может быть любой в зависимости от увеличения линзы L_1 . По этой схеме можно увеличить разрешение по оси x максимум в три раза (см. рис. XVII.14, ϵ).

Отметим, что описанный метод работает только в том случае если в спектре предмета действительно нет больших частот k_y (рис. XVII.14, a). В противном случае окончательное изображение будет искажено этими частотами (рис. XVII.14, ϵ).

§ 113. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГОЛОГРАФИИ

Довольно безнадежное занятие — пытаться дать хотя бы перечисление всех возможных применений голографии — одного из самых «горячих» направлений современной когерентной оптики. Поэтому поговорим о некоторых из них, наиболее, на наш взгляд, важных.

Объемная фотография является очевидным и «естественным» применением голографии. Особенно привлекательным здесь представляется использование объемной голографии, позволяющей восстанавливать объемные цветные изображения в белом свете. По-видимому, на этом направлении можно ожидать в недалеком будущем успехов в создании голографического кинематографа. Сейчас голографическое кино, ограниченное необходимостью использования когерентного освещения, находит применение в основном в научных исследованиях.

Голографическая микроскопия послужила отправным толчком к созданию самой голографии. В оптических микроскопах большое увеличение и высокое разрешение приводят к малой глубине резкости. Одно из возможных решений состоит в голографировании объекта и восстановлении изображения по схеме рис. XVII.15 (см. также § 107, задача 2). Увеличенное изображение можно рассматривать уже с меньшим разрешением и соответственно с большей глубиной резкости.

Голографическая интерферометрия открывает совершенно новые возможности в изучении физических процессов. Основное ее применение связано с так называемой интерферометрией с двойной экспозицией. Оказывается, что голография позволяет осуществить интерференцию двух (или нескольких) волн в разное время. Для этого изображения двух объектов, разнесенных во времени, записываются последовательно на одну и ту же фотопластинку по одной из голографических схем. В результате на фотопластинке, например, в схеме голографии Френеля, фиксируется сумма интенсивностей

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x); \quad I_{1,2}(x) = A_{1,2} |E_0 + E_{1,2}(x)|^2, \quad (113.1)$$

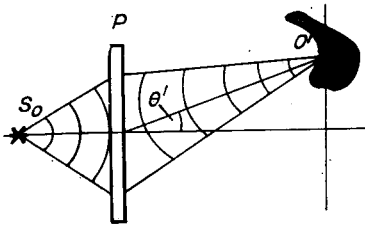


Рис. XVII.15. Схема голографического микроскопа (восстановление изображения).

S_0 — точечный монохроматический источник; P — голограмма, O — изображение; θ' — см. (107.7).

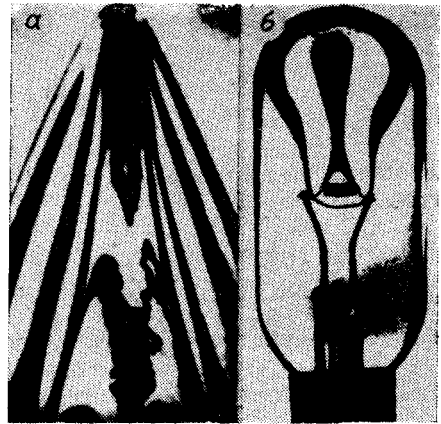


Рис. XVII.16. Голограммы, полученные методом двойной экспозиции.

а — пуля, летящая в воздухе со сверхзвуковой скоростью; б — конвекционные потоки в лампе накаливания.

где $E_{1,2}$ — поля, рассеянные соответственно первым и вторым предметами, E_0 — опорная волна. Суммарная интенсивность

$$I(x) = (A_1 + A_2)|E_0|^2 + A_1|E_1|^2 + A_2|E_2|^2 + E_0^*(A_1E_1(x) + A_2E_2(x)) + E_0(A_1E_1^*(x) + A_2E_2^*(x)) \quad (113.2)$$

содержит сумму полей E_1, E_2 (и комплексно-сопряженную сумму). В результате восстановленное изображение дает картину интерференции этих полей. На рис. XVII.16 приведены полученные методом двойной экспозиции голограммы летящей пули и лампы накаливания. Первая экспозиция произведена с невозмущенной средой (пули нет, лампа выключена), вторая — с действующим объектом. Интерференция света, прошедшего через невозмущенную среду в первом случае и через возмущенную во втором, дает картину распределения плотности среды при действии объекта. На голограмме пули, скорость которой больше скорости звука, отчетливо видны «черенковские» конусы (см. § 71).

Анализ вибраций методом голографии удобнее также объяснить на схеме Френеля. Пусть объект-точка колеблется с амплитудой δ вдоль направления оси z (см. рис. XVII.1). В случае малых колебаний ($\delta \ll l$) амплитуда поля $|E(x)|_{\max}$ практически не изменится, а в фазе появится зависящий от времени сдвиг $\Delta\varphi(t) = k\Delta z(t) = k\delta \cos \Omega t$. Соответственно интенсивность волны, падающей на фотопластинку, будет содержать множители

$$E(x)e^{i\delta k \cos \Omega t}; \quad E^*(x)e^{-i\delta k \cos \Omega t}. \quad (113.3)$$

Если время экспозиции $\tau \gg 1/\Omega$, то амплитудное пропускание голограммы будет описываться выражением вида (107.3), где вместо $E(x)$ и $E^*(x)$ появятся функции (113.3), усредненные по времени

экспозиции:

$$\overline{e^{i\Delta\varphi(t)}}^\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{ik\delta \cos \Omega t} dt. \quad (113.4)$$

Экспонента под интегралом может быть представлена в виде ряда Фурье [3]:

$$e^{ik\delta \cos \Omega t} = J_0(k\delta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(k\delta) \cos(m\Omega t),$$

где $J_m(x)$ — функции Бесселя. Отсюда

$$\overline{e^{i\Delta\varphi(t)}}^\tau = J_0(k\delta).$$

Повторив процедуру восстановления изображения, обнаружим, что амплитуда волны, несущей действительное и мнимое изображения, пропорциональна $J_0(k\delta)$, т. е. зависит от амплитуды вибраций. Соответственно изображение будет покрыто полосами, яркость которых является функцией δ в каждой данной точке (рис. XVII.17).

Применения голографии не исчерпываются оптическим диапазоном. Возможно создание микроскопа в рентгеновском диапазоне. Для этого нужно записывать изображение в рентгеновском излучении по схеме безлинзовой голографии, а восстанавливать в видимом свете, выигрывая в увеличении в отношении длин волн (см. § 107, задачи 1, 2).

В диапазоне радиоволн появилось новое направление — *радиоголография* (§ 130).

Наконец, голографические методы нашли применение и для других волн. В геофизике развивается *акустическая голография* (рис. XVII.18), в которой для записи изображения используется система акустических приемников с преобразованием акустическо-

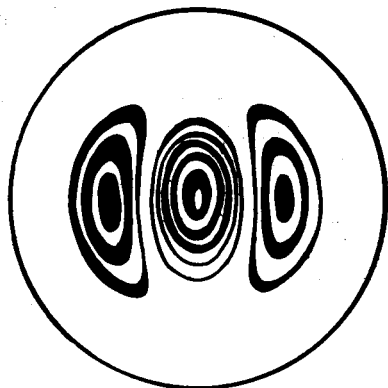


Рис. XVII.17. Голограмма колеблющейся диафрагмы.

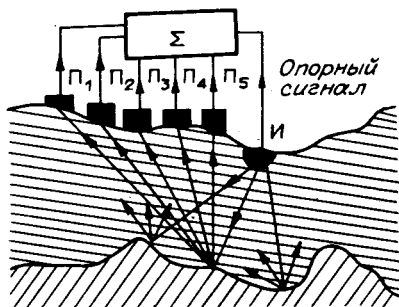


Рис. XVII.18. Схема записи голограммы в акустическом диапазоне. $\Pi_1 - \Pi_5$ — приемники, И — вибратор, Σ — анализатор.

го сигнала в электрический. Последний интерферирует с опорным сигналом, а результат воспроизводится на экране электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) и фотографируется. Полученную голограмму восстанавливают оптическим способом.

Глава XVIII

РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

До сих пор при описании электромагнитного поля в различных ситуациях мы, как правило, ограничивались лабораторной системой отсчета. Задача релятивистской теории — дать описание физических явлений, справедливое в любой инерциальной системе. В частности, если речь идет об электродинамике, мы обязаны сформулировать ее основные соотношения в релятивистски-инвариантной форме, адекватной принципу относительности, который утверждает, что все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах.

В настоящей главе будет дана релятивистски-инвариантная формулировка электродинамики для полей в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$). Релятивистская электродинамика движущихся сред выходит за рамки данного курса.

§ 114. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Потенциалы A , φ описываются неоднородными волновыми уравнениями (см. § 67)

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (114.1)$$

если они удовлетворяют лоренцевской калибровке

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (114.2)$$

Поскольку правые части уравнений (114.1) образуют 4-вектор тока $j_n = (\mathbf{j}, ic\rho)$ (см. (20.7)), то левые части также представляют собой некоторый 4-вектор. С другой стороны, дифференциальный оператор

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad (114.3)$$

где $x_n = (r_n, ict)$ — 4-вектор события, является релятивистски-инва-

риантным. Поэтому величины A, φ также образуют 4-вектор *потенциала*

$$A_n = (A, i\varphi). \quad (114.4)$$

Уравнения (114.1) можно записать тогда в явно релятивистски-инвариантном виде

$$\square A_k = -\frac{4\pi}{c} j_k, \quad (114.5)$$

где \square — сокращенное обозначение оператора (114.3), который называется *оператором Д'Аламбера*.

Аналогично можно в релятивистски-инвариантной форме записать условие калибровки Лоренца $\partial A_k / \partial x_k = 0$ и уравнение непрерывности (закон сохранения электрического заряда (§ 20)) $\partial j_k / \partial x_k = 0$. Оба уравнения имеют одинаковый вид — равенство нулю четырехмерной дивергенции соответствующего 4-вектора.

§ 115. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Поля и потенциалы связаны соотношениями (63.2), (63.3) через дифференциальные операторы, причем компоненты магнитного поля выражаются через производные пространственной части 4-вектора $(A, i\varphi)$ по пространственным координатам

$$H_\alpha = \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}, \quad (115.1)$$

а компоненты электрического поля — через производные пространственной части A_α по временным координатам и временной части A_4 по пространственным координатам

$$iE_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\alpha}. \quad (115.2)$$

Условимся греческим индексам приписывать значения 1, 2, 3, а латинским 1, 2, 3, 4.

Компоненты поля образуют *тензор электромагнитного поля*

$$F_{lh} = \frac{\partial A_h}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_h}, \quad (115.3)$$

который можно записать в виде матрицы

$$F_{lh} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (115.4)$$

Тензор поля является антисимметричным: $F_{kl} = -F_{lk}$.

Для того чтобы найти закон преобразования компонент поля F_{lh} при переходе из одной системы отсчета в другую, удобно записать

преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора

$$G_h = \alpha_{hl} G'_l \quad (115.5)$$

с помощью матрицы

$$(\alpha_{hl}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{V}{c}; \quad (115.6)$$

V — скорость движения системы (A'_l, j'_l) относительно системы (A_h, j_h) . В соотношениях (115.5) и ниже знак суммы опущен, и считается, что при повторении индексов подразумевается суммирование. Матрицу обратного преобразования получим, сменив знак скорости V . Отметим, что $\text{Det}(\alpha_{hl}) = 1$, а элементы прямой (α) и обратной (α^{-1}) матриц связаны соотношениями $\alpha_{hl} = \alpha_{lh}^{-1}$.

Чтобы получить закон преобразования тензора поля (115.3), найдем вначале преобразование дифференциального оператора $\partial/\partial x_k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l} \cdot \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l} \alpha_{lp}^{-1} \frac{\partial x_p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l} \alpha_{lp}^{-1} \delta_{pk} = \frac{\partial}{\partial x'_l} \alpha_{lk}^{-1} = \alpha_{kl} \frac{\partial}{\partial x'_l}. \quad (115.7)$$

Последнее выражение показывает, что дифференциальный оператор $\partial/\partial x_k$ преобразуется так же, как и любой другой 4-вектор. Отсюда

$$F_{lk} = \alpha_{lp} F'_{pq} \alpha_{qk}^{-1} = \alpha_{lp} \alpha_{hq} F'_{pq}. \quad (115.8)$$

Расписав компоненты тензора F_{lk} через напряженности полей (115.4), найдем из (115.8) в явном виде преобразования Лоренца для электромагнитного поля

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z); & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y); \\ H_x &= H'_x; & H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z); & H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y). \end{aligned} \quad (115.9)$$

Из этих соотношений видно, что при переходе из одной системы в другую сохраняются неизменными продольные компоненты поля, а поперечные преобразуются. Вводя векторы

$$\mathbf{E}_{\parallel} = e_x E_x; \quad \mathbf{E}_{\perp} = e_y E_y + e_z E_z; \quad \mathbf{H}_{\parallel} = e_x H_x; \quad \mathbf{H}_{\perp} = e_y H_y + e_z H_z,$$

где e_a — орты, можно (115.9) представить в компактном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}'_{\parallel}; & \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}')); \\ \mathbf{H}_{\parallel} &= \mathbf{H}'_{\parallel}; & \mathbf{H}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{H}'_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})). \end{aligned} \quad (115.10)$$

Здесь мы использовали соотношения $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}_{\perp} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}$.

Для нерелятивистских скоростей $\beta \ll 1$ получаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}']$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}' - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}']$. Первое выражение есть не что иное, как сила Лоренца для единичного заряда (заряд покоится в «нестрихованной» системе, отсюда знак минус), а второе следует из

уравнений Максвелла для \mathbf{H} . В § 29 эти результаты получены другим путем — через преобразование силы.

Из соотношений (115.10) нетрудно получить одно важное следствие: если в какой-либо системе магнитное поле равно нулю, то в другой системе поля взаимно ортогональны и связаны между собой равенством

$$\mathbf{H} = \beta \times \mathbf{E}, \quad (115.11)$$

где β — скорость движения системы, в которой $\mathbf{H}' = 0$. В частности, это означает, что у системы зарядов, движущихся с одинаковой скоростью (например, пучок или ступок заряженных частиц), электрическое и магнитное поля удовлетворяют уравнению (115.11).

Аналогично, если $\mathbf{E}' = 0$, то $\mathbf{E} = -\beta \times \mathbf{H}$. Последнее справедливо, например, для движущегося сверхпроводника с током (в системе, где сверхпроводник покоится, $\mathbf{E}' = 0$).

Задача. Проверить справедливость соотношения (115.11) для случая однородного цилиндрического пучка заряженных частиц, движущихся с одинаковой скоростью β .

Если I — ток пучка, a — радиус сечения, то \mathbf{E} имеет только радиальную компоненту

$$E_r = \frac{2I}{\beta c} \times \begin{cases} r/a^2, & r \leq a, \\ 1/r, & r > a, \end{cases}$$

а \mathbf{H} — только азимутальную компоненту

$$H_\varphi = \frac{2I}{cr} \times \begin{cases} r/a^2, & r \leq a, \\ 1/r, & r > a. \end{cases}$$

Отсюда $H_\varphi = \beta E_r$.

§ 116. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в вакууме (см. § 45):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (116.1)$$

В отсутствие зарядов и токов уравнения собственно электромагнитного поля антисимметричны относительно замены полей, т. е. сохраняют свой вид при $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$. Эта симметрия «потеряна» в выражении для тензора поля (115.4). Чтобы восстановить ее, введем *дуальный тензор поля*

$$\tilde{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{E}_z & -\tilde{E}_y & i\tilde{H}_x \\ -\tilde{E}_z & 0 & \tilde{E}_x & i\tilde{H}_y \\ -\tilde{E}_y & -\tilde{E}_x & 0 & i\tilde{H}_z \\ -i\tilde{H}_x & -i\tilde{H}_y & -i\tilde{H}_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (116.2)$$

который связан с тензором (115.4) соотношениями

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{H}; \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{E}. \quad (116.3)$$

Дуальный тензор можно представить также в виде

$$\tilde{F}_{ik} = \frac{i}{2} e_{ikmn} F_{mn}, \quad (116.4)$$

где введен полностью антисимметричный единичный тензор четвертого ранга, элементы которого равны ± 1 или 0 и меняют знак при перестановке двух любых индексов. По определению $e_{1234} = +1$, а все элементы с (по крайней мере двумя) совпадающими индексами равны нулю.

Из компонент тензора электромагнитного поля F_{ik} (115.4) и дуального тензора \tilde{F}_{ik} (116.2) можно образовать два скаляра (инварианта):

$$\begin{aligned} F_{ik} F_{ik} &= 2(H^2 - E^2) = \text{Inv}; \\ F_{ik} \tilde{F}_{ik} &= 2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \text{Inv}. \end{aligned} \quad (116.5)$$

Оказывается, что других независимых инвариантов нет.

Существование инвариантов поля позволяет сделать общие заключения о свойствах электромагнитного поля по отношению к преобразованиям Лоренца.

1. Первый инвариант поля указывает на существование двух классов полей:

$$\begin{aligned} E^2 - H^2 &= \text{Inv} > 0; \\ E^2 - H^2 &= \text{Inv} < 0. \end{aligned} \quad (116.6)$$

Для первого класса в любой системе электрическое поле больше магнитного и, в частности, ни в одной системе не обращается в нуль. Для второго класса те же утверждения справедливы для \mathbf{H} . Выврожденным является случай

$$E^2 - H^2 = \text{Inv} = 0; \quad E = H, \quad (116.7)$$

когда в любой системе электрическое и магнитное поля равны друг другу. Такое разделение полей на два класса естественно в специальной теории относительности и аналогично существованию времениподобных и пространственноподобных интервалов.

2. Если в какой-либо системе электрическое и магнитное поля взаимно ортогональны ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$), так что $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$, то это имеет место в любой системе. В частности, таким свойством обладают поля, рассмотренные в задаче § 115.

3. Если второй инвариант поля равен нулю, то можно найти систему, в которой существует только одна «половина» электромагнитного поля, \mathbf{E} или \mathbf{H} , а вторая обращается в нуль, какая именно — зависит от знака первого инварианта (см. § 57). Важный частный случай равенства нулю обоих инвариантов соответствует электромагнитному полю плоской волны: $E = H, \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

Задача. Найти скорость системы, в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$.

В качестве направления искомой скорости выберем прямую, перпендикулярную плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} . Тогда, используя преобразования поля, из условия параллельности \mathbf{E}' , \mathbf{H}' найдем

$$0 = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp} = (\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp})(1 + \beta^2) - \beta(E_{\perp}^2 + H_{\perp}^2).$$

Отсюда

$$\frac{\beta}{1 + \beta^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2 + H^2}.$$

В штрихованной системе \mathbf{E}' , \mathbf{H}' параллельны, поэтому во всякой системе, движущейся вдоль направления этих векторов, они остаются параллельными.

Используя тензоры (115.4) и (116.2), можно записать уравнения Максвелла в релятивистски-инвариантном и симметричном виде. Для этого в первой паре уравнений (116.1) перейдем к дуальному полю. В результате получим

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0; \quad \text{div } \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (116.8)$$

В таком виде эти выражения совпадают по форме со второй парой уравнений (116.1) (без источников поля). Полную систему уравнений Максвелла можно представить теперь в простой, релятивистски-инвариантной форме

$$\frac{\partial \tilde{F}_{lh}}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial F_{lh}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_l. \quad (116.9)$$

С учетом источников поля дуальная симметрия поля нарушается. Уравнения Максвелла содержат плотность электрического заряда и тока. В то же время магнитные заряды и соответствующие им магнитные токи отсутствуют. Это является отражением того экспериментального факта, что в природе не существуют, по крайней мере до сих пор не обнаружены, частицы, обладающие магнитным зарядом. Вместе с тем существование таких зарядов — магнитных монополей — не противоречит уравнениям Максвелла, где им заготовлены места в первой паре уравнений (116.1), (116.9). Если ввести 4-вектор магнитного тока $(j_{\mu})_k = (\mathbf{j}_{\mu}, ic\rho_{\mu})$, то уравнения для дуального поля принимают вид

$$\frac{\partial \tilde{F}_{lh}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} (j_{\mu})_k,$$

и симметрия восстанавливается.

Гипотеза о существовании магнитного монополя была высказана еще в 1931 г. английским физиком Дираком (поэтому его называют также монополем Дирака). Из квантово-механических соображений (см. задачу 5, § 118) магнитный заряд монополя может иметь значения

$$g = \frac{\hbar c}{2e} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Поскольку $\hbar c/e^2 = 137$, минимальный заряд монополя $g_1 = 137e/2$.

Во внешних полях на монополю действует сила, аналогичная силе Лоренца $\mathbf{F} = g\mathbf{H} - g(\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c$. В магнитном поле напряженностью 1 Гс на пути в 1 см эта сила сообщает монополю энергию 20,5 кэВ. Магнитный заряд — сильноионизирующая частица, так как собственное магнитное поле монополя при его движении создает в лабораторной системе электрическое поле, которое и вызывает ионизацию среды.

Попытки обнаружения монополя можно грубо разделить на два класса:

1) поиски стабильных монополей, которые должны накапливаться в древних породах;

2) регистрация монополей, рожденных в реакциях с участием элементарных частиц высокой энергии.

К экспериментам 1-го класса относятся поиски монополей в древних породах, извлеченных со дна северной части Атлантического океана (возраст по геологическим данным 16 млн. лет). Образцы породы помещались в соленоид, в нем создавалось сильное импульсное магнитное поле, призванное вырвать монополи из образца. Как и любые ионизирующие частицы, «вырванные» монополи можно зарегистрировать каким-либо из детекторов элементарных частиц. Факт отсутствия монополей позволил, исходя из размеров образца и возраста породы, оценить их поток из Вселенной: $\Phi < 4 \cdot 10^{-18} \text{ см}^{-2}/\text{ср}^{-1} \text{ с}^{-1}$ и плотность монополей в земных породах: менее 1 монополя на 4000 м^3 . Подобные эксперименты были проведены и с образцами грунта, доставленными с Луны экипажем «Аполлона-11». Их результат $\Phi < 10^{-20} \text{ см}^{-2}/\text{ср}^{-1} \text{ с}^{-1}$, что составляет менее 1 монополя за секунду на поверхность, равную земной.

В экспериментах 2-го класса делались попытки улавливания монополей, рожденных в реакциях взаимодействия релятивистских протонов с ядрами: $p + A \rightarrow p + A + g^+ + g^-$. Все проведенные до сих пор эксперименты не дали пока положительных результатов.

§ 117. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Энергетическими характеристиками электромагнитного поля являются плотность энергии и плотность потока энергии (см. § 55):

$$w = \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2); \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (117.1)$$

Величины \mathbf{S} , w не образуют, однако, 4-вектор, хотя они и похожи на 4-вектор тока и даже удовлетворяют уравнению непрерывности (см. § 55) $\text{div } \mathbf{S} + \partial w / \partial t = 0$, которое выражает закон сохранения энергии. Существенное отличие состоит в том, что электрический заряд есть инвариант, а энергия является четвертой компонентой вектора энергии-импульса. Поэтому наряду с плотностью и потоком энергии существуют плотности и потоки трех компонент импульса поля, а величины \mathbf{S} , w являются компонентами некоторого 4-тензо-

ра, квадратичного по напряженностям полей. Такой тензор можно записать в виде

$$\tau_{lm} = \frac{1}{8\pi} F_{lk} F_{mk}. \quad (117.2)$$

Однако его элемент $\tau_{44} = -E^2/8$ содержит только часть полной плотности энергии. Это связано с несимметрией тензора F_{lk} (115.4) относительно замены E на H . Поэтому тензор энергии-импульса электромагнитного поля нужно взять в виде суммы тензора τ_{lm} и дуального к нему тензора $\tilde{\tau}_{lm} = \tilde{F}_{lk} \tilde{F}_{mk}/8\pi$:

$$T_{lm} = \frac{1}{8\pi} (F_{lk} F_{mk} + \tilde{F}_{lk} \tilde{F}_{mk}). \quad (117.3)$$

Тогда $T_{44} = -(E^2 + H^2)/8\pi = -w$ дает правильное значение плотности энергии. Аналогично можно проверить, что величины $T_{\alpha 4} = -T_{4\alpha} = i\tilde{S}_\alpha/c$ содержат компоненты вектора Пойнтинга ($\alpha = 1, 2, 3$).

Тензор (117.3) можно записать в более удобном виде:

$$T_{lm} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{lk} F_{mk} - \frac{1}{4} F_{pq}^2 \delta_{lm} \right). \quad (117.4)$$

Пространственная часть этого тензора

$$(-T_{lm})_{\text{простр}} \equiv \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \delta_{\alpha\beta} \frac{E^2 + H^2}{2} \right\} \quad (117.5)$$

называется тензором натяжений Максвелла:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \times \begin{pmatrix} E_x^2 + H_x^2 - \frac{E^2 + H^2}{2} & E_x E_y + H_x H_y & E_x E_z + H_x H_z \\ E_y E_x + H_y H_x & E_y^2 + H_y^2 - \frac{E^2 + H^2}{2} & E_y E_z + H_y H_z \\ E_z E_x + H_z H_x & E_z E_y + H_z H_y & E_z^2 + H_z^2 - \frac{E^2 + H^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (117.6)$$

Таким образом, тензор энергии-импульса электромагнитного поля можно представить в виде матрицы со следующей структурой:

$$T_{lk} = \begin{pmatrix} -\sigma_{\alpha\beta} & iS/c \\ iS/c & -w \end{pmatrix}. \quad (117.7)$$

Выясним теперь физический смысл всех компонент тензора. Поскольку тензор T_{lm} (117.4) является симметричным, сохраним для определенности обычную интерпретацию вектора Пойнтинга (как плотности потока энергии) для вектора S , расположенного в четвертом столбце тензора (117.7). С учетом множителя i/c элементы матрицы T_{14} , T_{24} , T_{34} описывают плотность потока четвертой

компоненты вектора энергии-импульса. Тогда компоненты $-\sigma_{\alpha\beta}$ описывают плотность α -компоненты потока для β -компоненты импульса. Например, $-\sigma_{21}$ есть плотность потока x -компоненты импульса вдоль оси y . Но плотность потока импульса равна давлению (поля) на поверхность, а та же плотность, взятая с обратным знаком, — натяжению. Отсюда и название тензора (117.6). При такой интерпретации элементы четвертой строчки тензора должны описывать четвертые компоненты 4-вектора плотности потока энергии-импульса, которые равны плотности соответствующей компоненты энергии-импульса, умноженной на ic (сравни с 4-вектором тока (\mathbf{j}, icr)). Отсюда плотность импульса электромагнитного поля

$$\mathbf{g} = \frac{iS/c}{ic} = \frac{S}{c^2}. \quad (117.8)$$

Таким образом, вектор Пойнтинга характеризует не только плотность потока энергии, но и плотность его импульса.

Наконец, элемент T_{44} есть четвертая компонента вектора потока энергии-импульса: $T_{44} = ic \frac{i}{c} w = -w$.

Задача 1. Найти преобразования Лоренца для плотности энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля.

Используя (115.8), запишем

$$-w = T_{44} = \alpha_{4p}\alpha_{4q}T'_{pq} = \alpha_{41}(\alpha_{41}T'_{11} + \alpha_{44}T'_{14}) + \alpha_{44}(\alpha_{41}T'_{41} + \alpha_{44}T'_{44}).$$

Подставив значения T_{ik} , найдем

$$w = (1 + \beta^2)\gamma^2 w' + 2\beta^2\gamma \frac{S'_x}{c} - \beta^2\gamma^2 \frac{E_x'^2 + H_x'^2}{4\pi}. \quad (117.9)$$

Аналогично получим соотношения для компонент вектора Пойнтинга

$$\begin{aligned} S_x &= (1 + \beta^2)\gamma^2 S'_x + 2\beta\gamma^2 c w' - \beta\gamma^2 \frac{c}{4\pi} (E_x'^2 + H_x'^2); \\ S_y &= \gamma S'_y - \beta\gamma \frac{c}{4\pi} (H'_x H'_y + E'_x E'_y); \\ S_z &= \gamma S'_z - \beta\gamma \frac{c}{4\pi} (H'_x H'_z + E'_x E'_z). \end{aligned} \quad (117.10)$$

Таким образом, знания только величин w и S_α недостаточно, чтобы вычислить их значения в другой инерциальной системе — нужно знать поля \mathbf{E} и \mathbf{H} или компоненты тензора.

Задача 2. Найти тензор натяжений электрического поля.

Выбрав направление оси x вдоль вектора \mathbf{E} , получим

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E^2/8\pi & 0 & 0 \\ 0 & -E^2/8\pi & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/8\pi \end{pmatrix}.$$

Этот результат совпадает с (18.2) и означает, что на площадку, параллельную плоскости (yz) , действует сила натяжения, направленная вдоль поля ($\sigma_{xx} = -p = E^2/8\pi$), а на площадки, параллельные плоскостям (xz) и (xy) , действуют силы давления, направленные поперек поля ($\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -E^2/8\pi$).

§ 118. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЯ

Локальный закон сохранения энергии поля $\operatorname{div} \mathbf{S} + \partial w / \partial t = 0$ можно записать также в тензорной форме $\partial T_{hk} / \partial x_k = 0$. Отсюда сразу следует, что сохраняется и импульс электромагнитного поля, так что всего имеется четыре локальных закона сохранения

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k} = 0; \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (118.1)$$

Для ограниченного во времени и пространстве электромагнитного поля («кусочек» поля) его полная энергия

$$W = - \int T_{44} dV \quad (118.2)$$

и полный импульс

$$G_\alpha = \frac{1}{ic} \int T_{4\alpha} dV = \int g_\alpha dV; \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (118.3)$$

образуют, как и для любого другого физического объекта, 4-вектор энергии-импульса, который тоже сохраняется (интегральный закон сохранения энергии-импульса). Соответственно инвариантная масса поля определяется обычным выражением

$$Mc^2 = \sqrt{W^2 - G^2 c^2} \quad (118.4)$$

и, вообще говоря, не равна нулю. Примером может служить система из двух фотонов, движущихся под углом θ друг к другу: $Mc^2 = 2\sqrt{W_1 W_2} \sin(\theta/2)$. Исключением является плоская волна, для которой $g = S/c^2 = w/c$, откуда $M = 0$.

Задача 1. Показать, что величины G_α , iW/c преобразуются, как компоненты 4-вектора.

Образум скаляр

$$\int \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_k} dx_l = 0$$

и проинтегрируем его по четырехмерному объему $dV^{(4)}$:

$$0 = \int \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_k} dx_l dV^{(4)} = \oint dS_k^{(3)} \int dx_l T_{lk}.$$

Здесь $dS_k^{(3)}$ — элемент трехмерной гиперповерхности в четырехмерном пространстве, ортогональный k -му измерению:

$$dS_1^{(3)} = dx_2 dx_3 dx_4; \quad dS_2^{(3)} = dx_1 dx_3 dx_4, \quad \text{и т. д.}$$

Воспользуемся приемом, который мы применяли уже неоднократно: выберем замкнутую поверхность интегрирования наиболее удобным образом. В данном случае все части поверхности, содержащие dx_k , вынесем за объем, где поле отлчно от нуля. Тогда наш интеграл по замкнутой трехмерной гиперповерхности будет содержать только интеграл по гиперповерхности, ортогональной x_4 , т. е. по $dS_4^{(3)} = dV^{(3)}$ — трехмерному объему. В свою очередь, поверхность $dS_4^{(3)}$ (напомним, что она охватывает объем с двух сторон!) выберем так, чтобы од-

на ее сторона была ортогональна x_4 , а другая — x'_4 . Тогда получим

$$0 = \int dV \int dx_l T_{l4} - \int dV' \int dx'_m T_{m4}.$$

Знак минус возникает из-за того, что нормаль к гиперповерхности направлена в одном случае внутрь объема, в другом — наружу.

Учитывая, что $dx'_l = \alpha_{lr}^{-1} dx_r = \alpha_{rl} dx_r$, найдем

$$\int T_{l4} dV = \alpha_{lm} \int T'_{m4} dV',$$

или

$$G_l = \alpha_{lm} G'_m,$$

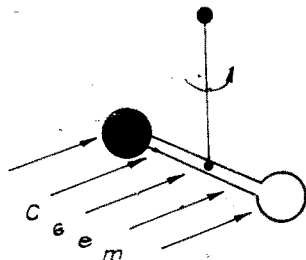
т. е. G_l является 4-вектором.

Механические свойства электромагнитного поля вполне «осязаемы». Первым прямым экспериментальным доказательством их существования были знаменитые опыты Лебедева по измерению давления света (1898—1900 гг.). Световой пучок падал на тонкую металлическую пластинку (толщиной 0,01—0,1 мм в разных экспериментах), подвешенную в вакууме (около 10^{-4} торр) на упругой нити. Одна половина пластины была зачернена, вторая хорошо отражала свет (рис. XVIII.1). В этом случае закручивающий момент

$$N = S_0 l [(1 + R_1) - (1 + R_2)] gc = (R_1 - R_2) S_0 l w, \quad (118.5)$$

где S_0 — площадь пластинки, $2l$ — расстояние между пластинками, $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения пластинок. Чтобы оценить тонкость опытов Лебедева, достаточно отметить, что в них измерялись силы светового давления на уровне $3 \cdot 10^{-11}$ Н (заметим, что солнечный свет на поверхности Земли создает давление порядка $5 \cdot 10^{-6}$ Н/м², или 0,5 мГ/м²). Кроме того, нужно было исключить паразитное влияние конвекционных потоков, возникающих при нагреве прибора (для этого пластинки нужно было располагать строго вертикально), и так называемое радиометрическое действие — импульс отдачи, передаваемый пластинкам молекулами остаточного газа при отражении. Лебедев получил согласие с выражением (118.5) в пределах точности порядка 20%. Только остроумная постановка опыта (в частности, применение резонансной раскочки крутильных колебаний под действием световых вспышек) позволила добиться этих результатов. Лишь 25 лет спустя Герлаху удалось на порядок улучшить точность опыта.

Рис. XVIII.1. Принципиальная схема опыта Лебедева.



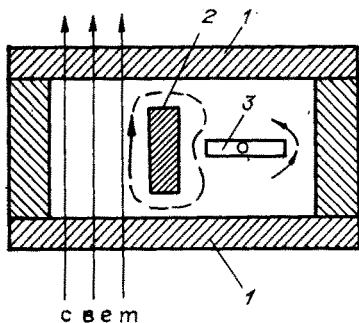


Рис. XVIII.2. Схема опытов Лебедева по измерению давления света на газы.

1 — флюоритовые окошки; 2 — разделительная стенка; 3 — подвижный поршень на крутильных весах. Свет, проходя сквозь газ, передает ему механический импульс, что вызывает движение газа (штриховая линия со стрелками). Это движение регистрируется по повороту крутильных весов (3) в направлении, показанном на рисунке.

В еще более тонких экспериментах Лебедев сумел измерить давление света на газы (рис. XVIII.2). Эти опыты принесли ему мировую славу замечательного физика-экспериментатора.

Подобно частицам, обладающим массой, свободное электромагнитное поле испытывает воздействие гравитационных сил. Так, проходя вблизи космических тел, световые лучи отклоняются. В частности, световой луч, касающийся поверхности Солнца, претерпевает отклонение на угол $1,75''$, что было впервые экспериментально подтверждено английскими астрономами при наблюдении солнечного затмения в 1919 г. Свет, испущенный звездой, теряет энергию в ее гравитационном поле, что приводит к возрастанию его длины волны — так называемое гравитационное красное смещение.

Задача 2. Оценить угол отклонения светового луча, проходящего вблизи поверхности Солнца.

Для решения задачи рассмотрим движение частицы с массой покоя m в центральном гравитационном поле. Пусть ρ — прицельный параметр. В приближении малых углов найдем

$$p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_r \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} \frac{dx}{v},$$

где v — скорость частицы, x — координата вдоль траектории, F_r — сила, действующая на частицу и направленная от частицы к гравитационному центру: $F_r = K\gamma m/r^2$, K — гравитационная постоянная, M — в нашем случае масса Солнца, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $r^2 = (x^2 + \rho^2)$. Тогда угол отклонения

$$\alpha = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{KM\rho}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\rho^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2KM}{\rho v^2}.$$

Таким образом, от массы частицы угол отклонения не зависит и в интересующем нас случае светового луча над поверхностью Солнца

$$\alpha = \frac{2KM}{Rc^2} \approx 0,42 \cdot 10^{-5} \approx 0,87'',$$

т. е. упрощенная оценка дает результат вдвое меньший точного, который был получен Эйнштейном на основе общей теории относительности.

Задача 3. Оценить влияние гравитации на длину волны света, приходящего с Солнца на Землю.

Используем тот же подход пробной частицы с массой покоя m . В гравитационных полях Солнца и Земли ее энергия изменяется на

$$\Delta \mathcal{E} = -K\gamma m \left(\frac{M_C}{R_C} - \frac{M_C}{R_{CЗ}} - \frac{M_З}{R_З} \right),$$

где $M_{C,З}$ — массы Солнца, Земли, $R_{C,З}$ — радиус Солнца, Земли, $R_{CЗ}$ — расстояние между Землей и Солнцем. Отсюда

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{K}{c^2} \left(\frac{M_C}{R_C} - \frac{M_C}{R_{CЗ}} - \frac{M_З}{R_З} \right) \approx 2 \cdot 10^{-6}.$$

В присутствии зарядов и токов механические свойства электромагнитного поля уже нельзя описать вектором энергии-импульса. В частности, нельзя ввести инвариантную массу поля отдельно от массы частиц. Это связано с тем, что в присутствии заряженных частиц локальные законы сохранения (118.1) для поля уже не выполняются, поскольку имеет место обмен энергией и импульсом между частицами и полем. В таком случае вектор энергии-импульса (и массу) можно ввести только для полной системы «поле + частицы», тогда как величины W , G_α (118.2), (118.3) уже не образуют 4-вектор (см. задачу 1 выше).

Покажем, что полный импульс системы «поле + частицы» сохраняется. Для этого продифференцируем по времени выражение (117.8):

$$\frac{dg}{dt} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (118.6)$$

Отметим, что величины

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

есть электрический и магнитный токи смещения, а выражение (118.6) имеет вид «уравнения движения» поля с силой Лоренца в правой части.

Выражая производные $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ из уравнений Максвелла и производя необходимые преобразования, найдем

$$\frac{dg}{dt} + \rho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right) = -\nabla w - (\nabla, \mathbf{H}) \mathbf{H} - (\nabla, \mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (118.7)$$

Здесь ρ — плотность заряда, а $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ — плотность тока. В правой части этого уравнения стоят полные производные, которые при интегрировании по объему для системы ограниченных размеров дадут нуль. В левой же части стоит производная от полной плотности импульса частиц и поля. В результате получаем закон сохранения

$$\mathbf{P} + \mathbf{G} = \text{const}, \quad (118.8)$$

где \mathbf{P} — полный импульс частиц.

Аналогично получается закон сохранения полной энергии частиц и поля

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\pi} ((\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) + (\mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}})) = -(\mathbf{E}, \mathbf{j}) - \text{div } \mathbf{S},$$

(\mathbf{E} , \mathbf{j}) — мощность, передаваемая от поля к частицам в единице объема.

Задача 4. В магнитном поле вращается тороидальный пучок релятивистских электронов. Полное число частиц в пучке N , скорость электронов $v \sim c$, радиус тора R , сечение тора — круг радиуса a . Найти массу пучка.

Энергия заряженного тора

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV + N\gamma mc^2,$$

где m — масса покоя электрона, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Воспользовавшись соотношением (115.11), запишем

$$\mathcal{E} = \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV + N\gamma mc^2 = \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \cdot \frac{LI^2}{2c^2} + N\gamma mc^2,$$

где $\beta = v/c$, $I = Nev/2\pi R$ — ток пучка, $L = 4\pi R \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right)$ — индуктивность тора. Поскольку полный импульс системы равен нулю, инвариантная масса системы «электроны + поле»

$$M = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \cdot \frac{LI^2}{2c^4} + N\gamma m.$$

Отношение первого слагаемого ко второму равно $\frac{I}{I_B} \cdot \frac{1 + \beta^2}{\beta\gamma} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right)$,

где $I_B = mc^3/e \approx 17000\text{А}$ — критический ток, введенный советским физиком Будкером в связи с исследованием устойчивости тороидального пучка релятивистских электронов. При $I \gg \gamma I_B$ масса электронного кольца определяется в основном его коллективным полем (см. § 49).

Задача 5. Найти механический момент электромагнитного поля системы из двух точечных зарядов — электрического e и магнитного g_μ расстояние между которыми $2a$ (Вильсон, 1949).

Выберем начало координат так, чтобы заряд e находился в точке $(0, a, 0)$, а заряд g_μ — в точке $(0, -a, 0)$. Тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = g_\mu \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}.$$

Момент поля

$$\mathbf{M} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})) dV = \frac{eg_\mu}{2\pi c} \int \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}{(r^2 - a^2)^3} dV.$$

Вводя сферическую систему координат с полярной осью вдоль вектора \mathbf{a} , найдем

$$\mathbf{M} = \frac{eg_\mu}{c} \mathbf{a} \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1 - \cos^2 \theta}{(r^2 - a^2)^3} = -\frac{eg_\mu}{c} \cdot \frac{\mathbf{a}}{a}.$$

Замечательно, что значение \mathbf{M} не зависит от расстояния между зарядами a . Это позволяет формально применить результат к точечной частице. Полагая, что механический момент поля частицы квантован, т. е. $M = n\hbar/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, получим $g_\mu = en\hbar/2c$, что совпадает с результатом Дирака (см. § 116), полученным им с помощью другого метода.

ПОТЕНЦИАЛЫ И ПОЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 119. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Соотношения (114.1) описывают потенциалы электромагнитного поля. Решение однородных уравнений (114.1) есть знакомое нам свободное электромагнитное поле (волны) или же поле вне системы зарядов и токов. Решение неоднородных уравнений даст, кроме того, потенциалы поля, образованного данными зарядами $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токами $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Для нахождения частного решения неоднородных уравнений воспользуемся наиболее эффективным методом — попробуем «угадать» ответ. Мы знаем решение для статических и квазистационарных полей (8.1) и (31.8). Посмотрим, годятся ли эти выражения для произвольной зависимости ρ и \mathbf{j} от времени. Иными словами, будем искать решение уравнений (114.1) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} dV; \quad \varphi(\mathbf{r}_p, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} dV, \quad (119.1)$$

где \mathbf{r}_p — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r} — радиус-вектор элемента объема (рис. XIX.1). Времена t в левой и t' в правой частях соотношений (119.1) отличаются на величину, равную длительности распространения электромагнитного поля от точки интегрирования dV до точки наблюдения P :

$$t = t' + \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|}{c}. \quad (119.2)$$

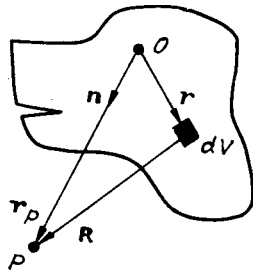
В этом и состоит отличие формул (119.1) от аналогичных соотношений для статических и квазистационарных полей — учтено *запаздывание* поля или конечность времени распространения поля от источника до точки наблюдения.

Задача 1. Проверить, удовлетворяют ли потенциалы в форме (119.1) уравнениям (114.1).

Левая часть этих уравнений содержит лапласиан Δ_p по координатам точки наблюдения \mathbf{r}_p и вторую производную по времени t в точке наблюдения. Потенциалы в (119.1) даны как функции координат \mathbf{r}_p и вре-

Рис. XIX.1. К вычислению потенциалов системы зарядов и токов:

O — начало координат; P — точка наблюдения; dV — элемент интегрирования; \mathbf{n} — $\mathbf{r}_p/\mathbf{r}_p$.



мени t' . Поэтому при вычислении Δ_p и $\partial^2/\partial t'^2$ нужно в качестве независимых переменных рассматривать \mathbf{r}_p и t и учитывать зависимость от них функции t' (119.2). В соответствии с этим получим

$$\frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} + \frac{\partial t'}{\partial x_{p\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (119.3)$$

где

$$\frac{\partial t'}{\partial x_{p\alpha}} = -\frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{cR}; \quad R \equiv |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_{p\alpha} - x_\alpha)^2}. \quad (119.4)$$

Величины $x_{p\alpha}$, x_α — компоненты векторов \mathbf{r}_p , \mathbf{r} соответственно.

Подставим решение (119.1) в уравнение (114.1) для Φ и вычислим отдельно слагаемые левой части. Первое из них

$$\Delta_p \Phi = \int \Delta_p \left(\frac{\rho}{R} \right) dV,$$

где

$$\Delta_p \left(\frac{\rho}{R} \right) = \frac{1}{R} \Delta_p \rho(\mathbf{r}, t') + \rho \Delta_p \left(\frac{1}{R} \right) + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_{p\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (119.5)$$

Зависимость ρ от координат точки наблюдения \mathbf{r}_p появляется из (119.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x_{p\alpha}} &= \frac{\partial \rho}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x_{p\alpha}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t'} \cdot \frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{cR}, \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{p\alpha}^2} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} \cdot \left(\frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{cR} \right)^2 - \frac{\partial \rho}{\partial t'} \left(\frac{1}{cR} - \frac{(x_{p\alpha} - x_\alpha)^2}{cR^3} \right). \end{aligned}$$

Суммируя по α с учетом (119.4):

$$\Delta_p \rho = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{p\alpha}^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} - \frac{2}{cR} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'}.$$

Второе слагаемое в (119.5) найдем, вспомнив, что потенциал единичного точечного заряда есть $1/R$:

$$\Delta_p \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(R).$$

Наконец, третье слагаемое в (119.5) получим, вычислив

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_{p\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t'} \cdot \frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{cR} \left(-\frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{R^3} \right) = \frac{(x_{p\alpha} - x_\alpha)^2}{cR^4} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'}$$

и просуммировав по α . В результате

$$2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_{p\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{2}{cR^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'}.$$

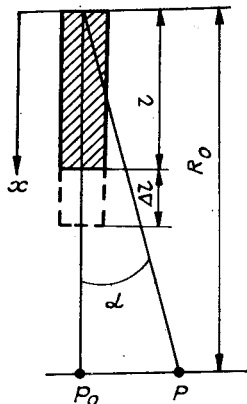
Собирая слагаемые, найдем

$$\Delta_p \left(\frac{\rho}{R} \right) = \frac{1}{c^2 R} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} - 4\pi \rho \delta(R),$$

так что

$$\Delta_p \Phi = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} dV - 4\pi \int \rho \cdot \delta(R) dV = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} dV - 4\pi \rho(\mathbf{r}_p, t).$$

Рис. XIX.2. К расчету потенциала движущегося заряженного цилиндра.



Подставляя этот результат в левую часть уравнения (114.1) для Φ , имеем:

$$\Delta_p \Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial (t')^2} dV - 4\pi\rho(\mathbf{r}_p, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{r}, t') \frac{dV}{R} = -4\pi\rho(\mathbf{r}_p, t),$$

так как $\partial^2 \rho / \partial (t')^2 = \partial^2 \rho / \partial t^2$. Таким образом, потенциал Φ из (119.1) удовлетворяет уравнению (114.1). Аналогично доказывается, что вектор-потенциал (119.1) является решением первого уравнения (114.1) Для этого достаточно произвести замены $\Phi \rightarrow A_\beta$, $\rho \rightarrow j_\beta / c$, $\beta = 1, 2, 3$.

Простой пример, рассмотренный ниже в задаче 2, показывает, как запаздывание поля сказывается на значениях A , Φ .

Задача 2. Найти потенциал равномерно заряженного цилиндра длиной l , движущегося с постоянной скоростью v вдоль направления, параллельного оси цилиндра (рис. XIX.2). Расстояние от цилиндра до точки наблюдения много больше l .

Потенциал в точке P_0 на оси цилиндра в момент времени t

$$\Phi(P_0, t) = \int \frac{\rho S}{R} dx,$$

интеграл берется по всем точкам пространства, в которых в момент $t' = t - R/c$ находится заряд. Нетрудно видеть, что вклад в потенциал дает некоторая эффективная длина цилиндра $l_{\text{эф}} = l + \Delta l$, где Δl находится из условия $(l + \Delta l)/c = \Delta l/v$, означающего, что сигналы от «хвоста» ($x = 0$, рис. XIX.2) и от сместившейся «головы» цилиндра ($x = l + \Delta l$) одновременно достигают точки P_0 , или сигнал со скоростью c от «хвоста» добирается до «головы» за время смещения последней на отрезок Δl . В итоге

$$\Delta l = \frac{\beta}{1 - \beta} l; \quad l_{\text{эф}} = \frac{l}{1 - \beta}; \quad \beta = \frac{v}{c};$$

$$\Phi(P_0, t) = \frac{\rho l S}{R(1 - \beta)} = \frac{q}{R(1 - \beta)}; \quad A(P_0, t) = \frac{q\beta}{R(1 - \beta)}.$$

Проведя аналогичные вычисления для точки P вне оси, найдем

$$\Phi(P, t) = \frac{q}{R(1 - \beta \cos \alpha)}; \quad A = \frac{q\beta}{R(1 - \beta \cos \alpha)}. \quad (119.6)$$

В § 120 эти результаты будут получены в более общем случае.

Задача 3. Показать, что запаздывающие потенциалы в форме (119.1) удовлетворяют калибровке Лоренца.

Вычислим вначале дивергенцию вектор-потенциала:

$$\text{div}_p \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{c} \int \left[j_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial j_\alpha}{\partial t'} \left(-\frac{x_{p\alpha} - x_\alpha}{cR^2} \right) \right] dV.$$

Интеграл от первого слагаемого можно взять по частям, если учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Тогда

$$\int j_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}} \left(\frac{1}{R} \right) dV = -\oint \frac{j_\alpha dS_\alpha}{R} + \int \sum_\alpha \frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{1}{R} dV.$$

Интеграл по замкнутой поверхности равен нулю, так как поверхность можно вынести за пределы объема с токами и зарядами. Производная по координатам элементов объема x_α от $j_\alpha(\mathbf{r}, t')$, очевидно, есть

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial j_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial j_{\alpha}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x_{\alpha}} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial j_{\alpha}}{\partial t'} \cdot \frac{x_{p\alpha} - x_{\alpha}}{c}.$$

где дивергенция берется по координатам x_{α} . Подставляя этот результат в исходный интеграл, получим

$$\operatorname{div}_p \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}}{R} dV.$$

Учитывая, что $\partial \rho / \partial t = \partial \rho / \partial t'$ и $\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$, окончательно убеждаемся в справедливости равенства

$$\operatorname{div}_p \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

§ 120. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА — ВИХЕРТА

Запаздывающие потенциалы позволяют найти потенциал точечного произвольно движущегося заряда. Для этого необходимо в (119.1) произвести интегрирование по объему, приняв распределение плотности заряда в виде δ -функции:

$$\rho(\mathbf{r}, t') = e \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')), \quad (120.1)$$

где $\mathbf{r}_e(t')$ — радиус-вектор частицы в момент t' (рис. XIX.3). Чтобы выполнить процедуру, удобно в интегралах (119.1) выбрать в качестве переменных аргументы δ -функции

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t'). \quad (120.2)$$

Якобиан соответствующего преобразования переменных проще вычислить через якобиан обратного преобразования

$$D \left(\frac{X_{\alpha}}{r_{\beta}} \right) = 1/D \left(\frac{r_{\alpha}}{X_{\beta}} \right). \quad (120.3)$$

Члены этого определителя (см. (120.2) и (119.2)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} &= \frac{\partial (r_{\alpha} - r_{e\alpha}(t'))}{\partial r_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial r_{e\alpha}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r_{\beta}} = \\ &= \delta_{\alpha\beta} - v_{\alpha}(t') \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial |\mathbf{R}|}{\partial r_{\beta}} \right); \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}. \end{aligned}$$

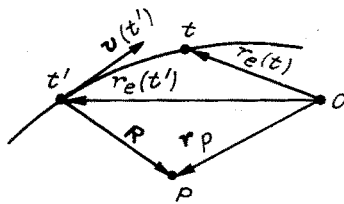
Поэтому

$$\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} - \beta_{\alpha}(t') l_{\beta}, \quad \text{где } \mathbf{l} = \mathbf{R}/R.$$

Вычисляя определитель $D \left(\frac{X_{\alpha}}{r_{\beta}} \right)$, найдем

$$D \left(\frac{X_{\alpha}}{r_{\beta}} \right) = \begin{vmatrix} 1 - \beta_1 l_1 & -\beta_1 l_2 & -\beta_1 l_3 \\ -\beta_2 l_1 & 1 - \beta_2 l_2 & -\beta_2 l_3 \\ -\beta_3 l_1 & -\beta_3 l_2 & 1 - \beta_3 l_3 \end{vmatrix} = 1 - \frac{(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R})}{R}.$$

Рис. XIX.3. Траектория заряженной частицы.



Переходя в интегралах (119.4) к переменным X_α , получим

$$A(\mathbf{r}_p, t) = \frac{e}{c} \int_V \frac{\mathbf{v}(\mathbf{X}, t') \delta(\mathbf{X})}{R} \cdot \frac{d^3X}{1 - \frac{\beta R}{R}} = \left(\frac{e}{cR} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta R}{R}} \right)_{\mathbf{X}=0}.$$

Точка $\mathbf{X} = 0$ есть $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e(t')$. Вводя радиус-вектор

$$\mathbf{R}_e(t') = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e(t'), \quad (120.4)$$

проведенный в точку наблюдения P из точки, в которой находился заряд в момент t' , получим окончательно

$$A(\mathbf{r}_p, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR_e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}_e}{cR_e}}, \quad \varphi(\mathbf{r}_p, t) = \frac{e}{R_e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}_e}{cR_e}}. \quad (120.5)$$

Подчеркнем, что величины в правых частях определены в момент времени t' .

Потенциалы в форме (120.5) носят название потенциалов Лиенара — Вихерта.

§ 121. ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Для вычисления поля движущегося заряда нужно потенциалы (120.5) подставить в выражения для полей и произвести дифференцирование с учетом запаздывания. В этом и состоит техническая трудность.

Получим вначале вспомогательные выражения. Поскольку $t = t' + R_e(t')/c$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}; \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}_e}{cR_e} \equiv \kappa. \quad (121.1)$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \sqrt{\sum_{\alpha} (r_{p\alpha} - r_{e\alpha})^2} = -\frac{\mathbf{v}\mathbf{R}_e}{cR_e},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$ — скорость заряда в момент t' .

Градиент по координатам точки наблюдения от скалярной функции аргументов \mathbf{r}_p и t'

$$\nabla f(\mathbf{r}_p, t') = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial r_{p\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial t'} \nabla t'.$$

В свою очередь,

$$\nabla t' = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \frac{\partial t'}{\partial r_{\rho\alpha}} = -\frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \frac{\partial R_e}{\partial r_{\rho\alpha}} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial R_e}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{R_e}{cR_e} + \frac{vR_e}{cR_e} \nabla t',$$

откуда

$$\nabla t' = -\frac{R_e}{cR_e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{vR_e}{cR_e}} = -\frac{1}{c\kappa} \cdot \frac{R_e}{R_e}.$$

Окончательно получим

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{1}{c\kappa} \cdot \frac{R_e}{R_e} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \nabla_1 = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r_{\rho\alpha}}. \quad (121.2)$$

Теперь найдем выражение для электрического поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{e}{c^2 \kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\mathbf{v}}{\kappa R_e} \right) - e \nabla_1 \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right) + \\ &+ \frac{e}{c\kappa} \cdot \frac{R_e}{R_e} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right) = -\frac{e}{c^2 \kappa} \cdot \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\kappa R_e} + \frac{e}{c\kappa} \left(\frac{R_e}{R_e} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right) - e \nabla_1 \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right). \end{aligned}$$

Произведя дифференцирование по времени

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right) = -\frac{1}{\kappa^2 R_e^2} \left(-\frac{vR_e}{R_e} - \frac{\dot{v}R_e}{c} + \frac{v^2}{c} \right) = \frac{\dot{v}R_e}{c\kappa^2 R_e^2} - \frac{c}{\kappa R_e^2} + \frac{c}{\gamma^2 \kappa^2 R_e^2}$$

и координатам $\nabla_1 \left(\frac{1}{\kappa R_e} \right) = -\frac{1}{\kappa^2 R_e^2} \left(\frac{R_e}{R_e} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right)$, найдем

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 \kappa^3 R_e^2} \left\{ \left(\frac{R_e}{R_e} - \beta \right) \frac{(R_e \dot{\mathbf{v}})}{R_e} - \dot{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{\beta R_e}{R_e} \right) \right\} + \frac{e}{\gamma^2 \kappa^3 R_e^2} \left(\frac{R_e}{R_e} - \beta \right). \quad (121.3)$$

Свернув это выражение, получим окончательно

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c\kappa^3 R_e} (\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta})) + \frac{e}{\gamma^2 \kappa^3 R_e^2} (\mathbf{n} - \beta), \quad \mathbf{n} = \frac{R_e}{R_e}, \quad \kappa = 1 - \beta \mathbf{n}. \quad (121.4)$$

Для нахождения магнитного поля вычислим $\text{rot } \mathbf{A}$ по координатам точки наблюдения. С учетом (121.2) запишем

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\nabla_1 \times \frac{e\mathbf{v}}{c\kappa R_e} \right) - \frac{1}{c\kappa} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial t'} \times \frac{e\mathbf{v}}{c\kappa R_e} \right).$$

После дифференцирования в правой части возникает выражение, содержащее электрическое поле в форме (121.3). В результате необходимых преобразований получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (121.5)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля точечного заряда, движущегося произвольно, взаимно ортогональны, как и в случае системы зарядов, движущейся равномерно. Однако для про-

извольного движения соотношение (115.11) неприменимо (неинерциальность системы покоя зарядов). В этом можно убедиться прямой проверкой, умножив векторно β на \mathbf{E} и сравнив с $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$.

Сравнивая выражения для потенциалов (120.5) и полей (121.4), (121.5) произвольно движущегося заряда, мы видим, насколько описание с помощью потенциалов проще, что и оправдывает их широкое употребление в теории электромагнитного поля.

§ 122. ПОЛЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Выражения (121.4), (121.5) для поля движущегося заряда содержат функции координат заряда в момент времени t' . Обычно известен закон движения заряда, а значит, и положение заряда в момент измерения. Соответствующий пересчет координат и времени в общем случае представляет собой весьма громоздкую операцию. Существует, однако, важный частный случай, когда этот пересчет довольно прост и приводит к простым и «удобным для употребления» результатам — это случай заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Тогда

$$\dot{\mathbf{v}} = 0; \quad \mathbf{E} = \frac{e}{\gamma^2 \kappa^3 R_e^2} (\mathbf{n} - \beta); \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \beta \times \mathbf{E}. \quad (122.1)$$

Последнее соотношение для \mathbf{H} и \mathbf{E} следует из общего соотношения (115.11) для зарядов, покоящихся в одной из инерциальных систем. В то же время равенство $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ непосредственно следует из $\mathbf{H} = \beta \times \mathbf{E}$, поскольку $\mathbf{E} \propto (\mathbf{n} - \beta)$ и $\beta \times (\mathbf{n} - \beta) \equiv \mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \beta)$.

Преобразуем выражения (122.1) к координатам заряда \mathbf{R}_e в момент измерения t . Введем вспомогательный вектор \mathbf{L} (см. рис. XIX.4): $\mathbf{L} = \mathbf{v}(t - t') = \mathbf{v}R_e/c$. Тогда, записав выражение для \mathbf{E} в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e}{\gamma^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_e - \beta R_e}{(\kappa R_e)^3},$$

найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e - \beta R_e &= \mathbf{R}_e - \mathbf{L} = \mathbf{R}_t; \quad (\kappa R_e)^2 = (R_e - \beta R_e)^2 = \\ &= R_e^2 - 2R_e(\beta, \mathbf{R}_e) + \beta^2 R_e^2 \cos^2 \psi = \\ &= (R_e - \beta R_e)^2 - \beta^2 R_e^2 \sin^2 \psi = R_t^2 - \beta^2 R_t^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

где углы ψ и θ показаны на рис. XIX. 4. Используя эти результаты, получим

$$\mathbf{E} = \frac{eR_t}{R_t^3} \cdot \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}; \quad \mathbf{H} = \beta \times \mathbf{E}. \quad (122.2)$$

Таким образом, отличие от нерелятивистского (кулоновского) случая ($\beta \ll 1$) состоит в появляющейся анизотропии полей — величи-

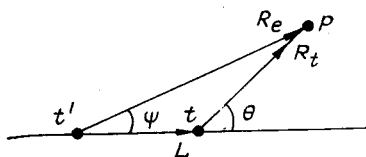


Рис. XIX.4. К расчету полей равномерно движущегося заряда.

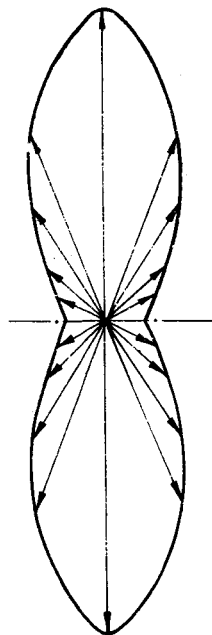


Рис. XIX.5. Векторная диаграмма электрического поля заряда, движущегося с постоянной скоростью. Размер каждой стрелки пропорционален $(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-3/2}$. Случай $\gamma = 2$.

на поля существенно зависит от направления на точку наблюдения (угол θ). Поля имеют максимальное значение в плоскости $\theta = \pi/2$ и минимальное — на прямой, совпадающей с вектором $\mathbf{v}(\theta = 0)$:

$$E|_{\theta=\pi/2} = e_{\perp} \gamma \frac{e}{R_t^2}; \quad E|_{\theta=0,\pi} = \pm e_{\parallel} \cdot \frac{e}{\gamma^2 R_t^2}$$

(см. рис. XIX. 5). Эти результаты имеют ясный физический смысл. В системе, где заряд покоится, его поле является кулоновским полем точечного заряда. В лабораторной системе поперечная компонента поля ($\theta = \pi/2$) возрастает в γ раз, а продольная ($\theta = 0$ или π) не изменяется, но зато в γ раз сжимается расстояние в системе заряда.

Задача 1. Выразить потенциалы Лиенара — Вихерта для заряда, движущегося с постоянной скоростью, через координаты заряда в момент наблюдения t .

Подставляя в (120.5) значение χR_e , найденное выше, получим

$$\mathbf{A} = \frac{ev}{cR_t} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}; \quad \Phi = \frac{e}{R_t} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (122.3)$$

Задача 2. Найти значение \mathbf{E} для потенциалов (122.3)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{ev}{c^2} \left\{ -\frac{v\mathbf{R}_t}{R_t^3} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} - \frac{\beta^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}}{R_t (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right\} = \\ &= -\frac{ev}{c^2} \cdot \frac{v \cos \theta}{R_t^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}; \end{aligned} \quad (122.4)$$

$$-\nabla \Phi = \frac{eR_t}{R_t^3} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} - \frac{ee_{\theta}}{R_t^2} \cdot \frac{\beta^2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (122.5)$$

Здесь учтено, что $v_\alpha = -\dot{R}_{i\alpha}$, $R_i\dot{\theta} = v \sin \theta$ (так как движется заряд, а точка P фиксирована — см. рис. XIX.4). Кроме того,

$$\mathbf{v} = \nu v \cos \theta - \mathbf{e}_\theta v \sin \theta. \quad (122.6)$$

Подстановка этого результата в (122.5) и суммирование (122.4), (122.5) дают выражения для полей (122.2).

Задача 3. Проверить, выполняется ли для электрического поля (122.2) условие потенциальности $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Учитывая, что электрическое поле заряда, движущегося с постоянной скоростью, имеет только радиальную компоненту $\mathbf{E} = \mathbf{e}_R E$, и воспользовавшись выражением для ротора в сферических координатах, найдем

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{e}_\varphi \frac{e}{R_i^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\beta^2 \sin 2\theta}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}.$$

Отсюда видно, что поле становится потенциальным ($\text{rot } \mathbf{E} \rightarrow 0$) при нерелятивистских скоростях ($\beta \ll 1$). Непотенциальность электрического поля движущегося заряда связана с присутствием переменного магнитного поля $\mathbf{H} = \beta \times \mathbf{E}$.

Глава XX

ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ

Рассмотрим механизм генерации электромагнитных волн системой зарядов, локализованных в некоторой ограниченной области пространства. Говоря о свободной волне, мы неоднократно подчеркивали, что она существует как самостоятельное поле, «оторвавшееся» от источника, не связанное с ним. Очевидно, признаком такой самостоятельности может служить постоянство потока энергии, переносимой полем волны, т. е.

$$\oint (\mathbf{S}, d\boldsymbol{\sigma}) = \text{const},$$

если поверхность интегрирования охватывает источник, генерирующий волны, а потерями в среде, где распространяется излучение, можно пренебречь (в дальнейшем мы ограничимся случаем волны в вакууме). В этой связи уместно заметить, что понятие плоской волны является приближенным, не учитывающим ограниченность поля, а значит, и его расходимость в поперечных к вектору \mathbf{k} направлениях из-за дифракции. Если же источник излучения, имеющий ограниченные размеры, испускает волны в полном телесном угле, то их амплитуда по мере удаления от источника должна убывать на больших расстояниях r от источника как r^{-1} . Это следует из записанного выше условия сохранения полной энергии волны. Действительно, выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу и считая поле волны на больших расстояниях от источника сферически-симметричным относительно «точки» расположения источ-

ника, получим

$$\oint (\mathbf{S}, d\sigma) = \frac{c}{4\pi} E_{\perp} H_{\perp} 4\pi r^2 = \text{const},$$

откуда следует, что при $E_{\perp} = H_{\perp}$ обе компоненты поля убывают с расстоянием как r^{-1} . Такая зависимость поля от расстояния является характерным признаком излучения.

§ 123. ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Рассмотрим потенциалы (119.1) для системы зарядов на расстояниях, больших размеров системы. Для удобства вычислений начало отсчета, точку O поместим внутри системы (рис. XX.1):

$$R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}| = \sqrt{r_p^2 + r^2 - 2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r})} \approx r_p - (\mathbf{n}, \mathbf{r}); \quad (123.1)$$

$$r \ll r_p; \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}_p / r_p.$$

Тогда

$$t = t' + \frac{R}{c} \approx t' + \frac{r_p}{c} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{c}. \quad (123.2)$$

При разложении запаздывающих потенциалов возникают два малых параметра: геометрический r/r_p (см. 123.1) и запаздывания

$$\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{c} \omega \sim \frac{v}{c} \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1, \quad (123.3)$$

где v — характерная скорость зарядов, ω , λ — характерные частота и длина излучаемой волны. В соответствии с этим существуют две зоны электромагнитного поля: $r_p \ll \lambda$, где запаздыванием (123.3) можно пренебречь, и поля определяются квазистационарным мультипольным разложением ($r \ll r_p$, см. § 5, 34), и так называемая *волновая зона*

$$r_p \gg \lambda \gg r, \quad (123.4)$$

где основным при разложении является параметр запаздывания (123.3), а геометрическим r/r_p можно полностью пренебречь. Подчеркнем, что параметр запаздывания является малым только в случае нерелятивистских скоростей зарядов (см. (123.3)).

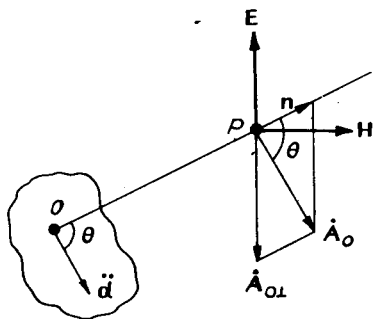


Рис. XX.1. Структура поля дипольного излучения:

$A_0 \parallel \mathbf{d}$; \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости, ортогональной \mathbf{n} , причем вектор \mathbf{H} ортогонален плоскости (\mathbf{n}, A_0) , а вектор \mathbf{E} лежит в этой плоскости.

В волновой зоне запаздывающие потенциалы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) &\approx \frac{1}{cr_p} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{r_p}{c}) dV + \frac{1}{cr_p} \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{nr}}{c} dV + \dots; \quad (123.5) \\ \varphi(\mathbf{r}_p, t) &\approx \frac{1}{r_p} \int \rho(\mathbf{r}, t - \frac{r_p}{c}) dV + \frac{1}{r_p} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{nr}}{c} dV + \\ &+ \frac{1}{2r_p} \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \left(\frac{\mathbf{nr}}{c} \right)^2 dV + \dots \end{aligned}$$

Отметим, что здесь $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \neq 0$, так как система нестационарная (ср. (34.3)). Первое слагаемое в выражении для φ есть

$$\varphi_0(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{r_p} \int \rho(\mathbf{r}, t - \frac{r_p}{c}) dV = \frac{Q}{r_p}, \quad (123.6)$$

т. е. кулоновский потенциал системы зарядов, или нулевое приближение. Второе слагаемое содержит первую степень малого параметра запаздывания и может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}_p, t) &= \frac{1}{r_p} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{nr}}{c} dV = -\frac{1}{cr_p} \int (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{j} dV = \\ &= -\frac{1}{cr_p} \left\{ \sum_{\alpha} \int \int (\mathbf{n}, \mathbf{r}) j_{\alpha} dS_{\alpha} - \int (\mathbf{n}, \mathbf{j}) dV \right\} = \frac{1}{cr_p} \int (\mathbf{n}, \mathbf{j}) dV. \quad (123.7) \end{aligned}$$

Здесь применено интегрирование по частям, а замкнутая поверхность интегрирования выбрана за пределами системы зарядов. Потенциалы φ_1 и

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{cr_p} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t - \frac{r_p}{c}) dV \quad (123.8)$$

связаны между собой соотношением

$$\varphi_1 = (\mathbf{n}, \mathbf{A}_0) \quad (123.9)$$

и имеют одинаковый порядок малости. Оба потенциала могут быть выражены через дипольный момент системы зарядов, поскольку

$$\int \mathbf{j} dV = \int \rho \mathbf{v} dV = \sum_n e_n \mathbf{v}_n = \frac{d}{dt} \sum_n e_n \mathbf{r}_n = \dot{\mathbf{d}}, \quad (123.10)$$

где e_n — заряды, образующие систему, \mathbf{d} — ее дипольный момент. Поэтому потенциалы

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr_p}; \quad \varphi_1 = \frac{(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{d}})}{cr_p} \quad (123.11)$$

называют потенциалами системы зарядов в *дипольном приближении*. Еще раз подчеркнем, что дипольный момент здесь является функцией аргумента $t' = t - r_p/c$, а потенциалы (123.11) описывают поле на большом расстоянии от системы.

Производя преобразование (123.10), следует «не терять бдительность», так как при замене $\mathbf{j} \rightarrow \rho \mathbf{v}$ мы еще работаем в так называемых эйлеровых координатах, когда \mathbf{r} — координата точки пространства, а $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — плотность заряда и скорость частиц в точке \mathbf{r} . В то же время, переходя к сумме по зарядам e_n , мы одновременно переходим к лагранжевым координатам \mathbf{r}_n — координатам частиц. Переход от эйлеровой системы к лагранжевой в (123.10) сделан лишь из соображений простоты изложения, хотя, вообще говоря, он и не обязателен. Действительно, если взять по частям интеграл по объему, содержащему излучающие заряды (токи), от $\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}$

$$\int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j} dV = \int \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \mathbf{e}_{\alpha} x_{\alpha} \frac{\partial j_{\beta}}{\partial x_{\beta}} dV = \oint \mathbf{e}_{\alpha} x_{\alpha} j_{\beta} dS_{\beta} - \int \mathbf{e}_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} j_{\beta} dV$$

и вынести поверхность интегрирования в первом интеграле справа за пределы объема, нетрудно получить следующую цепочку равенств:

$$\int \mathbf{j} dV = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j} dV = \int \mathbf{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} (\mathbf{d}),$$

которая и дает результат (123.10) в эйлеровых координатах.

§ 124. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Найдем поля, соответствующие потенциалам (123.14),

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \nabla \varphi_1.$$

Производные в этих выражениях берутся по координатам точки наблюдения \mathbf{r}_p , а дипольный момент, содержащийся в выражениях для потенциалов, зависит от r_p через запаздывающее время t' :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d} \left(t - \frac{r_p}{c} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \nabla_p \times \mathbf{A}_0 = \frac{1}{cr_p} \nabla_p \left(t - \frac{r_p}{c} \right) \times \dot{\mathbf{d}} + \frac{1}{c} \nabla_p \left[\frac{1}{r_p} \right] \times \dot{\mathbf{d}} = \\ &= -\frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}}{c^2 r_p} + O \left(\frac{1}{r_p^2} \right) \approx -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}_0. \end{aligned} \quad (124.1)$$

Здесь точкой обозначена производная по аргументу функций \mathbf{d} , \mathbf{A}_0 и она совпадает с производной по времени t .

Аналогично находим электрическое поле

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_0 - \nabla \left(\frac{1}{r_p} \right) \frac{(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{d}})}{c} - \left(\nabla \left(t - \frac{r_p}{c} \right) \right) \frac{(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{d}})}{cr_p} \approx \\ &\approx -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_0 + \frac{\mathbf{n}}{c} (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{A}}_0) = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}}_0 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (124.2)$$

Отсюда следует, что векторы \mathbf{n} , \mathbf{E} , \mathbf{H} взаимно ортогональны и образуют правую тройку. При этом вектор \mathbf{H} ортогонален плоскости векторов $\dot{\mathbf{A}}_0$, \mathbf{n} , или, что то же самое, векторов $\ddot{\mathbf{d}}$, \mathbf{n} , а оператор \mathbf{E} лежит в той же плоскости, так как из (124.2) видно, что

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} (-\dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{n}(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{A}}_0)) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_{0\perp},$$

где $\dot{\mathbf{A}}_{0\perp}$ — составляющая вектора $\dot{\mathbf{A}}_0$, ортогональная \mathbf{n} (см. рис. XX.1). Напомним, что вектор $\dot{\mathbf{A}}_0$ параллелен $\ddot{\mathbf{d}}$ (123.14). Модули векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} равны между собой и обратно пропорциональны r_p , что и обеспечивает постоянство потока энергии при $r_p \rightarrow \infty$. Это и есть *дипольное излучение*.

Для дальнейшего удобно собрать вместе формулы, описывающие дипольное излучение системы зарядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \frac{1}{cr_p} \int \mathbf{j} dV = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr_p}; \\ \mathbf{H}_d &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_0 \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r_p} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}; \\ \mathbf{E}_d &= \mathbf{H}_d \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (124.3)$$

Плотность потока энергии дипольного излучения

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_d = \mathbf{n} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r_p^2}, \quad (124.4)$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и \mathbf{n} . Поскольку поток через элементарную площадку $d\sigma = r_p^2 d\Omega$ равен $dS = (\mathbf{n}, \mathbf{S}) d\sigma$, то поток энергии в единицу телесного угла:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = (\mathbf{n}, \mathbf{S}) r_p^2 = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3}. \quad (124.5)$$

Таким образом, максимум энергии излучения лежит на направлении, ортогональном вектору $\ddot{\mathbf{d}}$ ($\theta = \pi/2$), а распределение излучения обладает аксиальной симметрией относительно этого направления (рис. XX.2).

Полный поток энергии найдем, проинтегрировав по телесному углу (Лармор, 1897 г.):

$$J = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3}. \quad (124.6)$$

Зависимость полей излучения от времени определяется функцией $\ddot{\mathbf{d}}(t)$. В частности, если последняя — гармоническая, излучение является монохроматической волной.

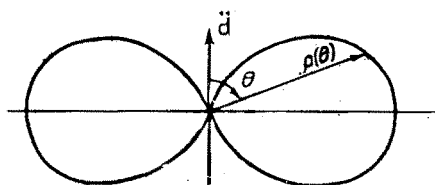


Рис. XX.2. Векторная диаграмма углового распределения интенсивности излучения диполя: $\rho(\theta)$ пропорциональна $dJ/d\Omega$.

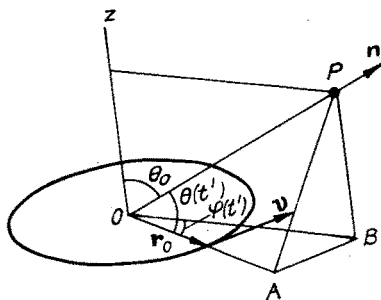


Рис. XX.3. К расчету излучения заряда, вращающегося по окружности.

Задача 1. Найти распределение интенсивности излучения заряда, вращающегося по окружности радиуса r_0 .

Дипольный момент вращающегося заряда $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_0(t')$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор, проведенный из центра окружности в точку, где находится заряд. Соответственно $\ddot{\mathbf{d}} = -\omega^2 e\mathbf{r}_0(t')$. Распределение интенсивности описывается соотношением

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta(t'),$$

где $\theta(t')$ — угол между векторами \mathbf{n} и $\mathbf{r}_0(t')$. Для нахождения среднего по времени потока излучения удобно перейти от угла $\theta(t')$ к углам θ_0 и $\varphi(t')$ (рис. XX.3): $\sin^2 \theta(t') = 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi(t')$, а среднее по времени значение $\langle \sin^2 \theta(t') \rangle = 1 - \sin^2 \theta_0/2$. Тогда

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta_0); \quad J = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{c^3}. \quad (124.7)$$

Максимум излучения ($\theta_0 = 0$) направлен вдоль оси z . Частота излучения равна частоте вращения заряда, а поляризация зависит от направления. Так, излучение вдоль оси z поляризовано циркулярно — векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} вращаются с частотой ω , излучение под углом к оси поляризовано эллиптически, а вдоль плоскости орбиты — линейно.

Излучение заряженной частицы содержится, конечно, в формулах (121.4), (121.5). Действительно, первое слагаемое в (121.4) зависит от расстояния между частицей и точкой наблюдения как r_p^{-1} , и при $\beta \ll 1$ поля могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E} \approx \frac{e}{c^2 r_p} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{e}{c^2 r_p} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}, \quad (124.8)$$

что совпадает с (124.3).

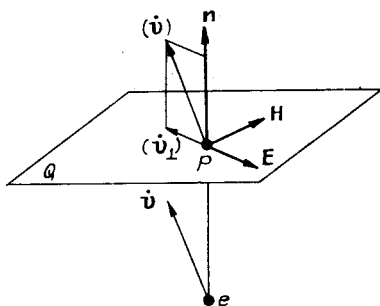
Соотношения (124.8) позволяют установить связь поляризации излучения частицы с законом ее движения. Раскрывая двойное векторное произведение в выражении для \mathbf{E}

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \dot{\mathbf{v}} = -\dot{\mathbf{v}}_{\perp},$$

видим, что вектор \mathbf{E} в точке P направлен вдоль проекции вектора

Рис. XX.4. Поляризация излучения нерелятивистского заряда.

e — положение заряда в момент t' ; P — точка наблюдения; $\dot{\mathbf{v}}$, $(\dot{\mathbf{v}}_{\perp})$ — вектор ускорения; плоскость Q ортогональна вектору \mathbf{n} .



ускорения $\dot{\mathbf{v}}$ на плоскость, ортогональную \mathbf{n} (рис. XX.4), и противоположен \mathbf{v}_{\perp} по направлению.

Задача 2. Показать, что замкнутая система заряженных частиц, у которых отношение заряда к массе одинаково, не излучает в дипольном приближении.

Для системы частиц, у которых e_n/m_n одинаково,

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_n e_n \dot{\mathbf{r}}_n = \frac{e}{m} \sum_n m_n \dot{\mathbf{r}}_n = \frac{e}{m} \cdot \mathbf{P} = \text{const},$$

где \mathbf{P} — полный импульс системы. Отсюда $\ddot{\mathbf{d}} = 0$ и дипольное излучение отсутствует.

§ 125. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Если дипольный заряд системы, а точнее вторая производная дипольного момента по времени, равняется нулю, то это еще не означает, что такая система не может излучать вообще. Действительно, обращаются в нуль поля излучения (124.3), найденные в дипольном приближении, и в этом случае нужно учесть следующие члены разложения в выражениях для потенциалов. Соответственно получим так называемое *квадрупольное* излучение, вызванное изменением квадрупольного момента, *магнитодипольное* излучение, вызванное изменением магнитного дипольного момента системы, и т. д.

Рассмотрим подробнее приближение, следующее за дипольным. Согласно (123.5), теперь нужно проанализировать потенциалы

$$A_1 = \frac{1}{cr_p} \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{c} dV = \frac{1}{c^2 r_p} \cdot \frac{d}{dt} \int (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \mathbf{j} dV; \quad (125.1)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2r_p} \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \cdot \left[\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{c} \right]^2 dV = \frac{1}{2c^2 r_p} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \rho dV. \quad (125.2)$$

Подынтегральное выражение в (125.1) можно представить в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \{ \mathbf{r}(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \}.$$

Подстановка первого слагаемого приводит к знакомому выражению для магнитного момента системы $\mathbf{m} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV / 2c$. Сумма в фигурных скобках после подстановки дает интеграл, который удобно преобразовать переходом от интегрирования по объему системы к суммированию по частицам, содержащимся в системе (ср. (123.10))

$$\int \{\mathbf{r}(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{n}, \mathbf{r})\} dV = \sum_m e_m \{\mathbf{r}_m(\mathbf{n}, \mathbf{v}_m) + \mathbf{v}_m(\mathbf{n}, \mathbf{r}_m)\} = \\ = \frac{d}{dt} \sum_m e_m \mathbf{r}_m(\mathbf{n}, \mathbf{r}_m) = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{r}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dV.$$

В результате векторный потенциал A_1 принимает вид

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{cr_p} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2c^2 r_p} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{r}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \rho dV.$$

Этому выражению можно придать более компактную форму, если добавить к нему искусственно величину

$$\delta \mathbf{A}_1 = \frac{1}{6c^2 r_p} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int n r^2 \rho dV. \quad (125.3)$$

Ниже будет показано (задача 1), что такая добавка не меняет значения поля в волновой зоне. Добавив $\delta \mathbf{A}_1$, получим

$$\mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_1 + \delta \mathbf{A}_1 = \frac{1}{cr_p} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c^2 r_p} \ddot{\mathbf{D}}, \quad (125.4)$$

где

$$\mathbf{D} = \int (3\mathbf{r}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - nr^2) \rho dV = \sum_m e_m (3\mathbf{r}_m(\mathbf{n}, \mathbf{r}_m) - nr_m^2). \quad (125.5)$$

Он представляет собой произведение единичного вектора \mathbf{n} (см. рис. XIX.1) на тензор квадрупольного момента системы зарядов

$$D_{\alpha\beta} = \sum_m e_m (3x_{m\alpha}x_{m\beta} - \delta_{\alpha\beta}r_m^2); \quad D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\beta, \quad (125.6)$$

$x_{m\alpha}$ — координаты \mathbf{r}_m .

Следует обратить внимание на то, что вектор \mathbf{D} зависит от направления \mathbf{n} , т. е. является функцией координат точки наблюдения, тогда как тензор квадрупольного момента (125.6) зависит только от распределения зарядов системы, т. е. является характеристикой системы зарядов.

Модифицированный потенциал Φ^* найдем из условия Лоренца $\text{div} \mathbf{A}_1^* + (1/c) \partial \Phi_2^* / \partial t = 0$. В результате получим

$$\Phi_2^* = \Phi_2 - \frac{1}{6c^2 r_p} \int r^2 \ddot{\rho} dV = \frac{(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{D}})}{6c^2 r_p}. \quad (125.7)$$

Задача 1. Вычислить поле в волновой зоне для потенциалов \mathbf{A}_1^* , Φ_2^* .

Аналогично (124.1) найдем $\mathbf{H}_{\mathbf{mD}} = \nabla \times \mathbf{A}_1^* = -(1/c) \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}_1^*$,

откуда
$$\mathbf{H}_{\mathbf{mD}} = \frac{1}{c^2 r_p} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c^3 r_p} \ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}. \quad (125.8)$$

Из соотношения (125.8) следует, что добавка δA_1 не дает вклада в $\mathbf{H}_{\text{шD}}$, так как $\mathbf{n} \times \mathbf{n} \equiv 0$.

Электрическое поле получим, отбрасывая члены порядка r_p^{-2} :

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_1^*}{\partial t} = \frac{1}{c^2 r_p} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}} - \frac{1}{6c^3 r_p} \ddot{\mathbf{D}};$$

$$-\nabla \varphi_2^* = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \nabla \left[t - \frac{r_p}{c} \right] = \frac{\mathbf{n} (\ddot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n})}{6c^3 r_p},$$

откуда

$$\mathbf{E}_{\text{шD}} = \frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}}{c^2 r_p} + \frac{(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{6c^3 r_p} = \mathbf{H}_{\text{шD}} \times \mathbf{n}. \quad (125.9)$$

Добавки δA_1 и $\delta \varphi_2$ не дают вклада в выражение для \mathbf{E} , так как

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial (\delta A_1)}{\partial t} = -\frac{1}{6c^3 r_p} \int \mathbf{n} r^2 \ddot{\rho} dV = \nabla (\delta \varphi_2).$$

Результаты задачи 1 показывают, что электромагнитное поле потенциалов $(\mathbf{A}_1^*, \varphi_2^*)$ представляет собой в волновой зоне плоскую волну. Значения потенциалов и поля определяются магнитным и квадрупольными моментами системы. Излучение в этом приближении принято называть магнитодипольным и квадрупольным. Его интенсивность

$$J_{\text{шD}} \propto \left[\frac{r_{\text{max}}}{\lambda} \right]^4.$$

Задача 2. Найти полную интенсивность излучения с учетом магнитодипольного и квадрупольного излучений.

Аналогично (124.4), (124.5) запишем

$$J_{\text{шD}} = \frac{c}{4\pi} r_p^2 \int H_{\text{шD}}^2 d\Omega,$$

где $H_{\text{шD}}$ описывается соотношением (125.8). Выберем для определенности систему декартовых координат так, чтобы ее ось z совпадала с вектором \mathfrak{M} (рис. XX.5). Подставляя в $J_{\text{шD}}$ выражение для поля, найдем

$$J_{\text{шD}} = \frac{1}{4\pi c^3} \int M_1^2 d\Omega + \frac{1}{144\pi c^5} \int M_2^2 d\Omega + \frac{1}{12\pi c^4} \int M_{12} d\Omega,$$

где

$$M_1^2 = |(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}|^2; \quad M_2^2 = |\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}|^2; \quad M_{12} = (M_1, M_2).$$

Проще всего вычислить первый интеграл. Раскрыв двойное векторное произведение в M_1 и возведя его в квадрат, найдем $M_1^2 = |\ddot{\mathbf{m}}|^2 - (\ddot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n})^2 = |\ddot{\mathbf{m}}|^2 \sin^2 \theta$ и соответственно интенсивность магнитодипольного излучения

$$J_{\text{ш}} = \frac{1}{4\pi c^3} \int M_1^2 d\Omega = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{m}}|^2, \quad (125.10)$$

что совпадает с выражением для электрического дипольного излучения (124.6).

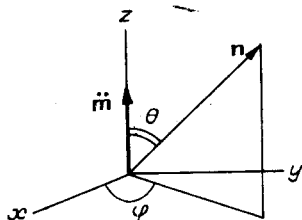


Рис. XX.5. К вычислению интенсивности магнитодипольного и квадрупольного излучений.

Наиболее громоздким является вычисление второго члена:

$$M_2^2 = |\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}|^2 = |\ddot{\mathbf{D}}|^2 - (\ddot{\mathbf{D}}, \mathbf{n})^2.$$

Вектор $\ddot{\mathbf{D}}$, согласно (125.6), имеет компоненты

$$\ddot{D}_\alpha = \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

где n_β — компоненты вектора $\mathbf{n} = \{\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta\}$. Тогда $|\ddot{\mathbf{D}}|^2 = \ddot{D}_\alpha \ddot{D}_\alpha = \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma$; $(\ddot{\mathbf{D}}, \mathbf{n})^2 = \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \ddot{D}_{\gamma\delta} n_\gamma n_\delta$.

Таким образом, при вычислении $\int M_2^2 d\Omega$ возникает сумма членов, содержащих интегралы по телесному углу от двойных или четверных произведений компонент вектора \mathbf{n} . Нетрудно убедиться, что $\int n_\alpha n_\beta d\Omega = 4\pi \delta_{\alpha\beta}/3$, а

$$\int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega = \begin{cases} \frac{4\pi}{15}, & \text{если индексы } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ совпадают попарно,} \\ \frac{4\pi}{5}, & \text{если } \alpha = \beta = \gamma = \delta, \end{cases}$$

а при любых других комбинациях этот интеграл равен нулю. С учетом этого получаем

$$\int |\ddot{\mathbf{D}}|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 \equiv \frac{4\pi}{3} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2; \quad (125.11)$$

$$\int (\ddot{\mathbf{D}}, \mathbf{n})^2 d\Omega = \frac{8\pi}{15} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 \equiv \frac{8\pi}{15} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2.$$

Чтобы прийти к этим результатам, необходимы довольно длинные вычисления с использованием свойств тензора квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}; \quad \sum_{\alpha=1}^3 D_{\alpha\alpha} = 0. \quad (125.12)$$

Из (125.11) следует, что интенсивность квадрупольного излучения

$$J_D = \frac{1}{144\pi c^5} \int M_2^2 d\Omega = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2. \quad (125.13)$$

Краткая запись $D_{\alpha\beta}^2$ означает суммирование по α, β , как это показано в (125.11).

Осталось, наконец, последнее слагаемое, содержащее M_{12} . Вычислив скалярное произведение

$$\begin{aligned} M_{12} &= ((\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}), ((\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n})) = (\ddot{\mathbf{D}}, (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n})) = \\ &= \left\{ -\ddot{D}_{1\beta} n_\beta \sin \theta \sin \varphi + \ddot{D}_{2\beta} n_\beta \sin \theta \cos \varphi \right\} \cdot |\ddot{\mathbf{m}}|, \end{aligned}$$

убеждаемся, что интеграл по телесному углу от него равен нулю (в первой сумме не обращается в нуль член, содержащий \ddot{D}_{12} , а во второй — содержащий \ddot{D}_{21} , но в силу симметрии (125.12) их разность также дает нуль). Отметим, что аналогично исчезают перекрестные члены и при вычислении интенсивности излучения с учетом всех приближений — от дипольного до квадрупольного, т. е.

$$J = \frac{2}{3c^3} |\dot{\mathbf{d}}|^2 + \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2. \quad (125.14)$$

Интенсивность магнитодипольного и квадрупольного излучений одного порядка. Это имеет следующее простое объяснение. С одной стороны, повышение мультипольности системы зарядов на единицу приводит к появлению дополнительного множителя $(v/c)^2$ в интенсивности излучения (см. разложение (123.5)). С другой стороны, величина магнитного меньше электрического мультиполя того же номера в (v/c) раз, поскольку первый создается токами $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Поэтому в интенсивности появляется малый дополнительный множитель $(v/c)^2$. Отсюда можно дать общую оценку интенсивности излучения электрических и магнитных мультиполей

$$J_l^{\text{mag}} \sim J_{l-1}^{\text{эл}} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^{2(l-1)} J_1, \quad (125.15)$$

где J_1 — интенсивность дипольного излучения (124.6).

Наличие у системы магнитных и/или электрических мультиполей зависит от ее структуры. Так, магнитодипольное излучение (как и электрическое) отсутствует у замкнутой системы, состоящей из частиц с одинаковым значением e/m (задача 2, § 124), так как для такой системы $\mathbf{m} = g\mathbf{M}$ (см. § 36) и $\dot{\mathbf{M}} = 0$.

Задача 3. Найти полную интенсивность излучения пары электронов, вращающихся в магнитном поле по одной и той же круговой орбите и расположенных диаметрально противоположно.

Дипольное излучение у такой системы отсутствует: $\mathbf{d} = 0$. Однако эта система не замкнута: частицы удерживаются магнитным полем на круговой орбите. Магнитный момент такой системы постоянен:

$$\mathbf{m}_e = 2 \frac{e_z}{2c} \int a (-e) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \omega a dV = -e_2 \omega a^2 e/c = \text{const.}$$

Поэтому $\dot{\mathbf{m}} = 0$ и магнитодипольное излучение также отсутствует. Квадрупольный момент определим, выбрав начало координат в центре окружности и направив ось z вдоль оси вращения, так что

$$x_{1,2} = \pm a \sin \omega t; \quad y_{1,2} = \pm a \cos \omega t.$$

Соответственно

$$D_{\alpha\beta} = -ea^2 \begin{pmatrix} 1 - 3 \cos 2\varphi & 3 \sin 2\varphi & 0 \\ 3 \sin 2\varphi & 1 + 3 \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \varphi = \omega t;$$

$$\ddot{D}_{\alpha\beta} = -ea^2 24\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ -\cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (125.14) получим

$$J_D = \frac{32}{5} \cdot \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}.$$

Задача 4. Оценить характерное время поляризации во внешнем магнитном поле сгустка заряженных частиц, обладающих собственным магнитным моментом. (Здесь под поляризацией понимается процесс ориентации («выстраивания») магнитных моментов частиц вдоль направления внешнего магнитного поля. Частицы можно считать не взаимодействующими друг с другом и покоящимися, тогда как их магнитные моменты прецессируют вокруг направления магнитного поля \mathbf{H} (см. § 36). Это, конечно, упрощенная модель реальной ситуации в пучке заряженных частиц, циркулирующих в накопителе.)

Из-за прецессии момента частицы излучают, так что потенциальная энергия магнитного момента во внешнем поле уменьшается:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = -J_{\text{ш}} = -\frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{m}}|^2.$$

Используя связь между магнитным и механическим моментами $\mathbf{m} = g\mathbf{M}$ и выражение для угловой скорости прецессии (см. § 36) $\mathbf{\Omega} = -g\mathbf{H}$, найдем $d(\mathbf{m}, \mathbf{\Omega})/dt = -2g|\ddot{\mathbf{m}}|^2/3c^3$. Величина $\ddot{\mathbf{m}}$ задана уравнением прецессии магнитного и механического моментов во внешнем магнитном поле $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$, откуда $\ddot{\mathbf{m}} = g\dot{\mathbf{M}} = g\mathbf{m} \times \mathbf{H} = \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{m}}$. при этом мы считаем, конечно, что влияние излучения на прецессию мало, т. е. поворот момента в пространстве (поляризация) вследствие потери энергии на излучение происходит медленно по сравнению со скоростью прецессии. Отметим, что магнитодипольное излучение уносит момент импульса частицы.

Подставляя в последнее уравнение выражение для $\ddot{\mathbf{m}}$, получим

$$\ddot{\mathbf{m}} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{m}}); \quad |\ddot{\mathbf{m}}|^2 = |\mathbf{m}|^2 \Omega^2 - (\mathbf{m}, \mathbf{\Omega})^2,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}) = -\frac{2g}{3c^3} \Omega^2 (m^2 \Omega^2 - (\mathbf{m}, \mathbf{\Omega})^2),$$

или

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1 - X^2}{\tau}; \quad X \equiv \cos \theta = (\mathbf{m}\mathbf{\Omega}/m\Omega); \quad \tau^{-1} = \frac{2g}{3c^3} m\Omega^3, \quad (125.16)$$

θ — угол между направлениями поля и момента. Приняв для простоты $X(t=0) = 0$, получим решение в виде

$$X(t) = -\text{th}(t/\tau). \quad (125.17)$$

Таким образом, τ есть характерное время для перехода момента из состояния «поперек поля» ($X = 0$, $\theta = \pi/2$) в состояние «вдоль поля» ($X = -1$, $\theta = \pi$). Это характерное время поляризации можно записать в виде

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^3}{m g^4 H^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^3}{M g^5 H^3}.$$

Если сгусток частиц движется по некоторой траектории в магнитном поле H_0 ускорителя-накопителя, то время поляризации сгустка в лабораторной системе, где $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{v}$,

$$\tau_{\text{лаб}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^3}{M g^5 \gamma^2 H_0}. \quad (125.18)$$

Излучение электромагнитного поля системой заряженных частиц приводит к механическому воздействию поля излучения и на саму систему, т. е. появляется некоторая сила «самодействия». Для ее вычисления можно поступить следующим образом: найти поле в зоне частиц и выяснить характер силы, действующей на частицы с его стороны. Для этого воспользуемся выражением для электрического поля движущегося заряда (121.4), которое, раскрыв двойное векторное произведение, запишем в виде ($\beta \ll 1$)

$$\mathbf{E} = \frac{e}{R_e^2} \cdot \frac{\mathbf{n} - \beta}{(1 - \beta \mathbf{n})^3} + \frac{e}{c} \cdot \frac{\mathbf{n}(\dot{\mathbf{n}}, \beta) - \dot{\beta}}{R_e}.$$

Напомним, что все величины в правой части равенства даны в момент времени $t' = t - R_e(t')/c$, и нас интересует предел $R_e \rightarrow 0$. Используя ряд

$$f(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial t'^n} \Big|_{t'=t} \left(-\frac{R_e}{c} \right)^n$$

и соотношения (см. рис. XIX.3)

$$\mathbf{R}_e(t') = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e(t'); \quad \dot{\mathbf{R}}_e = -\mathbf{v}; \quad \ddot{\mathbf{R}}_e = -\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_e)}{R_e},$$

разлагая функцию $E(t')$ и оставляя только члены, не исчезающие при $R_e \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= e \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R_e^2} - \frac{3\mathbf{n}(\dot{\beta}, \mathbf{n}) - \dot{\beta}}{2cR_e} - \frac{\ddot{\mathbf{v}} - 3\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{n})}{3c^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(\dot{\beta}, \mathbf{n}) - \dot{\beta}}{cR_e} + \frac{\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{n})}{c^3} \right\} = \\ &= \frac{e\mathbf{n}}{R_e^2} - e \frac{\mathbf{n}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) + \dot{\mathbf{v}}}{2c^2R_e} + \frac{2}{3} \frac{e\ddot{\mathbf{v}}}{c^3}. \end{aligned} \quad (126.1)$$

Прежде чем анализировать этот результат, отметим, что его можно получить и из запаздывающих потенциалов, производя должным образом их разложение и вычисляя поле (задача 1).

Задача 1. Получить выражение для поля (126.1) из запаздывающих потенциалов.

Произведем разложение потенциалов

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV; \quad \varphi(\mathbf{r}_p, t) = \int \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV; \quad R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}$$

по параметру $\omega R/c \ll 1$, где ω — характерная частота движения зарядов. В ре-

результате разложения найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) &\approx \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t)}{R} dV - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j}(t) dV; \\ \varphi(\mathbf{r}_p, t) &\approx \int \frac{\rho(t)}{R} dV - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(t) dV + \\ &+ \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho(t) dV - \frac{1}{6c^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2\rho(t) dV. \end{aligned}$$

Разложение здесь обрвано на членах одного и того же порядка. Это можно проследить ниже в выражениях для поля. Применим теперь полученные выражения для случая точечного заряда $\rho(t) = e \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$, где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор из начала координат в точку, где находится заряд в момент времени t . Введем также радиус-вектор из точки, где находится заряд, в точку наблюдений $\mathbf{R}_e(t) = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0(t)$. Теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) &\approx \frac{e\mathbf{v}(t)}{cR_e(t)} - \frac{e\dot{\mathbf{v}}(t)}{c^2}; \\ \varphi(\mathbf{r}_p, t) &\approx \frac{e}{R_e(t)} + \frac{e}{2c^2} \cdot \frac{d^2 R_e}{dt^2} - \frac{e}{6c^3} \cdot \frac{d^3 R_e^2}{dt^3}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в исходном выражении для скалярного потенциала обратилось в нуль, так как $\int \rho(t) dV = e = \text{const}$.

Теперь вычислим электрическое поле этих потенциалов, учитывая, что $\frac{dR_e}{dt} = -\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_e)}{R_e}$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{e\dot{\mathbf{v}}}{c^2 R_e} - \frac{e\mathbf{v}}{c^2 R_e^3} (\mathbf{v}, \mathbf{R}_e) + \frac{e\ddot{\mathbf{v}}}{c^3}; \\ -\nabla\varphi &= \frac{e\mathbf{R}_e}{R_e^3} - \frac{e}{2c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\mathbf{R}_e}{R_e} \right) + \frac{e}{3c^3} \cdot \frac{d^3 \mathbf{R}_e}{dt^3}; \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\mathbf{R}_e}{R_e} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{v}}{R_e} + \frac{\mathbf{R}_e}{R_e^3} (\mathbf{v}, \mathbf{R}_e) \right) = -\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R_e} - 2 \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}, \mathbf{R}_e)}{R_e^3} + \\ &+ 3 \frac{\mathbf{R}_e(\mathbf{v}, \mathbf{R}_e)^2}{R_e^5} + \frac{R_e}{R_e^3} (\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{R}_e) - \frac{R_e}{R_e^3} v^2. \end{aligned}$$

Отбрасывая слагаемые порядка v^2/c^2 и выше, получим электрическое поле (126.1).

Первое из слагаемых в (126.1) является кулоновским полем заряда e , второе описывает дополнительное поле, связанное с ускорением частицы («инерция поля»), наконец, третье слагаемое дает тормозящую силу

$$\mathbf{f}_T = e\mathbf{E}_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{c^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e \ddot{\mathbf{d}}}{c^3}. \quad (126.2)$$

Эта тормозящая сила — довольно «хитрая». Если попытаться найти закон движения заряда только под ее действием, проинтегрировав

уравнение движения

$$m\ddot{x} = f_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \dots}{c^3} x,$$

то получится нелепый результат: заряд самоускоряется, и его скорость возрастает экспоненциально с характерным временем τ , так что

$$v(t) = v_0 e^{t/\tau}; \quad \tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3}.$$

Объяснение парадокса состоит в следующем. Выражение (126.2) справедливо при условии $\omega R_e/c \ll 1$, которое в случае самоускорения ($\omega \sim \tau^{-1}$) принимает вид $R_e/r_e \ll 1$, где $r_e = e^2/mc^2$ — классический радиус частицы (например, электрона). Но при $R_e \ll r_e$ масса электрического поля частицы превышает ее полную массу (см. § 55), что недопустимо. Все это означает, что тормозящая сила не может быть «самостоятельной», а полученное для нее выражение справедливо, если только $f_T \ll f_{\text{внеш}}$, и производная по времени от ускорения частицы $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{f}}_{\text{внеш}}$.

Задача 2. Найти время жизни «атома Резерфорда» (протон, вокруг которого по круговой орбите радиуса r_0 вращается электрон).

Вспомнив кинематические соотношения для скорости, ускорения и производной ускорения заряда, вращающегося по окружности, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\varphi \omega r$, $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{e}_r \omega^2 r$, $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{e}_\varphi \omega^3 r$, получим выражение для силы торможения

$$\mathbf{f}_T = -\mathbf{e}_\varphi \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega^3 r}{c^3}.$$

Движение электрона под действием силы торможения считаем медленным по отношению к вращению, т. е. $\dot{r} \ll \omega^2 r$. Тогда из уравнений движения

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -\frac{e^2}{r^2}, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (m\omega r^2) = -f_T$$

получим $\omega^2 \approx \frac{e^2}{mr^3}$; $\frac{dr}{dt} \approx -\frac{4}{3} \cdot \frac{cr_e^2}{r^2}$. Отсюда $r^3(t) = r_0^3 - 4cr_e^2 t$, и время жизни

атома Резерфорда ($r_0 = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см, $r_e = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см) $\tau = \frac{r_0^3}{4cr_e^2} \approx 1,3 \cdot 10^{-11}$ с.

Заметим, что требование малости тормозящей силы излучения по сравнению с внешними силами, как правило, хорошо выполняется. Действительно, если электрон под действием внешней силы совершает циклическое движение с характерной частотой ω , то

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} \gg \mathbf{f}_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}},$$

если $\omega \ll \frac{3}{2} \cdot \frac{mc^3}{e^2} \approx 1,5 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-1}$, что соответствует электромагнитным волнам с $\lambda \approx 1,2 \cdot 10^{-12}$ см. Это очень жесткое рентгеновское

излучение (энергия кванта излучения $\hbar\omega \approx 100 \text{ МэВ}$), для которого классическое приближение заведомо не работает, и нужно учитывать квантовый характер процесса излучения.

При обсуждении природы силы торможения излучением естественно возникает вопрос о балансе энергии. Для его выяснения вычислим мощность силы торможения

$$P = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\mathbf{f}_T, \mathbf{v}) dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) - |\dot{\mathbf{v}}|^2 \right) dt = \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{\Delta (\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v})}{\tau} - \langle |\dot{\mathbf{v}}|^2 \rangle \right).$$

Первое слагаемое в случае стационарного движения, когда \mathbf{v} и $\dot{\mathbf{v}}$ изменяются в ограниченных пределах, обращается в нуль при $\tau \rightarrow \infty$, так что

$$\langle P \rangle = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \langle |\dot{\mathbf{v}}|^2 \rangle = -\langle J \rangle. \quad (126.3)$$

Таким образом, средняя по времени мощность силы торможения равна интенсивности излучения. Мгновенные значения разности этих величин могут быть и не равны нулю. Физически это означает, что поле излучения еще не оторвалось от заряда, взаимодействует с ним. Подобную ситуацию иллюстрирует задача 3.

Разницу между мощностью излучения и мощностью тормозящей силы (с обратным знаком, см. (126.3)) можно также интерпретировать как колебания энергии W_B некоторого дополнительного («буферного») поля в неволновой зоне. Тогда полный баланс энергии имеет вид $J = -\langle \mathbf{f}_T, \mathbf{v} \rangle = -W_B$, откуда

$$W_B = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}). \quad (126.4)$$

Задача 3. Частица с зарядом e и массой m пролетает через участок однородного электрического поля, совпадающего по направлению со скоростью частицы. Изменение скорости частицы за время пролета τ мало: $\dot{v}\tau \ll v$. Частица ускоряется в однородном поле и, стало быть, излучает. Однако ускорение частицы постоянно, поэтому $\ddot{v} = 0$ и тормозящая сила отсутствует. Выяснить, выполняется ли в данном случае рассмотренный выше баланс энергии.

Производная ускорения, очевидно, отлична от нуля на границах участка с электрическим полем:

$$\ddot{v} = \dot{v}_0 (\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)), \quad \dot{v}_0 = \frac{eE}{m}.$$

Здесь t_1, t_2 — моменты прохождения частицей границ поля. Границы приняты тонкими, т. е. протяженность областей нарастания и спада поля мала, так что $(dv/dx)\Delta x \ll v$, или $\Delta x \ll v^2/\dot{v}$. Работа силы торможения при пролете участка с полем

$$W_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T v dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot v_0 \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)) v dt = \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot v_0 (v_1 - v_2) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} (v_0)^2 \tau,$$

где τ — время пролета. Нетрудно видеть, что $-W_T = W_{изл}$, т. е. баланс энергии выполняется. Этот факт можно интерпретировать так: излучение не отрывается от частицы в течение всего времени ее равномерного ускорения τ . В таких случаях говорят о длине формирования излучения. Здесь эта длина равна протяженности участка электрического поля $l_{форм} = v\tau$.

Задача 4. Кольцевой (тороидальный) пучок релятивистских электронов, циркулирующих в постоянном и однородном магнитном поле, ионизирует остаточный газ в вакуумной камере, и ионы газа компенсируют электрическое поле электронного пучка. Малый радиус тора a много меньше большого радиуса R (он же — средний радиус орбиты). Под действием собственного магнитного поля электронный пучок сжимается — радиус a уменьшается (пинч-эффект, см. § 30). Сжатие пучка можно представить себе следующим образом: электроны, вращаясь по круговой траектории во внешнем магнитном поле, совершают под действием собственного магнитного поля поперечные колебания. Эти колебания сопровождаются излучением, что приводит к затуханию колебаний и сжатию пучка. Оценить характерное время сжатия пучка под действием излучения (это модель релятивистского стабилизированного пучка Будкера).

Будем считать, что в лабораторной системе электрическое поле пучка скомпенсировано ионами так, что плотности ионов n_i и электронов пучка n_e равны: $n_i = n_e$. В сопутствующей системе, где средняя по пучку скорость электронов равна нулю («система частиц»), плотности частиц есть $n'_e = n_e/\gamma$, $n'_i = \gamma n_e$, а электрическое поле внутри пучка $E' = 2\pi e (n'_i - n'_e) r = 2\pi e n_e \beta^2 \gamma r$. Здесь r — расстояние от оси пучка, ионы для простоты считаем однозарядными. В системе частиц электроны нерелятивистские, так что влиянием магнитных полей на их поперечное движение можно пренебречь. Поэтому уравнение поперечного движения электронов в системе частиц имеет вид $m\ddot{r} = eE' + f_T$. Подставляя сюда выражения для силы торможения и E' , получим $\ddot{r} - \alpha\dot{r} + \omega^2 r = 0$, $\alpha = 2r_e/3c$, $\omega^2 = 2\pi e n_e \beta^2 \gamma/m$. Решение ищем в виде $r(t') = r_0 e^{\kappa t'}$ и для κ получаем уравнение $\kappa^2 - \alpha\kappa + \omega^2 = 0$, или $\kappa = \pm i\omega/\sqrt{1 - \alpha\kappa}$. Сила торможения мала по сравнению с упругой силой eE' , если $\alpha \ll \omega^{-1}$, $|\kappa| \approx \omega$. Поэтому приближенно можно записать

$$\kappa \approx \pm i\omega \left(1 + \frac{\alpha\kappa}{2}\right) \approx \pm i\omega - \frac{\alpha\omega^2}{2}.$$

Подставив это выражение в соотношение для $r(t')$, найдем характерное время затухания колебаний в системе частиц $\tau' = 2/\alpha\omega^2$. В лабораторной системе время затухания

$$\tau = \gamma\tau' = \frac{3}{2\pi c r_e^2 n_e \beta^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{mc^3}{\beta e \Gamma} \cdot \frac{a^2}{c r_e}.$$

Для пучка релятивистских электронов ($\beta = 1$) с током $I \sim mc^3/e = 17\,000$ А и поперечным размером $a \sim 1$ см время самосжатия составит примерно 3 мин. Отметим, что при решении этой задачи мы предполагали излучение некогерентным, т. е. каждый электрон излучает независимо. Последнее объясняется флуктуациями плотности электронов в пучке (§ 134).

При движении заряженной частицы по окружности излучается не только энергия, но и момент импульса. В этом проще всего убедиться, используя рассмотренную выше силу торможения (126.2), которая в данном случае направлена против скорости. Тогда отношение излученной энергии W к излученному моменту M

$$\frac{\Delta W}{\Delta M} = \frac{f_T v}{f_T r_0} = \omega, \quad (126.5)$$

где r_0 — радиус орбиты, ω — частота обращения частицы и частота

излучаемой волны. Поскольку энергия кванта $W_1 = \hbar\omega$, соотношение (126.5) показывает, что его момент импульса (точнее, проекция момента на направление нормали к плоскости орбиты) $M_1 = \hbar$.

Рассмотрим теперь излучение l частиц, равномерно расположенных по окружности радиуса r_0 и вращающихся с угловой скоростью ω . Излучение такой системы есть излучение 2^l -поля (см. § 125). С другой стороны, частота излученной волны $\omega_l = l\omega$, так как при повороте на угол $2\pi/l$ распределение зарядов не изменяется. Тогда из соотношения (126.5) следует, что момент излученного кванта равен в этом случае $M_l = W/\omega = \hbar l$.

Глава XXI

ГЕНЕРАЦИЯ И ИНДИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РАДИОДИАПАЗОНЕ

При обсуждении основных методов генерации радиоволн в § 59 мы отмечали, что их источники — это различного рода радиотехнические устройства, конструкции которых существенно зависят от длины волны генерируемого излучения. Оконечным или выходным элементом любого излучателя в радиодиапазоне является антенна — собственно излучающий элемент. Приемники радиоизлучения также обязательно имеют антенну, служащую для «улавливания» радиосигналов, усиливаемых и обрабатываемых в последующих каскадах приемника. Вследствие обратимости уравнений электродинамики основные характеристики антенны, такие как избирательность и направленность, одинаковы как при излучении, так и при приеме.

Цель данной главы — дать общие представления об антеннах как излучающих устройствах. Поэтому мы не стремимся к рассмотрению всех характеристик каждого типа антенн.

§ 127. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ТИПЫ АНТЕНН

В радиотехнике антенны различают в соответствии с их физическими характеристиками и конструктивными особенностями. Если положить в основу классификации физические принципы, способ формирования излучения в антенне, то все эти радиотехнические сооружения можно разделить на три группы.

Антенны первой группы конструктивно выполняются в виде набора линейных проводников, в которых возбуждается стоячая (вибраторные антенны) или бегущая (антенны бегущей волны) волна электрического тока. Во второй группе излучателями служат

отверстия в стенках волноводов, в которых возбуждено переменное электромагнитное поле (акустические и щелевые антенны), или отражающие поверхности — зеркала (оптические антенны). И наконец, в интерферометрах отдельные излучатели объединены в различные интерференционные схемы, позволяющие резко улучшить направленность их излучения.

Первая важная характеристика антенны — ее частотные свойства, т. е. область рабочих длин волн (частот) того или иного типа антенн. Вторая — коэффициент передачи антенны, равный отношению полной интенсивности излучения, усредненной по периоду, к средней мощности, подводимой к антенне. Третья — распределение излучения антенны по направлению. Принятой формой описания здесь являются так называемые диаграммы направленности излучения. Именно на этой характеристике мы и сосредоточим основное внимание.

При конструировании радиопередатчиков и приемников также важно знать, что представляет собой система с точки зрения нагрузки усилителей. Для этого вводят понятие сопротивления излучения

$$R_{\text{изл}} = \langle P_{\text{изл}} \rangle / \langle I^2 \rangle = 2 \langle P_{\text{изл}} \rangle / I_{\text{ампл}}^2 \quad (127.1)$$

Здесь $\langle P_{\text{изл}} \rangle$ — средняя излучаемая мощность, $\langle I^2 \rangle$ — среднеквадратичное значение тока на входе антенны.

§ 128. ПРОВОЛОЧНЫЕ АНТЕННЫ

Антенны этой группы широко распространены, что связано с их относительной простотой и пригодностью для работы в значительной части радиодиапазона. Основной элемент такой антенны — линейный проводник, в котором специальным образом возбуждается волна переменного тока радиочастоты. Мы рассмотрим характеристики основных представителей таких антенн.

1. «Точечный диполь». В простейшем варианте эта вибраторная антенна представляет собой два отрезка проводника равной длины, расположенных на одной прямой и подключенных к выходу передатчика (входу приемника), как показано на рис. XXI.1. В «усах» антенны, имеющих длину $l \ll \lambda$, возбуждается стоячая волна тока $I(x, t) = I_0 e^{-i\omega t} \sin k(l - |x|) / \sin kl$. Фактически такое устройство представляет собой двухпроводную линию, оба проводника которой развернуты в одну прямую. Ток в цепи замыкается через распределенную емкость между «усами».

Излучение антенны проще всего описать, вычислив ее дипольный момент $d = \int \rho x dV$ или

$$\dot{d} = \int \dot{\rho} x dV = - \int \frac{dI}{dx} x dx \quad (128.1)$$

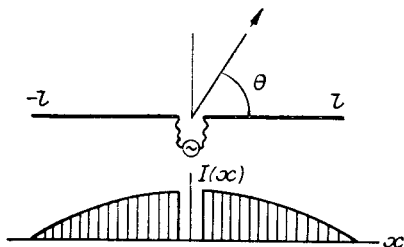


Рис. XXI.1. Антенна «точечный диполь» и распределение тока в ней.

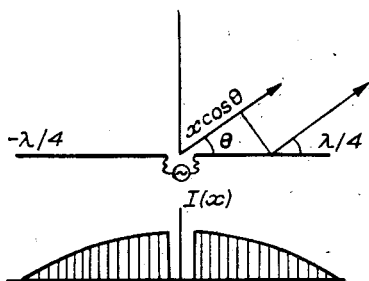


Рис. XXI.2. Антенна «полуволновой вибратор» и распределение тока в ней.

Воспользовавшись условием $l \ll \lambda$ и представив ток в виде $I(x) \approx I_0 e^{-i\omega t} (1 - |x|/l)$, найдем

$$\ddot{d} = -i\omega I_0 e^{-i\omega t} l = -ic I_0 e^{-i\omega t} kl. \quad (128.2)$$

Векторы \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$ и $\ddot{\mathbf{d}}$ параллельны оси x , поэтому мы можем ограничиться рассмотрением скалярных выражений. Пространственное распределение излучения такое же, как и у диполя, ось которого параллельна оси x . Подставив (128.2) в соотношение (124.5), получим

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{4\pi c} \cos^2 \omega t \cdot (kl)^2 \sin^2 \theta. \quad (128.3)$$

После усреднения по времени и интегрирования по телесному углу

$$\langle J \rangle = \frac{I_0^2}{3c} (kl)^2 = \frac{4\pi^2}{3c} I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (128.4)$$

Таким образом, максимум излучения дипольной антенны соответствует направлению, ортогональному ее «усам», а распределение интенсивности симметрично относительно оси антенны. Сопротивление излучения в этом случае

$$R_{\text{изл}} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ Ом} \quad (128.5)$$

зависит от длины волны.

Отметим, что дипольные антенны — широкополосные, т. е. могут работать в относительно широком диапазоне длин волн, хотя их эффективность быстро падает с ростом длины волны. Тем не менее «точечные» диполи применяются не только как отдельные антенны, но и как основной элемент более сложных антенных устройств в СВ, ДВ и СДВ диапазонах.

2. *Полуволновой вибратор* отличается от дипольной антенны тем, что длина его «усов» выбирается равной половине длины волны излучения: $2l = \lambda/2$. В этом случае формулы дипольного излучения прямо применять нельзя, так как размер излучающей систе-

мы сравним с длиной волны, и необходимо учитывать интерференцию излучения от отдельных частей антенны. Распределение тока в антенне теперь принимает вид ($kl = \pi/2$)

$$I(x, t) = I_0 e^{-i\omega t} \cos kx.$$

Каждый элемент антенны dx можно считать точечным излучателем, поле которого в волновой зоне описывается дипольным векторным потенциалом

$$d\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_p, t) = \frac{\mathbf{e}_x}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c) - i\varphi(x)} I_0 \cos kx dx. \quad (128.6)$$

Здесь $\varphi(x) = kx \cos \theta$ — сдвиг или запаздывание фазы волны, исключаемой элементарным излучателем dx (рис. XXI.2). Этот сдвиг фазы и учитывает интерференцию волн от элементарных излучателей. Суммарное поле в волновой зоне описывается вектор-потенциалом

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_x \frac{I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c)} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-ikx \cos \theta} \cos kx dx.$$

Записав этот интеграл в виде

$$\text{Int} = \frac{1}{2k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\xi \cos \theta} (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) d\xi,$$

найдем

$$\text{Int} = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{k \sin^2 \theta}, \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_x \frac{2I_0}{ckr_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)}. \quad (128.7)$$

Для нахождения полей в волновой зоне воспользуемся соотношением (124.1), которое справедливо в данном случае, поскольку по-прежнему $r_p \gg \lambda$. Поэтому

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_p, t) = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}_0 = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x) \frac{2I_0}{r_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)}; \quad (128.8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

Нетрудно видеть, что излучение линейно поляризовано, причем вектор \mathbf{H} направлен ортогонально плоскости векторов \mathbf{e}_x , \mathbf{n} . Поскольку $|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x| = \sin \theta$, модуль комплексного вектора

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I_0}{cr_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}.$$

Соответственно поток энергии в единицу телесного угла, усреднен-

ный по времени,

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} r_p^2 |\mathbf{H}|^2 \left\langle \cos^2 \omega \left(t - \frac{r_p}{c} \right) \right\rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \right]^2. \quad (128.9)$$

Полученное соотношение описывает пространственное распределение излучения данной антенны. Оно, как и в случае точечного диполя, аксиально-симметрично, имеет максимум по углу $\theta = \pi/2$:

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle_{\max} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \quad (128.10)$$

и обращается в нуль при $\theta \rightarrow 0$. Полуволновой вибратор обладает большей направленностью излучения, чем «точечный» диполь.

Полный поток энергии излучения получим, как и прежде, проинтегрировав (128.9) по телесному углу:

$$\langle J \rangle = \frac{I_0^2}{c} \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} d\xi; \quad \xi = \cos \theta.$$

Интеграл в этом выражении сводится к известным определенным интегралам

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos^2(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos \eta}{\eta} d\eta = \frac{1}{2} (C + \ln 2\pi - \text{Ci}(2\pi)) = 1,22,$$

где $\eta = \pi\xi$, $C = 0,5772$ — постоянная Эйлера, $\ln 2\pi = 1,837$, $\text{Ci}(2\pi) = 0,02$ — значение интегрального косинуса при $\eta = 2\pi$. В результате $\langle J \rangle = 1,22 I_0^2/c$, откуда сопротивление излучения для полуволнового вибратора $R_{\text{изл}} = 2,44/c \approx 73$ Ом. По этой причине волновое сопротивление стандартных коаксиальных кабелей, которыми антенны такого типа соединяются с передатчиками (приемниками), равно 75 Ом.

Ясно, что полуволновой вибратор — «монохроматическая» антенна, наиболее эффективно работающая на резонансной частоте ($\lambda = 4l$).

3. *Петлевой вибратор* (рис. XXI.3) является модификацией полуволнового устройства и эквивалентен двум полуволновым вибраторам, поставленным рядом. Из-за емкостной связи между вибраторами токи в них направлены в одну и ту же сторону, а не в противоположные, как это было бы в квазистационарном случае. Поэтому для расчета излучения этой антенны можно использовать формулы (128.8) — (128.10), заменив I_0 на $2I_0$. Диаграмма направленности излучения сохраняет свой вид; максимум потока энергии и полный поток вчетверо больше (при том же I_0), чем у полуволнового вибратора, а сопротивление излучения $R_{\text{изл}} \approx 292$ Ом.

4. *Антенна «волновой канал», или «директорная антенна»* (от англ. director — направляющий), состоит из нескольких вибраторов.

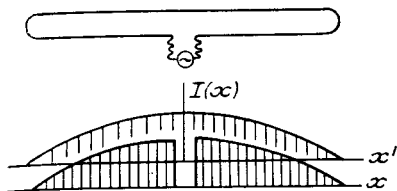


Рис. XXI.3. Антенна «петлевой вибратор» и распределение тока в ней.

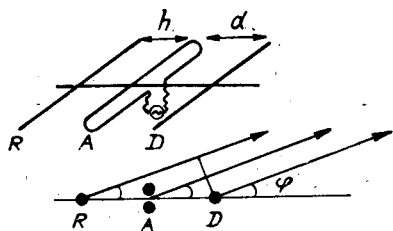


Рис. XXI.4. Антенна «волновой канал». Формирование излучения в плоскости, ортогональной «усам».

Рассмотрим простейший вариант такой антенны (рис. XXI.4): петлевой вибратор A и два полуволновых R и D , размещенных в одной плоскости. Отличительная особенность этой антенны — острая направленность излучения в обеих плоскостях, возникающая в результате интерференции полей излучения каждого элемента. Для описания пространственного распределения излучения мы можем воспользоваться известным уже выражением для поля одиночного полуволнового вибратора (128.8) и сложить поля всех излучателей с учетом разности фаз между ними:

$$E(\theta, \varphi) = E_R e^{ikh \sin \theta \cos \varphi} + E_A + E_D e^{-ikd \sin \theta \cos \varphi}, \quad (128.11)$$

где θ, φ — углы сферической системы координат, ось z которой направлена параллельно «усам» антенны, а начало координат находится в центре петли A , h и d — расстояния между вибраторами, $h \sin \theta \cos \varphi$ и $-d \sin \theta \cos \varphi$ — разности хода. Будем считать, что амплитуды токов во всех трех излучателях одинаковы, а их фазы сдвинуты относительно друг друга. Тогда

$$E(\theta, \varphi) = E_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-i\omega t} \left(e^{i\psi_1} + 2 + e^{i\psi_2} \right); \quad (128.12)$$

$$\psi_1 = kh \sin \theta \cos \varphi + \delta_R; \quad \psi_2 = -kd \sin \theta \cos \varphi + \delta_D,$$

где E_0 — амплитуда полей, δ_R, δ_D — сдвиги фаз, которые, как и расстояния между вибраторами, выбираются так, чтобы

$$\delta_D = -\delta_R = kh = kd = \pi/2. \quad (128.13)$$

В результате суммарное поле излучения антенны принимает вид

$$E(\theta, \varphi) = 2E_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-i\omega t} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right) \right),$$

а пространственное распределение интенсивности излучения описывается выражением

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{2I_0^2}{\pi c} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right) \right]^2. \quad (128.14)$$

Максимум излучения антенны лежит на направлении $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ и равен

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle_{\max} = \frac{8I_0^2}{\pi c}$$

т. е. в 16 раз больше интенсивности излучения одиночного вибратора при том же значении I_0 — это результат сложения полей, а не интенсивностей.

У антенны «волновой канал» излучение в сторону вибратора R («рефлектора») резко ослаблено и направлено преимущественно в сторону директора D .

В антеннах передающих станций малой мощности и в приемных антеннах обычно директор и рефлектор выполняются как пассивные вибраторы — токи в них возбуждаются за счет электромагнитной связи (емкостной или индуктивной) с основной антенной A . Для этого нужно директор сделать несколько короче A (индуктивный характер связи, запаздывание по фазе), а рефлектор — длиннее A (емкостный характер связи, опережение). Более сложные антенны, обладающие еще большей направленностью, имеют один рефлектор и несколько директоров.

Антенны, описанные в п. 2—4, применяются главным образом в УКВ и СВЧ диапазонах и отчасти в КВ диапазоне. Это связано с естественными трудностями создания конструкций таких антенн для больших длин волн.

5. *Штыревая антенна* представляет собой наиболее простой в техническом отношении вариант вибраторной антенны. Ею обычно снабжают портативные радиостанции. По принципу работы эти антенны являются все тем же дипольным излучателем, точнее, его половинкой, а роль второй половины играет «изображение» антенны, возникающее из-за ее расположения над проводящей поверхностью Земли (рис. XXI.5). Иногда антенну дополняют «земляным» проводником, который в радиотехнике принято называть «противовесом». Такой противовес существенно улучшает приемно-передающие характеристики радиостанции. Удельное сопротивление различных земляных пород колеблется в очень широких пределах — от 100 кОм·м для сухих скальных пород до 0,3 Ом·м для осадочных (укажем для сравнения, что удельное сопротивление меди составляет 1,7 мкОм·см). В антеннах стационарных радиостанций такие проводники-противовесы располагают веерообразно в поверхностном слое земли под мачтой, повышая тем самым проводимость земли и соответственно качество токов «изображения». Если длина штыря антенны $l \ll \lambda/4$, то антенна работает как «точечный» диполь. При $l = \lambda/4$ антенна является полуволновым вибратором. Соответственно излучение такой антенны имеет те же характеристики, что и у названных излучателей.

Разновидность штыревой антенны — антенны типа «нагруженный вибратор». К ним относятся широко распространенные в практике антенна с горизонтальным проводником и зонтичная антенна (рис. XXI.6). В них излучателем является вертикальная часть ан-

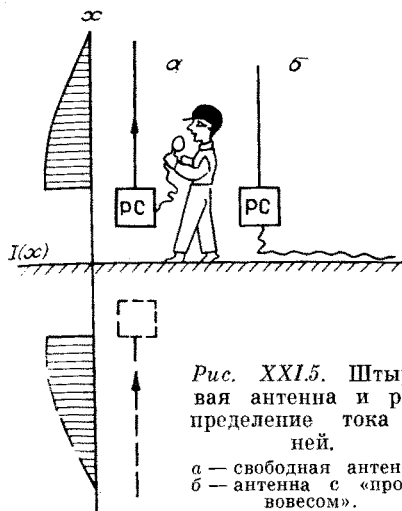


Рис. XXI.5. Штыревая антенна и распределение тока в ней.
 а — свободная антенна;
 б — антенна с «противовесом».

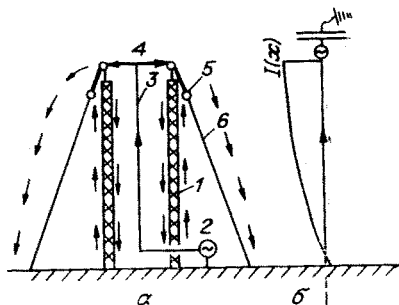


Рис. XXI.7. Антенна с верхним питанием (а) и ее эквивалентная схема (б):

1 — мачта антенны, 2 — радиопередатчик; 3 — проводник, питающий систему верхних проводников 4, соединенных через изоляторы 5 с оттяжками 6 мачты 4. Стрелками на рисунке а показано направление тока по антенне. Распределение тока на рисунке б соответствует случаю $2l = 0,53 \lambda$ (антифидинговая антенна).

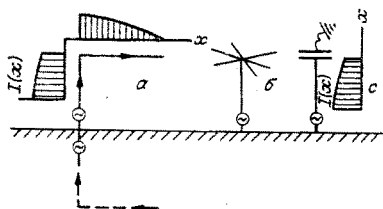


Рис. XXI.6. Антенны типа «нагруженный вибратор».

а — антенна с горизонтальным проводником и распределение тока в ней; б — зонтичная антенна; с — ее эквивалентная схема.

тены (так называемый «спуск»), тогда как горизонтальный проводник и «зонтик» существенного вклада в излучение не дают — горизонтальный проводник из-за интерференции его излучения с «излучением» изображения (рис. XXI.6, а), а «зонтик» из-за малой длины его «спиц». Однако оба элемента изменяют распределение тока по вертикальной части антенны. Так, если длина горизонтального проводника равна l_g , а длина вертикальной части $h \ll \lambda$, то вместо (128.2), (128.4) получим ($l = h + l_g$)

$$\begin{aligned} \dot{j} &= - \int_{-h}^h \frac{dI}{dx} x dx = \frac{2I_0 k e^{-i\omega t}}{\sin kl} \cdot \int_0^h \cos k(l-x) x dx = \\ &= 2I_0 e^{-i\omega t} \frac{\cos kl_g - \cos kl - kh \sin kl_g}{k \sin kl}; \\ \langle J \rangle &= \frac{4I_0^2}{3c} \cdot \left[\frac{\cos kl_g - \cos kl - kh \sin kl_g}{\sin kl} \right]^2. \end{aligned}$$

В области $l \ll \lambda$ интенсивность излучения возрастает по мере уве-

личения l_g , хотя эффект и не очень велик:

$$\langle J \rangle \approx \frac{I_0^2}{3c} (kh)^2 \left(1 + \frac{k^2}{6} \cdot \frac{h^3 + 2h^2 l_g + 2l_g^3}{h + l_g} \right) \quad (128.15)$$

(ср. (128.4)). Так, при $l_g \gg h$ выигрыш по сравнению с точечным диполем описывается множителем $1 + k^2 l_g^2 / 3$.

Аналогичный результат получается и при расчете эффективности зонтичной антенны. Ее «зонтик» играет роль «емкости на земле», которая также сдвигает распределение тока по антенне, что повышает эффективность устройства (задача 1, А ниже).

Штыревые антенны используются в диапазонах от ДВ до УКВ. Их наиболее распространенным представителем является раздвигающаяся антенна бытовых радиоприемников, конструктивно простая и удобная. При сооружении передающих антенн ДВ — КВ диапазонов конструктивные проблемы неизмеримо сложнее. И одна из них — необходимость устанавливать антенную мачту на изоляторе, чтобы «оторвать» от земли нижний конец излучателя (см. рис. XXI.6).

Существует красивое решение этой проблемы в виде так называемой *антенны с верхним питанием* (рис. XXI.7). У нее излучателем является наружная поверхность мачты, а внутренняя поверхность вместе с проводником \mathcal{Z} образует коаксиальную линию, которая подводит ток к верхним проводникам. Емкость между ними и землей замыкает цепь тока. Распределение тока по антенне и ее эквивалентная схема даны на рисунке. Теперь максимум тока всегда находится в верхней точке антенны, а распределение тока зависит от соотношения l и λ .

Антенны типа «нагруженный вибратор» обладают еще одним важным достоинством: диаграмма направленности их излучения зависит от длины антенны (см. задачу 1), что позволяет для вертикальной антенны выбрать оптимальное направление максимума интенсивности излучения. Это очень важно для антенн передающих средневолновых радиостанций, в рабочем диапазоне которых особенно ощутим фединг (от англ. fade — увядать) — явление ослабления и искажения радиосигнала на некотором расстоянии от радиостанции. Это явление связано с интерференцией двух частей волнового потока, излучаемого антенной, — одна из них распространяется вдоль поверхности Земли, а вторая уходит от поверхности Земли и, отразившись от ионосферы, возвращается обратно. Выбором направленности излучения антенны можно удалить область интерференции (зоны фединга) и тем самым повышать дальность устойчивой радиосвязи. Такие антенны называются антифединговыми.

Задача 1. Найти распределение интенсивности излучения для антенны «нагруженный вибратор» и антенны с верхним питанием.

А. Распределение тока в антенне «нагруженный вибратор» описывается прежними соотношениями, однако теперь $l \sim \lambda$ и $kl \neq \pi/2$, поэтому интеграл имеет предел $\pm l$ и равен (ср. (128.7))

$$\text{Int} = \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(kl \cos \theta) \cdot \sin kl - \sin(kl \cos \theta) \cdot \cos kl \cdot \cos \theta].$$

В результате получим

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left[\frac{\cos(kl \cos \theta) \cdot \sin kl - \sin(kl \cos \theta) \cdot \cos kl \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \right]^2. \quad (128.16)$$

Таким образом, излучение антенны распределено аксиально-симметрично относительно оси антенны и зависит от угла θ иначе, чем у полуволнового и дипольного вибраторов: максимум излучения соответствует углу $\theta_{\max} \neq \pi/2$, значение которого зависит от параметра kl . Излучение отсутствует при $\theta = 0, \pi$ (вдоль антенны).

Б. У антенны с верхним питанием распределение тока по мачте и тока изображения описывается соотношением

$$I(x, t) = I_0 e^{-i\omega t} \cos k(l - |x|); \quad -l < x < l.$$

Аналогично случаю полуволнового вибратора найдем

$$\begin{aligned} \text{Int} &= \int_0^l e^{-ikx \cos \theta} \cos k(l - x) dx + \int_{-l}^0 e^{-ikx \cos \theta} \cos k(l + x) dx = \\ &= 2 \frac{\sin kl - \sin(kl \cos \theta) \cdot \cos \theta}{k \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

а распределение интенсивности

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left[\frac{\sin kl - \sin(kl \cos \theta) \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \right]^2. \quad (128.17)$$

Излучение отсутствует при $\theta = 0, \pi$, а направление максимума излучения зависит от значения параметра kl (рис. XXI.8).

В случае (а), когда $l = 0,53\lambda$, диаграммы различаются слабо: максимумы излучения лежат при $\theta_{\max} = 44^\circ 45'$ для антенны с верхним питанием и $\theta_{\max} = 41^\circ 15'$ для «нагруженного вибратора», а отношение интенсивностей излучения в максимумах равно 1,17. При $l = 0,64\lambda$ различие гораздо значительнее: θ_{\max} составляют соответственно $53^\circ 15'$ и $41^\circ 50'$, а отношение интенсивностей равно 1,4. Таким образом, антенна с верхним питанием обладает лучшими антифидинговыми свойствами, нежели «нагруженный вибратор».

Отметим, что описание излучения штыревых антенн с помощью токов «изображения» в проводящей среде есть, по существу, способ учета явления интерференции прямого потока, излучаемого антенной по данному направлению, и потока, отраженного проводящей поверхностью Земли. Это обстоятельство иллюстрирует задача 2.

Задача 2. Антенна «точечный диполь» расположена на высоте h над поверхностью Земли, а ее «усы» параллельны поверхности. Считая проводимость Земли бесконечной, найти распределение излучения в плоскости, ортогональной «усам».

Пусть излучение антенны при $h = \infty$ имеет интенсивность

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle_{\theta=\pi/2} = j_0,$$

не зависящую от угла φ . Тогда для антенны, расположенной на высоте h от проводящей поверхности, поток под углом φ к горизонту (см. рис. XXI.9)

$$j(r, \varphi) = j_0 |e^{ikz} + e^{i(kz + kd + \pi)}|^2,$$

$d = 2h \sin \varphi$ — разность хода прямого (1) и отраженного (2) лучей; сдвиг фазы π во втором слагаемом учитывает изменение поляризации E при отражении. В данном случае вектор E параллелен «усам» антенны. В результате $j(r, \varphi) = 4j_0 \sin^2(kh \sin \varphi)$. Нетрудно видеть, что метод «изображений» дает тот же результат, если учесть, что ток изображения направлен навстречу току антенны. В этом проще всего убедиться, вспомнив, что переменное магнитное поле вблизи идеально проводящей поверхности имеет только компоненту, касательную к поверхности. Это возможно, если токи A и A' антипараллельны.

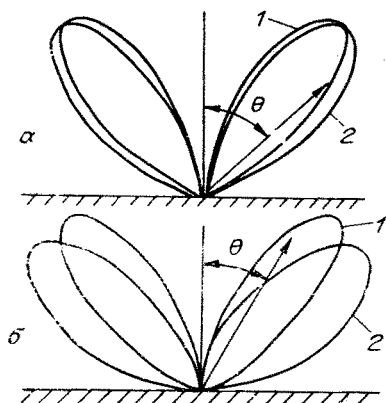


Рис. XXI.8. Пространственное распределение излучения антенны с верхним питанием (1) и антенны «нагруженный вибратор» (2).
 а — $l=0,53 \lambda$; б — $l=0,64 \lambda$. Диаграммы нормированы на максимум.

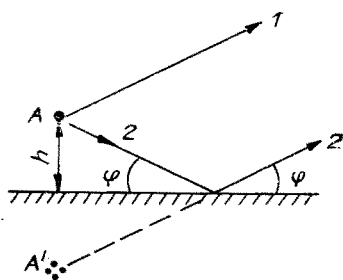


Рис. XXI.9. К задаче 2.

Антенны, рассмотренные в п. 5, применяются в диапазонах от УКВ до СДВ.

6. *Антенны с бегущей волной.* Кроме антенн типа «точечный диполь» со стоячей волной используются также антенны с бегущей волной, излучение которых обладает рядом особенностей.

Задача 3. Найти распределение интенсивности излучения проводника длиной l , по которому распространяется бегущая волна тока $I(x, t) = I_0 e^{i(kx - \omega t)}$.

Вводя угол θ между осью проводника и направлением на точку наблюдения, запишем выражение для вектор-потенциала

$$A_0(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_x \frac{I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c)} \int_0^l e^{ikx(1-\cos\theta)} dx,$$

где \mathbf{e}_x — единичный вектор вдоль проводника. Далее, как обычно, получим

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{8\pi c} \left(\frac{2 \sin \frac{kl(1-\cos\theta)}{2}}{1-\cos\theta} \right)^2 \sin^2\theta. \quad (128.18)$$

Излучение отсутствует при $\theta = 0, \pi$. Направление максимума излучения зависит от значения параметра kl : $1 - \cos\theta_{\max} = \xi^*$, где ξ^* — корень уравнения

$$\operatorname{tg}(kl\xi/2) = kl\xi(1-\xi/2).$$

В частности, при $kl = 2\pi m$ ($l = m\lambda$) излучение отсутствует при $\theta = \pi/2$. При $kl \ll 1$ $\theta_{\max} = \pi/2$, а интенсивность излучения $\langle J \rangle = I_0^2 (kl)^2 / 3c$ (ср. (128.4)).

Задача 4. Горизонтально развернутая антенна бегущей волны длиной l расположена на высоте h над поверхностью Земли. Найти распределение излучения антенны.

Вводя углы θ, φ , как для антенны «волновой канал» (п. 4), и учитывая вклад излучения тока изображения, «расположенного» на глубине h под поверхностью земли и текущего навстречу основному току, запишем аналогично задаче 2:

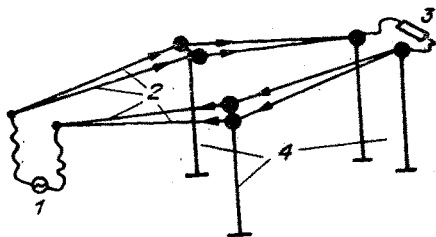
$$A_0(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_x \frac{I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c)} \int_0^l \{ e^{i\psi_1(x)} - e^{i\psi_2(x)} \} dx;$$

$$\psi_1(x) = kx(1 - \cos\theta);$$

$$\psi_2(x) = kx(1 - \cos\theta) + 2kh \sin\theta \cos\varphi.$$

Рис. XXI.10. Ромбическая антенна.

1 — радиопередатчик; 2 — проводники с бегущей волной тока (условно показано направление тока); 3 — нагрузка; 4 — несущие мачты.



Отсюда по стандартной процедуре найдем

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{8\pi c} \left(\frac{2 \sin \frac{kl(1 - \cos \theta)}{2}}{1 - \cos \theta} \right)^2 (2 \sin(kh \sin \theta \cos \varphi))^2 \sin^2 \theta.$$

Здесь принято, что вертикальные проводники антенны (снижения) не излучают. Это достигается при подводе питания к антенне по экранированным проводам. Качественно распределение излучения носит тот же характер, что и для одиночного проводника (128.18). В частности, отсутствие излучения под углом $\theta = \pi/2$ (по вертикали) при $kl = 2\pi m$ означает, что такая система также является антифединговой. При $kl, kh \ll 1$

$$\langle J \rangle \approx \frac{22}{15} \cdot \frac{I_0^2}{c} (kl)^2 (kh)^2. \quad (128.19)$$

На практике антенны с бегущей волной в описанном простейшем варианте применяются редко и чаще как приемные. Больше распространена их модификация в виде ромбической антенны, применяемой в основном в КВ диапазоне (рис. XXI.10).

Проводники, расположенные по сторонам ромба, представляют собой линии, по которым к нагрузке передается волна тока. Сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению линии, которое, вообще говоря, меняется вдоль линии из-за изменения расстояния между проводниками. Чтобы компенсировать это изменение, каждый из проводников раздваивают, как показано на рисунке. У ромбической антенны меньше сказывается влияние Земли, так как теперь не нужно замыкать обратный ток на Землю, в результате токи изображения могут быть искусственно подавлены. Кроме того, у такой антенны излучение обладает более высокой направленностью по сравнению с простой антенной бегущей волны, так как из-за интерференции излучения всех четырех сторон ромба исчезает симметрия относительно продольной оси антенны.

7. *Рамочная антенна* является наиболее распространенным типом антенн, применяемых в бытовых радиоприемниках. Поскольку выполняется она чаще всего в виде катушки, намотанной на ферритовый сердечник, то ее обычно называют «магнитной» либо «ферритовой» антенной. Размеры ее рамки много меньше длины волны во всем рабочем диапазоне радиоприемника, и антенна работает как магнитный диполь (задача 5). Можно описать ее действие на языке квазистационарного поля. Если вектор \mathbf{n} в падающей волне со-

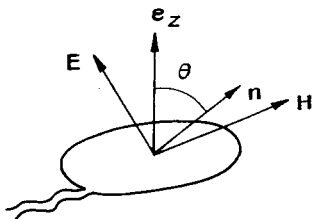


Рис. XXI.11. К расчету рамочной антенны.

ставляет угол θ с осью антенны (с нормалью к плоскости рамки), то эдс на катушке (рис. XXI.11)

$$U = -\frac{N}{c} \int_S (\mu \dot{\mathbf{H}}, d\mathbf{S}) \approx \frac{i\omega}{c} \mu N H S \sin \theta \cos \varphi,$$

где φ — угол между вектором \mathbf{H} и плоскостью векторов \mathbf{n} , \mathbf{e}_z . Предполагается, что ферритовый стержень длинный и $\mu \gg 1$.

Задача 5. Описать излучение магнитного диполя, образованного рамкой с током.

Магнитный дипольный момент плоского контура с током I $\mathfrak{M} = \mathbf{e}_z IS/c$, и интенсивность излучения

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{8\pi c} (k^2 S)^2 \sin^2 \theta; \quad \langle J \rangle = \frac{I_0^2}{3c} (k^2 S)^2.$$

Для ферритовой антенны нужно в \mathfrak{M} добавить множитель μN .

8. *Антенны СДВ диапазона* также относятся к группе вибраторных антенн, размеры которых по естественным причинам много меньше длины волны (напомним, что $\lambda_{\text{СДВ}} \geq 10$ км). Обычно их выполняют в виде сложных композиций из нескольких рамок, поднятых на 100—200 м над поверхностью Земли на специальных мачтах. О применении этих антенн мы поговорим ниже (§ 131).

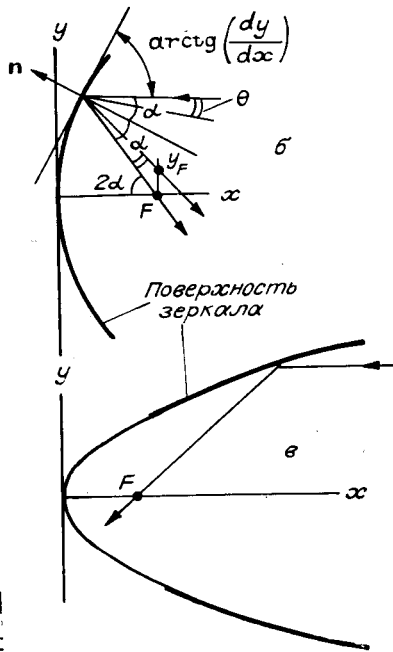
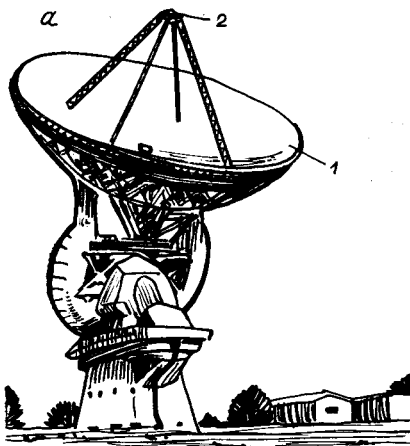
§ 129. ДИФРАКЦИОННЫЕ АНТЕННЫ

Дифракционные антенны применяются в СВЧ и УКВ диапазонах. Мы ограничимся описанием нескольких типичных представителей этой группы.

1. *Антенны оптического типа.* Наиболее распространены конструкции, являющиеся различными вариантами параболического зеркала. В диапазоне СВЧ, где поперечные размеры антенны могут быть сделаны много большими длины волны излучения, металлическая поверхность, выполненная в виде части параболоида вращения, работает как параболическое зеркало, т. е. фокусирует плоскую волну (параллельный пучок лучей), падающую вдоль его оси, в точку — фокус зеркала. Так, если форма поверхности зеркала описывается параболой (рис. XXI.12) $y^2 = 2px$, а ось вращения — ось x , то фокус находится на оси x в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии $F = p/2$ (см. задачу 1). В фокусе зеркала помещают облучатель антенны или приемник.

Рис. XXI.12. Радиотелескоп и ход лучей в нем.

a — радиотелескоп с параболическим зеркалом: 1 — зеркало, 2 — приемник; b — ход лучей в параболическом зеркале при малых углах падения, парабола $y^2 = 2px$, $p = 8$; β — ход лучей в зеркале при малых углах скольжения (УФ и рентгеновские телескопы), $p = 1,5$.



Задача 1. Найти положение фокуса параболического зеркала.

Луч, падающий на зеркало параллельно оси x , составляет угол α с нормалью к поверхности зеркала в точке пересечения, где α удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Отразившись от поверхности зеркала, луч придет в точку F на оси:

$$F = x + y \operatorname{ctg} 2\alpha = x + \sqrt{2px} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{p}{2x}} - \sqrt{\frac{2x}{p}} \right) = \frac{p}{2}.$$

Поскольку данный вывод справедлив для произвольных x , y , точка F является фокусом, а результат справедлив для зеркала любых размеров, и параболическое зеркало обладает (в приближении геометрической оптики!) идеальными фокусирующими свойствами. В оптике, где изготовление параболических зеркал с точностью лучше λ технически очень сложно, их выполняют обычно в виде части сферы — *сферическое зеркало*. Отклонение формы зеркала от параболической приводит к так называемой сферической аберрации (от англ. aberration — искажение).

Задача 2. Оценить аберрацию для сферического зеркала.

Пусть поверхность зеркала описывается уравнением $y^2 + (x - R)^2 = R^2$, где R — радиус кривизны поверхности зеркала. Запишем аналогично задаче 1

$$F = x + y \frac{1}{2} \left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - y^2} \approx \frac{R}{2} - \frac{y^2}{4R}; \quad y \ll R.$$

Таким образом, aberrация сферического зеркала

$$F_{\text{сф}} - \frac{R}{2} \approx -\frac{y^2}{4R}.$$

Задача 3. Найти размер «изображения» плоской волны в фокальной плоскости сферического зеркала в приближении малой сферической aberrации. Используя результаты задач 1, 2, найдем

$$\Delta y \approx 2(F_{\text{max}} - F_{\text{min}}) \operatorname{tg} 2\alpha \approx \frac{y_{\text{max}}^2}{2R} \cdot \frac{2y'_{\text{max}}}{(y'_{\text{max}})^2 - 1} \approx \frac{y_{\text{max}}^3}{R^2} = \frac{D^3}{32F^2}. \quad (129.1)$$

Здесь $y'_{\text{max}} = (dy/dx)_{y=y_{\text{max}}} \approx R/y_{\text{max}}$, D — диаметр зеркала (апертура).

Задачи 1—3 достаточно ясно объясняют свойства антенны-зеркала в приближении геометрической оптики. Однако, как мы уже видели выше, в оптике имеют место дифракционные ограничения. Они-то и определяют разрешающую способность телескопа с параболическим зеркалом или, на языке антенны, направленность ее излучения. Здесь применимо общее соотношение для дифракции на апертуре D : $\delta\theta \sim \lambda/D$. Именно такую расходимость имеет поток излучения параболического зеркала, в фокусе которого расположен точечный источник радиоизлучения.

Большие современные *оптические телескопы* выполняются по схеме рефлекторов, в которой фокусирующим элементом является параболическое зеркало. Изготовление линз значительных размеров для телескопов-рефракторов связано с большими техническими трудностями (в частности, механическая прочность массивных стеклянных линз и однородность их оптических свойств). В то же время техника изготовления зеркал доведена до высокого уровня. Самый большой из современных оптических телескопов — рефлектор специальной астрономической обсерватории (САО) АН СССР в ущелье Архыз на Кавказе имеет диаметр 6 м (рис. XXI.13) и отношение $D/F = 1/3,3$. Дифракционный предел разрешения этого телескопа составляет 10^{-7} рад, или $0,02''$. Один из самых больших рефракторов

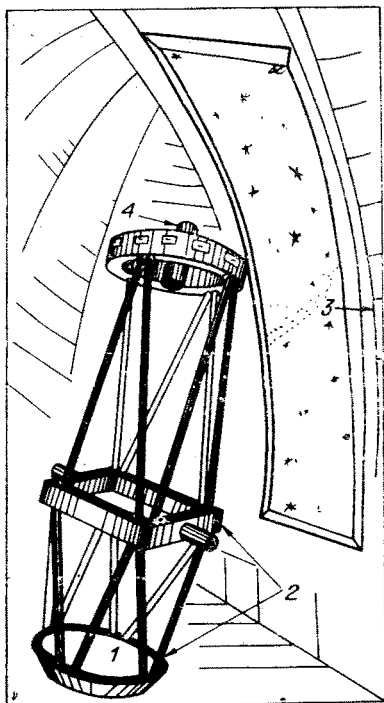


Рис. XXI.13. Оптический телескоп-рефлектор специальной астрономической обсерватории АН СССР.

Схемы «главный фокус» и Несмита, диаметр зеркала 6 м, $D/F = 1/3,3$; 1 — зеркало телескопа, 2 — система подвески и нацеливания телескопа, 3 — защитный купол, 4 — малый обзорный телескоп.

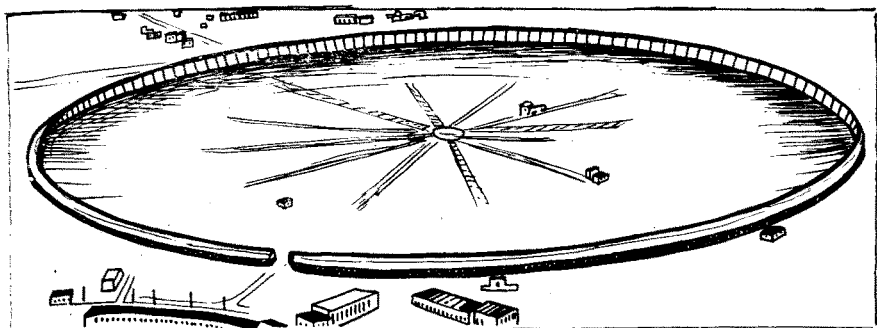


Рис. XXI.14. Радиотелескоп РАТАН-600 (АН СССР).

имеет диаметр линзы всего лишь 1,02 м (Йеркская обсерватория, США).

Оптическая астрономия уже шагнула за пределы поверхности нашей планеты. Атмосфера поглощает излучение в ультрафиолетовой и инфракрасной частях оптического диапазона и снижает разрешение и чувствительность телескопов в видимой части. Один из первых опытов вывода телескопа на орбиту искусственного спутника Земли был осуществлен на советской космической станции «Салют» (инфракрасный телескоп). В 1983 г. осуществлен запуск автоматической станции «Астрон» с ультрафиолетовым телескопом ($\lambda = 1140\text{—}3400 \text{ \AA}$), диаметр зеркала которого 80 см, длина — 4,2 м. Он выведен на орбиту с апогеем 200 тыс. км. В США, в рамках программы «Шаттл», готовится также УФ-телескоп с диаметром зеркала около 250 см. Для космических телескопов становится доступным и рентгеновский диапазон. Такие бортовые телескопы разработаны на излучение с длиной волны более 10 \AA . Как УФ, так и рентгеновские телескопы выполняются в виде усеченных параболоидов вращения, сильно вытянутых вдоль оси (см. рис. XXI.12, в), так что используется область больших углов падения (скользящие лучи, углы скольжения порядка нескольких градусов). Это позволяет получить коэффициент отражения, близкий к единице, и в этом диапазоне длин волн. Для таких зеркал, правда, изображение сильно искажается комой (см. задачу 5 ниже), но с этим приходится мириться, жертвуя качеством изображения ради чувствительности телескопа.

Большие радиотелескопы выполняют обычно по принципу незаполненной апертуры — в виде слоев или сегментов параболоида вращения (рис. XXI.14), параболических цилиндров. Самым большим таким радиотелескопом до недавнего времени был радиотелескоп Корнельского университета (США) с диаметром антенны 300 м, сооруженный в кратере потухшего вулкана Аресибо в Пуэрто-Рико. Разрешение телескопа на длине волны 75 см составляет $2,5 \cdot 10^{-3}$ рад. В конце 70-х годов вступил в строй телескоп РАТАН-600 в САО с диаметром антенны 588 м и рабочим диапа-

зоном длин волн от 0,8 до 30 см (см. рис. XXI.14). На длине волны 0,8 см разрешение телескопа составляет $1,3 \cdot 10^{-5}$ рад. Основная антенна телескопа представляет собой кольцевой слой параболоида и имеет 895 подвижных элементов площадью $7,4 \times 2$ м каждый. Более высоким разрешением обладают только радиоинтерферометры (§ 130).

Задача 4. Оценить размер сферического зеркала, при котором сферическая aberrация не влияет на качество изображения (или расходимость потока излучения).

При облучении зеркала с фокусным расстоянием F плоской волной дифракционное пятно в фокальной плоскости имеет поперечный размер $\Delta u_{\text{диф}} \sim \lambda F/D$, а сферическая aberrация приводит к размытию точечного изображения плоской волной до размера (129.1). Из сравнения этих величин следует, что $\Delta u_{\text{диф}} > \Delta u_{\text{абер}}$, если

$$D < (32\lambda F^3)^{1/4}. \quad (129.2)$$

Отметим, что для выполнения этого условия телескопы с большими зеркалами пришлось бы делать очень длиннофокусными, что привело бы к недопустимому снижению их светосилы (телесного угла, который «видит» телескоп). Так, например, для рефлектора САО его фокусное расстояние следовало бы сделать порядка 500 м, если бы зеркало было сферическим. Поэтому зеркала современных оптических телескопов делают в форме параболоидов, решая одновременно сложную задачу компенсации других геометрических aberrаций (кома, астигматизм и др.). Главной aberrацией параболических зеркал является так называемая кома — нелинейность зеркала-линзы, приводящая к тому, что луч, падающий на зеркало под углом к оси, пересекает (после отражения) фокальную плоскость в точке, положение которой зависит от координаты y точки пересечения луча с зеркалом (задача 5).

Задача 5. Оценить величину aberrации типа комы для параболического зеркала.

Рассмотрим луч, падающий на зеркало в плоскости (рис. XXI.12) и под углом θ к оси. Он пересечет фокальную плоскость в точке с координатой $y_F(\theta) = y - (F - x) \operatorname{tg}(2\alpha - \theta)$. Преобразуя это выражение, найдем в приближении малых θ : $y_F \approx F\theta + (3y^2/4F)\theta$. Первое слагаемое — известный результат для тонкой линзы, а второе — aberrационный член. Для зеркала диаметром D кома приводит к размытию точки на размер

$$\Delta y_F \approx \frac{3D^2}{16F} \theta. \quad (129.3)$$

Этот вид aberrации ограничивает поле изображения в параболическом зеркале. Поскольку для достижения предельного разрешения нужно, чтобы $\lambda u_{\text{диф}} \geq \Delta y_F$, получим угловой размер предмета, изображение которого будет разрешено

$$\Delta\theta \leq 10 \left(\frac{F}{D} \right)^2 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

Ясно, что это ограничение особенно сильно для оптических телескопов и значительно слабее для радиотелескопов. Так, например, поле зрения рефлектора САО АН СССР ($F/D \approx 3$) $\Delta\theta \sim 10^{-5}$ рад. Угловые размеры планет Солнечной системы лежат в пределах 10^{-5} рад (Нептун) — $2 \cdot 10^{-4}$ рад (Юпитер), и только Плутон имеет угловой размер на порядок меньше — около 10^{-6} рад.

Для радиотелескопов, работающих, как правило, в диапазоне радиоволн от нескольких миллиметров до десятков сантиметров, допустимый угловой размер объектов на несколько порядков больше.

Говоря об антеннах, мы не случайно столько внимания уделили оптическим телескопам. В следующем параграфе мы увидим, что оптические и радиотелескопы дополняют друг друга в астрофизических исследованиях, а возможности тех и других определяются одними и теми же физическими принципами.

Одно из важных применений параболических зеркал-антенн — радиолокация. Поскольку угловое разрешение зеркала определяется его апертурой D , в радиолокации возникает проблема сооружения антенн большого размера, способных вращаться или совершать колебания с достаточно большой скоростью, что необходимо для определения положения движущихся объектов и оперативного контроля достаточно больших секторов наблюдения. Поэтому часто радиолокационные антенны, как и большие радиотелескопы, выполняются в виде сегментов параболоида вращения, имеющих неодинаковые поперечные размеры. В этом случае максимальное разрешение достигается по одному измерению (рис. XXI.15). Такие антенны, в частности, применяются в навигационных радиолокаторах аэропортов.

У длиннофокусных параболических антенн возникает проблема закрепления облучателя (приемника), конструкция несущих опор которого становится достаточно сложной и чувствительной к различного рода механическим вибрациям. Жесткость опор должна обеспечивать фиксацию облучателя в пределах $\Delta u_{\text{диф}}$. Кроме того, при больших F повышается требование к направленности излучения облучателя (приемника): если угол, в котором сосредоточено его излучение, $\Delta\theta_{\text{обл}} > D/F$, излучение, как говорят, «переливается через край» зеркала, т. е. теряется мощность передатчика, а приемник «видит» земную поверхность, температура которой много выше температуры неба. Последнее обстоятельство особенно существенно в радиоастрономических измерениях (§ 130) и системах двужеркальных (§ 131). Обойти эти трудности позволяют *схемы двужеркальных телескопов*. Любопытно, что развиты они были в оптической астрономии и позднее перенесены на радиотелескопы (рис. XXI.16).

Первая из них, рассмотренная выше схема телескопа с одиночным параболическим зеркалом, по очевидным причинам носит название «главный фокус». Ее вариант — телескоп с наклонным зеркалом, что позволяет вынести фокус (и изображение звезды) за апертуру телескопа, был построен Ломоносовым (около 1750 г.) и позднее Гершелем. Первый двужеркальный телескоп был построен Ньютоном в 1668 г. Он относится к предфокальным системам, у которых вторичное зеркало устанавливается между главным зеркалом и его фокусом. В схеме Ньютона фокусное расстояние телескопа равно фокусному расстоянию главного зеркала, а изображение с помощью наклонного плоского зеркала вынесено за апертуру телескопа.

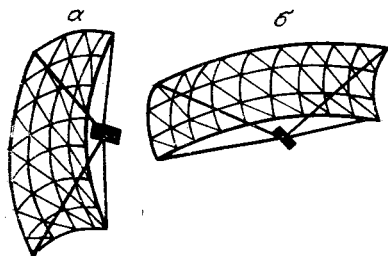
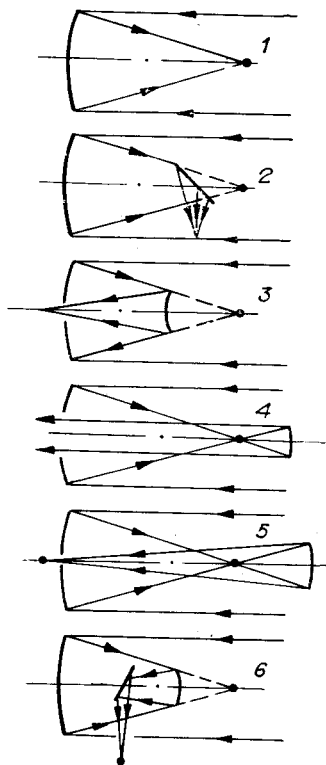


Рис. XXI.15. Радиолокационные антенны:

а — локация по вертикали; б — локация по горизонтали (азимуту).

Рис. XXI.16. Основные схемы телескопов:

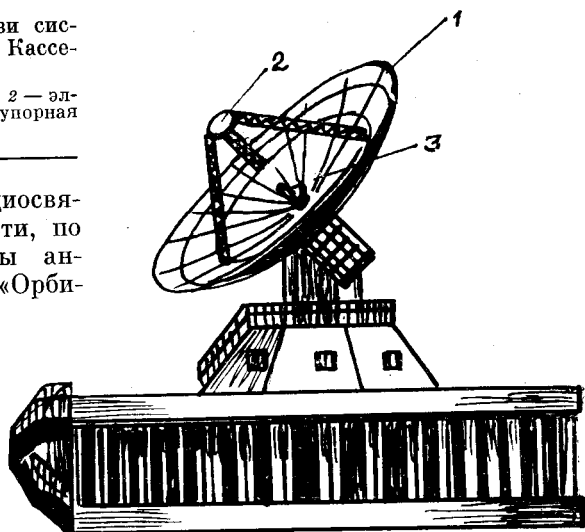
1 — «главный фокус»; 2 — Ньютона; 3 — Кассегрена; 4 — Мерсена; 5 — Грегори; 6 — Несмита.



В предложенных позднее схемах двухзеркальных телескопов вторичное зеркало также обладает фокусирующими свойствами, и его фокус совмещен с фокусом главного зеркала. В этих схемах в качестве вторичного зеркала используются гиперboloид (схема Кассегрена), параболоид (схема Мерсена) и эллипсоид (схема Грегори). Соответственно зеркала устанавливаются между главным зеркалом и его фокусом (предфокальные системы) или за последним (зафокальные системы). Все три указанные схемы дают увеличение фокусного расстояния телескопа по сравнению с фокусным расстоянием главного зеркала, отсюда еще одно их название — удлиняющие системы. В схеме Мерсена фокусное расстояние, очевидно, бесконечно, и она в телескопах обычно не применяется (эту схему используют для формирования потока в бесщелевых спектрографах). Трехзеркальная схема Несмита позволяет не только удлинить фокусное расстояние, но и вынести изображение за апертуру. Последнее может оказаться существенным для больших оптических телескопов-рефракторов, у которых отверстие в центре нежелательно вследствие возникающих при этом механических трудностей изготовления зеркала. Однако применение трех зеркал снижает уровень полезного сигнала из-за потерь при отражениях. Упомянутый оптический телескоп САО может работать по одной из двух схем — «главный фокус» или Несмита. Очевидно, что из двух удлиняющих систем — Кассегрена и Грегори — первая предпочтительнее с точки зрения упомянутых выше проблем длиннофокусных телескопов, так как в ней полная длина телескопа меньше. Схема Кассегрена получила широкое применение в радиотелескопах и

Рис. XXI.17. Станция связи системы «Орбита» с антенной Кассегрена.

1 — параболическое зеркало; 2 — эллиптическое зеркало; 3 — рупорная антенна приемника.



антеннах дальней радиосвязи (§ 131), в частности, по этой схеме выполнены антенны системы связи «Орбита» (рис. XXI.17).

Телескопы оптического и радиодиапазонов объединяют не только общность физических принципов их действия и объектов наблюдения. Граница между оптической и радиоастрономией постепенно исчезает, уже появились радиотелескопы, работающие в диапазоне миллиметровых волн. Представителем семейства таких приборов является телескоп РТИ-7,5/250, построенный Физическим институтом им. Лебедева АН СССР и МВТУ им. Баумана. Диаметр его зеркала 7,5 м, рабочий диапазон длин волн 1—2 мм ($\Delta\theta \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$).

2. *Антенны акустического типа.* Своим названием такие антенны обязаны близости их конструкции к привычным и хорошо знакомым нам акустическим излучателям, что особенно хорошо видно на примере типичного представителя этой группы антенн — рупорной антенны (рис. XXI.18). Ее обсуждением мы и ограничимся.

Обычно рупорные антенны, имеющие форму усеченного конуса или усеченной пирамиды, располагают на выходе волновода (соответственно цилиндрического или прямоугольного) для согласования условий распространения волны в волноводе и свободном пространстве. Необходимость такого согласования видна хотя бы из того, что фазовые скорости волны в волноводе ($v_\Phi > c$) и свободном пространстве ($v_\Phi = c$) различны, что приводит к отражению волны на открытом конце волновода (задача 6).

Задача 6. Оценить коэффициент отражения H_{10} волны на открытом конце волновода прямоугольного сечения (поперечные размеры a, b).

Фазовая скорость H_{10} волны есть (см. § 86).

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2},$$

где $\lambda = 2\pi/c$ — длина волны в свободном пространстве. Отсюда эффективный коэффициент преломления $n = c/v_\Phi = \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} < 1$. Грубо коэффициент отражения можно оценить по формулам геометрической оптики (см. § 73). Для случая нормального падения волны на границу раздела среда — вакуум

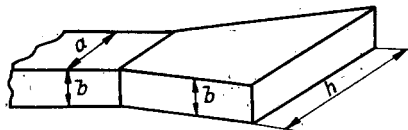


Рис. XXI.18. Секториальная рупорная антенна.

имеем $R = (1 - n)^2 / (1 + n)^2$, что дает $R = (1 - \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2})^2 / (1 + \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2})^2$. Отсюда следует, что при $\lambda \rightarrow 2a$ коэффициент отражения $R \rightarrow 1$, т. е. волна не излучается. При $a \gg \lambda$ значение $R \sim (\lambda/4a)^4$.

В рупоре волна распространяется качественно так же, как в волноводе, и увеличение его поперечных размеров приводит к уменьшению фазовой скорости, в итоге коэффициент отражения волны на выходе падает.

Направленность рупорной антенны можно оценить по формулам дифракции. Так, для секториальной рупорной антенны, изображенной на рис. XXI.18, угловая расходимость излучения

$$\Delta\theta_{\text{верт}} \sim \lambda/b; \Delta\theta_{\text{гор}} \sim \lambda/h.$$

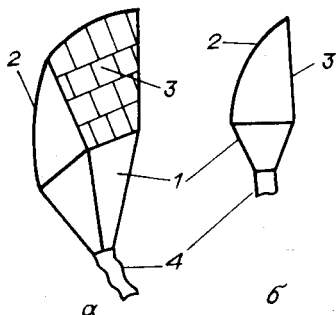
Рупорные антенны применяются главным образом в качестве облучателей антенн оптического типа (см. рис. XXI.17).

Интересным примером объединения антенн оптического и акустического типов является рупорно-параболическая антенна (рис. XXI.19), в которой пирамидальный рупор сочетается с частью параболического зеркала, что позволяет получить хорошо сформированный направленный поток излучения. Такие антенны не излучают «назад», поэтому их часто применяют в радиорелейных линиях связи и наземных станциях спутниковых систем связи (§ 131).

3. *Щелевые антенны.* В приемно-передающих устройствах, где высокую направленность излучения необходимо сочетать с компактностью антенн (например, в бортовых радиолокаторах самолетов), находят применение щелевые антенны. Они выполняются в виде замкнутых с одного конца волноводов, в которых возбуждается стоячая волна. Через отверстия, прорезанные в стенках волновода и расположенные соответствующим образом, излучение покидает волновод. Выбором формы отверстия обеспечивается направленность излучения, а их расположением достигается максимальная амплитуда волны излучения.

Рис. XXI.19. Рупорно-параболическая антенна.

a — общий вид; *b* — схематический разрез; 1 — рупор, 2 — параболическая поверхность, 3 — выходное отверстие, закрытое пластмассовой стенкой, 4 — подвод мощности.



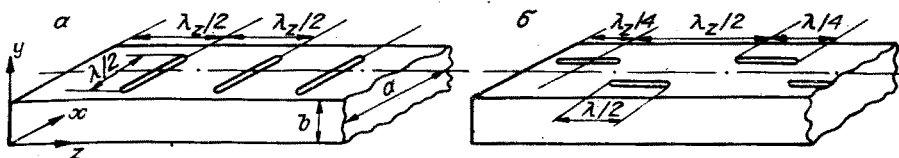


Рис. XXI.20. Щелевые антенны на прямоугольном волноводе.

a — антенна с поперечными щелями, щели расположены в пучностях H_x ; b — антенна с продольными щелями, щели расположены в пучностях H_z .

Поясним принцип действия щелевой антенны на конкретном примере — прямоугольном волноводе с щелевыми отверстиями прямоугольной формы (рис. XXI.20).

Пусть в волноводе возбуждена мода H_{10} . Отражение на замкнутом конце волновода приводит к тому, что в нем устанавливается стоячая волна, в которой только одна компонента вектор-потенциала отлична от нуля:

$$(A_{10})_y = iA \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t},$$

где A — константа, зависящая от мощности источника, $a > b$; $k_z = k\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} = 2\pi/\lambda_z$; $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$. Компоненты поля в стоячей волне:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \sin k_z z; \\ H_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \cos k_z z; \\ E_y &= -\frac{1}{c} \dot{A}_y = \frac{ika}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin k_z z. \end{aligned} \quad (129.4)$$

По внутренней поверхности волновода текут токи, связанные со значением магнитного поля на поверхности $\mathbf{H}_{\text{пов}}$ соотношением (см. § 87)

$$\mathbf{H}_{\text{пов}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{e}_n \times \mathbf{j}_1, \quad (129.5)$$

где \mathbf{j}_1 — поверхностный ток на единицу длины вдоль направления $\mathbf{H}_{\text{пов}}$, \mathbf{e}_n — единичный вектор нормали к поверхности (направленный внутрь волновода). Поверхностные токи на верхней и нижней крышках волновода имеют компоненты $j_{1z} = cH_x/4\pi$, $j_{1x} = -cH_z/4\pi$. Встретив щель, поверхностный ток разделяется на две компоненты — одна обтекает щель по стенке волновода, а вторая переходит в ток смещения и пересекает щель по кратчайшему пути. Отношение компонент по порядку величины равно отношению индуктивного сопротивления витка и емкостного сопротивления щели

$$\frac{I_{\text{пров}}}{I_{\text{смещ}}} \sim \frac{\omega L/c^2}{1/\omega C} \sim (kl)^2 \frac{\Delta}{\pi d} \ln \frac{d}{\Delta},$$

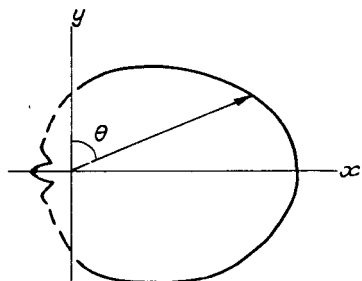


Рис. XXI.21. Пространственное распределение излучения щели в плоскости (x, y) .

Сплошная кривая линия соответствует формуле (129.6), штриховая проведена с учетом отражения от задней стенки волновода (нормировка на максимум излучения).

где $2l$ и d — длина и ширина щели, Δ — толщина стенок волновода. Для щелевой антенны выбирают $l = \lambda/4$ (см. задачу 7), и, так как обычно $\Delta \ll d$, ток смещения заметно превышает ток проводимости, огибающий щель. К тому же в излучении ток проводимости не играет заметной роли, так как он образует два полувитка, магнитные моменты которых направлены навстречу друг другу. Токи смещения, напротив, образуют некоторое распределение вдоль щели дипольных моментов jdl , ориентированных поперек щели. Поскольку размер такого элементарного диполя много меньше длины волны, диаграмма распределения излучения в плоскости, ортогональной щели, та же, что у точечного диполя. Для плоскости, проходящей через большой размер щели и ортогональной стенке волновода, в которой прорезана щель, диаграмма имеет более сложный вид (см. задачу 7 и рис. XXI.24) и зависит от ориентации щели на стенке волновода. На рис. XXI.20 показаны два простейших и наиболее распространенных варианта расположения щелей — так называемые поперечные (а) и продольные (б) щели. Первые располагаются в максимумах H_x , вторые — в максимумах H_z .

Задача 7. Найти распределение излучения поперечной щели в плоскости (x, y) , проходящей через щель, если волновод возбужден модой H_{10} .

Введем координату ξ вдоль щели, выбрав начало отсчета $\xi = 0$ в центре щели ($\xi = x - a/2$). Распределение тока смещения в щели можно оценить, приняв $j_{\text{смещ}}(\xi) \approx j_{1z}(\xi, z_{\text{max}})$, $z_{\text{max}} = \pi l/k_z$. Из (129.4), (129.5) найдем

$$j_{\text{смещ}}(\xi) \approx \frac{c}{4\pi} \left(-\frac{ik_z a}{\pi} \right) H_0 \cos \frac{\pi \xi}{a}.$$

В плоскости (x, y) поле от элемента щели $d\xi$ таково:

$$d\mathbf{A}_0 = \frac{\mathbf{e}_z}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c)} \cdot e^{-ik_z \xi \cos \theta} j_{\text{смещ}}(\xi) d \cdot d\xi,$$

где d — ширина щели. Интегрируя по длине щели, найдем:

$$\mathbf{A}_0 = -\mathbf{e}_z \frac{ik_z a}{4\pi^2 r_p} \cdot ldH_0 \mathcal{F}(\theta);$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{2}{kl} \cdot \frac{\frac{\pi}{ka} \sin \frac{\pi l}{a} \cos(kl \cos \theta) - \cos \frac{\pi l}{a} \sin(kl \cos \theta) \cdot \cos \theta}{\left(\frac{\pi}{ka} \right)^2 - \cos^2 \theta}.$$

При $\lambda = 2a$ этот результат совпадает с интегралом Int в задаче для антенны «нагруженный вибратор» (§ 128, задача 1). Однако для щелевой антенны такое соотношение между λ и a недопустимо — в этом случае $k_z = 0$, и волна не распространяется по волноводу. Магнитное поле излучения

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}_0 = -\mathbf{e}_\perp ik |A_0|; \quad \mathbf{e}_\perp = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z,$$

откуда

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{64\pi^5} (kk_z a dl H_0 \mathcal{F}(\theta))^2. \quad (129.6)$$

Это распределение излучения обладает невысокой направленностью. Так, для значений параметров $2l = \lambda/2$ ($kl = \pi/2$) и $\lambda = a$ ($ka = 2\pi$) отношение интенсивности излучения при $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi$ равно 2,25. Диаграмма излучения для этого случая показана на рис. XXI.21.

Соотношение (129.6) не учитывает излучения щели внутрь волновода. Щелевой вибратор с токами смещения излучает симметрично, а излучение, уходящее внутрь, отражается от противоположной стенки. Поэтому в выражении для вектор-потенциала при $\theta = \pi/2$ появляется множитель $(1 + e^{2ikb})$, учитывающий сдвиг фазы основной и отраженной волн. При $\theta = 0, \pi$ вклад отраженной волны пренебрежим (если не учитывать боковых стенок). Это улучшает направленность излучения.

Для повышения направленности поперечной щелевой антенны в плоскости (x, z) ее выполняют в виде набора щелей, как это показано на рис. XXI.20, а. Интерференция излучения от разных щелей и дает желаемый эффект.

§ 130. АНТЕННЫЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ

К этому классу относятся излучающие и приемные устройства, состоящие из двух или нескольких антенн, которые объединены общей системой управления излучаемой мощностью и обработки принимаемого сигнала. Антенные или *радиоинтерферометры* по своим физическим принципам аналогичны оптическим, правда, в отличие от последних они используются не только в качестве приемников излучения с высоким пространственным (угловым) разрешением, но и как источники остронаправленного излучения. Для краткости оба вида систем — и приемную, и передающую — мы будем называть радиоинтерферометрами.

Выше, в § 128, уже встречался один из радиоинтерферометров — антенна, работающая по интерференционной схеме «зеркало Ллойда» (задача 2).

1. *Аддитивный радиоинтерферометр* (рис. XXI.22) является простейшим устройством в этой группе антенн. Он представляет собой пару антенн (радиотелескопов), сигналы от которых суммируются, складываются регистрирующим устройством, причем величина каждого из сигналов пропорциональна напряженности поля падающей волны вблизи антенны. Такой радиоинтерферометр полностью аналогичен оптическому двухлучевому интерферометру по схеме Юнга.

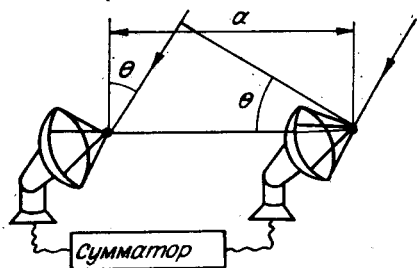


Рис. XXI.22. Схема аддитивного интерферометра.

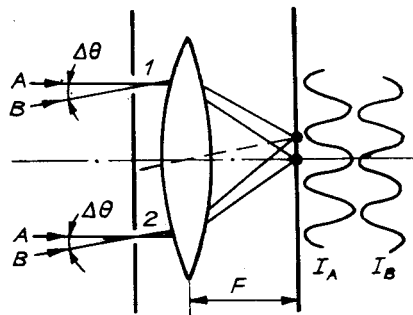


Рис. XXI.23. Схема телескопа-интерферометра Физо.

A, B — световые лучи от точечных источников (находящихся в «бесконечности»); $1, 2$ — щели; условно показано распределение интенсивности в интерференционных картинах от каждого из источников.

Радиоастрономия — детище XX в., «младшая сестра» одной из самых древних наук на Земле — астрономии. Первая попытка измерения угловых размеров звезд была сделана Галилеем. Он натянул нить и измерил расстояние от нее до глаза, при котором нить перекрывала звезду Вега. Результат, полученный Галилеем (5"), превышал истинный размер звезды в 1500 раз, таким образом проявились все те же дифракционные ограничения.

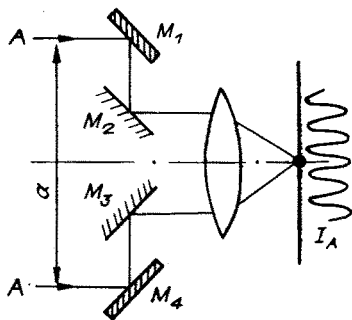
Интерференционные методы измерения угловых размеров источников пришли в радиоастрономию также из астрономии. Первое применение интерференционных методов в астрономии относится к прошлому веку (Физо, 1868 г.). В методе Физо на телескоп устанавливается экран с двумя щелями, расстояние между которыми можно изменять. Такой интерферометр является аналогом схемы Юнга, а его действие проще всего объяснить на примере измерения углового расстояния между двумя точечными монохроматическими источниками (рис. XXI.23). В фокальной плоскости телескопа возникают две наложенные друг на друга интерференционные картины. Очевидно, максимумы одного и того же порядка m в интерференционных картинах A и B сдвинуты в фокальной плоскости на $\Delta x_\theta = F \cdot \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — угловое расстояние между источниками. Если этот сдвиг кратен расстоянию между максимумами $\Delta x_\theta = n\lambda F/a$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где a — расстояние между щелями, то в фокальной плоскости наблюдается четкая интерференционная картина, а при $\Delta x_\theta = (n + 1/2)\lambda F/a$ — полностью размытая. Максимальное угловое разрешение ($\Delta\theta_{\min}$) соответствует образованию при наибольшем значении a первой размытой картины, когда $(\Delta x_\theta)_{\min} = \lambda F/2a_{\max}$. Таким образом, разрешение

$$\Delta\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{a_{\max}} \leq \frac{\lambda}{D}, \quad (130.1)$$

где D — диаметр зеркала телескопа.

Мы видим, что в этом методе угловое разрешение практически не превосходит дифракционный предел. Однако работа Физо дала толчок развитию интерференционных методов в астрономии.

Рис. XXI.24. Схема «звездного интерферометра Майкельсона». Показан ход лучей от источника A .



Следующий шаг был сделан Майкельсоном и Пизом (1920 г.), построившими прибор, получивший название «звездный интерферометр Майкельсона». В нем щели были заменены парой зеркал M_1 , M_3 (рис. XXI.24), которые образуют базу интерферометра a . С помощью своего интерферометра с базой b м (разрешение 10^{-7} рад) они впервые определили угловой размер звезды Бетельгейзе и нашли его равным $2,2 \cdot 10^{-7}$.

Интерферометр Майкельсона работает обычно в видимом свете широкого спектрального состава. Поэтому на него распространяются ограничения, связанные с монохроматичностью волны (см. § 94). В частности, видность интерференционной картины (см. (94.2), (94.3)) содержит дополнительный множитель $|\sin \eta|/\eta$, где $\eta = \Delta k \cdot ka \sin \theta/2k$. Отсюда следует, что при высоком разрешении (большой базе интерферометра) $ka \gg 1$ можно работать только в узкой области малых углов $|\theta| \ll (k/\Delta k)(\lambda/a)$ и точность ориентации интерферометра не должна быть, во всяком случае, хуже этой величины. На самом деле требуемая точность еще выше и определяется разрешением интерферометра $\Delta\theta \sim \lambda/a$.

Аналогичные методы применяются и в современной радиоастрономии. При работе пары телескопов, объединенных в схему аддитивного интерферометра, радиоизлучение от одной («точечной») звезды A дает сигнал, пропорциональный интенсивности суммарного поля в первом и втором телескопах

$$I(\theta_A) = I_{1A} + I_{2A} + 2\sqrt{I_{1A}I_{2A}} \cos \varphi; \quad \varphi = ka \sin \theta_A. \quad (130.2)$$

Аналогичный сигнал дает радиоизлучение звезды B , а суммарный сигнал пропорционален

$$I = I_A + I_B \approx 2(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \varphi \cdot \cos \delta\varphi);$$

$$\varphi = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} \approx ka \cos \theta, \quad \delta\varphi = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{2} \approx ka \cos \theta \cdot \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (130.3)$$

Здесь принято для простоты $I_{1A} = I_{1B} = I_1$; $I_{2A} = I_{2B} = I_2$; $\Delta\theta = \theta_A - \theta_B$; $\theta = (\theta_A + \theta_B)/2$. Если изменять базу интерферометра a , сигнал в сумматоре будет осциллировать с периодом $\Delta a = 2\pi/k \cos \theta$, а амплитуда этих быстрых осцилляций будет промодулирована медленной

огibaющей $\cos \delta\varphi$, период которой $\delta a = 2\pi / (k \cos \theta \cdot \Delta\theta/2)$. Такое поведение сигнала в точности соответствует поведению интерференционной картины в методе Физо: значения $\delta\varphi = n\pi$ отвечают четкой интерференционной картине, а $\delta\varphi = (n + 1/2)\pi$ — полностью размытой. Очевидно, предельное разрешение интерферометра достигается, когда на максимальной базе a_{\max} , как и в интерферометре Физо, образуется первая полностью размытая интерференционная картина ($n = 0$). Таким образом, разрешение

$$\Delta\theta_{\min} \sim \frac{\pi}{ka_{\max} \cos \theta}, \quad (130.4)$$

что согласуется с (130.1).

Конечно, описание на примере двух точечных источников использовано здесь для простоты. Заметим, что, говоря о «четких» и «размытых» интерференционных картинах, мы можем вернуться к уже введенному ранее понятию видности (см. § 92).

Регистрация видности интерференционной картины при перестройке базы интерферометра позволяет не только определить угловой размер источника, но и получить гораздо большую информацию — распределение яркости по поверхности его. Действительно, в задаче 1 § 93 мы показали, что видность интерференционной картины в схеме Юнга, освещаемой протяженным источником, пропорциональна модулю фурье-образа (по переменной a) его яркостной функции. Очевидно, что этот результат справедлив и для аддитивного интерферометра. Обратное фурье-преобразование по известной функции $V(a)$ позволяет восстановить распределение яркости по источнику. Этот метод и применяется в астрономической интерферометрии.

Обсудим роль апертуры телескопа. В соотношениях (130.2), (130.3) опущена функция $|\mathcal{F}(\theta)|^2$, учитывающая дифракцию на апертуре зеркала. Пусть на зеркало с одномерной апертурой D падает плоская волна под углом ψ_0 к оси зеркала. Распределение интенсивности в дифрагированном потоке запишем в виде

$$|\mathcal{F}(\psi, \psi_0)|^2 = \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2; \quad u = kD(\sin \psi_0 - \sin \psi)/2, \quad (130.5)$$

где ψ — угол дифракции, отсчитываемый от оси зеркала. Поскольку приемник антенны находится в фокусе зеркала, в нем соберется поток, дифрагированный под углом $\psi = 0$, и напряженность поля в этом потоке пропорциональна $\mathcal{F}(\psi = 0, \psi_0)$. Функция (130.3) для интенсивности в сумматоре получает при одинаковой ориентации телескопов дополнительный множитель

$$|\mathcal{F}(0, \psi_0)|^2 = \left(\frac{\sin U_0}{U_0} \right)^2; \quad U_0 = kD \sin \psi_0/2.$$

Если телескоп ориентирован на звезду, угол $\psi_0 = 0$ и $|\mathcal{F}(0, 0)| = 1$.

Существуют, однако, телескопы, положение которых по отношению к Земле фиксировано. Обычно это устройства больших раз-

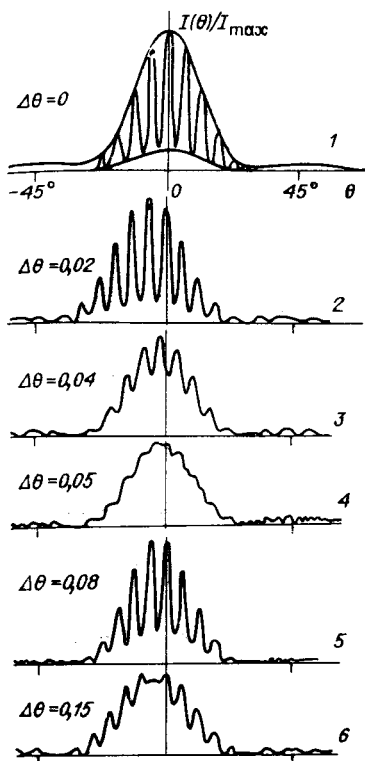


Рис. XXI.25. Сигнал аддитивного интерферометра с двумя неподвижными телескопами при наблюдениях «точечных» звезд, движущихся по небосводу в плоскости телескопов.

Телескопы ориентированы в зенит. Для иллюстрации особенностей функции $I(\theta)$ выбраны «нереальные» параметры, $I_1/I_2 = 5$, $a/\lambda = 10$, $D/\lambda = 2$. Функция $I(\theta)$ на всех кривых нормирована на ее максимум. На верхнем рисунке (1) — случай одного точечного источника — показаны огибающие. На остальных рисунках — зависимость $I(\theta)$ для двух точечных источников, угловое расстояние между которыми увеличивается с номером рисунка.

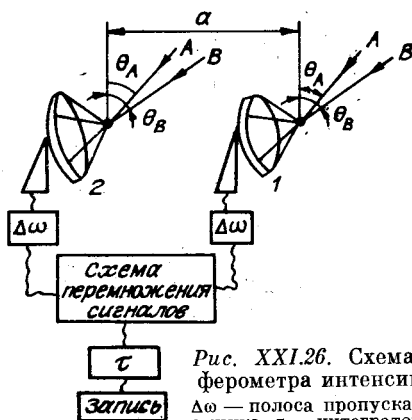


Рис. XXI.26. Схема интерферометра интенсивностей. $\Delta\omega$ — полоса пропускания приемника, τ — интегратор; 1, 2 — приемники; a — база.

меров, и для их ориентации используется естественное вращение Земли. Если, например, оси обоих телескопов направлены в зенит, то угол ψ_0 и введенный ранее угол θ совпадают. По мере движения звезды (точечного источника) по небосводу сигнал в сумматоре интерферометра (см. (130.2)) меняется по закону

$$I(\theta) = (I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi) \cdot (\sin U/U)^2;$$

$$\varphi = ka \sin \theta; U = kD \sin \theta/2.$$

Для симметричного интерферометра ($I_1 = I_2$) выражение совпадает с распределением интенсивности в волне, дифрагированной решеткой с двумя щелями. График этой функции представлен на рис. XV.16, б. Для несимметричного интерферометра эта функция представлена на рис. XXI.25.

Следует отметить, что все измерения в радиоастрономии проводятся обычно в УКВ — СВЧ диапазоне, что связано с избирательной прозрачностью атмосферы. В качестве входных усилителей используются мазеры — квантовые парамагнитные усилители, обладающие узкой полосой пропускания и наиболее низким из всех радиотехнических устройств уровнем шума.

2. *Интерферометр интенсивностей* (корреляционный интерферометр): В 1954 г. австралийские физики Браун и Твисс предложили и осуществили принципиально новый и необычный вид интерферометра, в котором приемники в телескопах регистрируют не поле волны, а квадрат его амплитуды, т. е. интенсивность волны. В оптике это достигается, если световой поток измеряется фотумножителем, в радиодиапазоне — соответствующей характеристикой усилителя. Сигналы, полученные от каждого из двух телескопов, подвергаются затем специальной корреляционной обработке. Метод основан на том, что при узкой полосе пропускания системы $\Delta\omega \ll \omega$ интенсивность от каждого телескопа медленно флуктуирует во времени из-за некогерентности источника (например, две близкие звезды). Корреляции этих флуктуаций и измеряются в интерферометре Брауна — Твисса.

Пусть $E_A(t) = E_{0A} \cos(\omega t + \varphi_A(t))$ — поле волны от звезды A , где E_{0A} — постоянная амплитуда, $\varphi_A(t)$ — фаза, флуктуирующая в полосе частот $\Delta\omega$. Такое же соотношение описывает и поле волны от звезды B . Тогда сигнал от первого телескопа, пропорциональный квадрату амплитуды суммарного поля,

$$S_1 = \kappa (E_{0A}^2 + E_{0B}^2 + 2E_{0A}E_{0B} \cos \varphi_1) \equiv \bar{S}_1 + \Delta S_1(t), \quad (130.6)$$

где κ — некоторый коэффициент пропорциональности, а флуктуирующая фаза

$$\varphi_1(t) = \varphi_A(t) - \varphi_B(t). \quad (130.7)$$

Сигнал от второго телескопа имеет точно такой же вид, но его фаза

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + \Delta\varphi \quad (130.8)$$

сдвинута за счет запаздывания волны (рис. XXI. 26),

$$\Delta\varphi = ka(\sin \theta_A - \sin \theta_B) \approx ka \cos \theta \cdot \Delta\theta. \quad (130.9)$$

Если теперь перемножить переменные части обоих сигналов: $\Delta S_1(t) \times \Delta S_2(t)$ и усреднить по времени $\tau \gg 1/\Delta\omega$ (интегратор на рис. XXI.26), то результирующий сигнал имеет вид

$$S = S_0 \cos \Delta\varphi, \quad (130.10)$$

где S_0 — постоянная, зависящая от средних интенсивностей сигналов. Это выражение, так же как и (130.3), зависит от $\Delta\theta$.

В частности, поэтому интерферометр интенсивностей позволяет, как и аддитивный интерферометр, измерять распределение яркости по источнику путем перестройки. Разрешение интерферометра по-прежнему описывается соотношением (130.4).

Современные радиоинтерферометры интенсивностей имеют базу вплоть до размера нашей планеты. Телескопы различных обсерваторий мира объединяются в пары (и более сложные системы), образуя интерферометры с базами в несколько тысяч километров, что позволяет достигать разрешений порядка 10^{-9} рад.

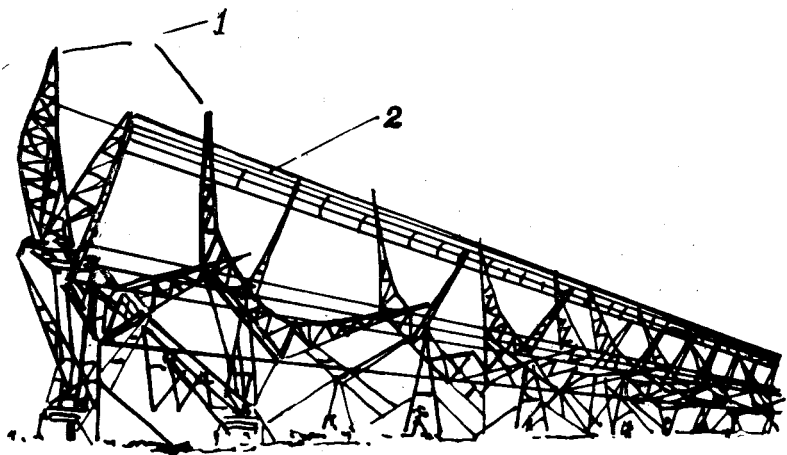


Рис. XXI.27. Линейная решетка.

1 — зеркало (сектор параболоида); 2 — приемники излучения.

Такие интерферометры используют, конечно, вращение Земли. Совместно с зарубежными «коллегами» работают и советские радиотелескопы. Одну из самых больших баз (11570 км) имеет пара радиотелескопов — один в Крымской обсерватории АН СССР в пос. Симеиз и второй — в Австралии, в г. Тидбинбилле. Подобная «интерферометрия с большой базой» требует специального решения проблемы синхронности регистрации — привязки времени разных обсерваторий. Поскольку ошибка по времени записи Δt приводит к изменению значения разности фаз, $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ (см. (130.7), (130.8)) на величину $\delta\varphi \sim \varphi\Delta t \sim \Delta\omega \cdot \Delta t$, точность синхронизации должна быть не хуже $\Delta t \lesssim 1/\Delta\omega$. При работе пары радиотелескопов по схеме интерферометра интенсивностей сигнал каждого из них записывается на магнитофонах с обязательной привязкой по времени. Затем магнитные пленки поступают в вычисленный центр, где производится математическая обработка сигналов по описанному рецепту.

Интерферометр интенсивностей имеет еще одно интересное применение — как корреляционный радиолокатор, работающий на шумовых радиосигналах. В таком локаторе сигнал генератора делится на две (существенно не равные по мощности) части, одна из которых излучается антенной и, частично отразившись от объекта, возвращается назад, поступает на один вход регистрирующей системы, а на другой вход подается через линию задержки вторая часть сигнала. Интерферируя, они дают информацию о положении и скорости объекта.

3. *Линейная решетка* представляет собой антенный интерферометр, состоящий из нескольких телескопов, выстроенных по одной прямой (рис. XXI.27) и объединенных общей системой обработки информации.

Решетка может работать как по принципу аддитивного интерферометра, так и по принципу интерферометра интенсивностей. Оптическим аналогом линейной решетки является одномерная дифракционная решетка. Аналогично выражениям для сигнала аддитивного интерферометра (130.3), (130.5) нетрудно получить выражения для линейной решетки, освещаемой точечной звездой (плоская волна), движущейся в плоскости решетки:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2; \quad \alpha = \frac{ka \sin \theta}{2}; \quad U = \frac{kD \sin \psi_0}{2}, \quad (130.11)$$

где, как и прежде, θ — угол между направлением на источник и зенитом, ψ_0 — угол между направлением на источник и осями телескопов (угол дифракции $\psi = 0$ — приемник в фокусе зеркала). Разрешение такой антенны по углу θ , как и для обычной дифракционной решетки,

$$\Delta\theta_{\min} \sim \frac{2\pi}{Nka \cos \theta} \sim \frac{\lambda}{Na} \sim \frac{\lambda}{a_{\max}}. \quad (130.12)$$

Таким образом, разрешение, как и прежде, определяется базой интерферометра a_{\max} .

4. *Двумерная решетка*, или «крест Миллса», представляет собой две скрещенные линейные решетки. Оптический аналог этой антенны — двумерная дифракционная решетка. Если линейная решетка обладает высоким разрешением в одной плоскости (проходящей через линию решетки), то «крест» имеет высокое разрешение в двух взаимно ортогональных плоскостях. Каждое из двух значений $\Delta\theta_{\min}$ описывается выражением (130.12). Таким образом, если для линейной решетки «небо в полосочку» с шириной полос λ/a_{\max} , то для креста «небо в крапинку» — диаметр пятен той же величины, что и ширина полосы.

Апертура отдельных телескопов, входящих в состав решеток, выбирается из конструктивных и физических соображений: с увеличением апертуры телескопы становятся все более сложными сооружениями, но при этом возрастает их чувствительность — полный поток, собираемый телескопом.

Линейные решетки и «кресты» являются довольно распространенным типом интерферометров. В Советском Союзе один из таких интерферометров ДКР-1000 работает в Серпуховской обсерватории Физического института им. Лебедева АН СССР. Он состоит из 40 телескопов, установленных на базе 1×1 км и работающих на длине волны 1 м. По конструкции он близок к интерферометру, показанному на рис. XXI.27. Интерферометр-«крест», предназначенный для наблюдения за Солнцем, построен в Тункинской обсерватории СО АН СССР. На базе 622×622 м расставлены 2×128 телескопов-параболоидов с диаметром зеркал около 1 м (рис. XXI.28). Рабочая длина волны телескопа около 5 см, угловое разрешение 10^{-4} рад.

5. *Антенные фазированные решетки*. Для радиолокатора высокое пространственное разрешение необходимо сочетать с возможностью быстрого изменения направления излучения. Эта противо-

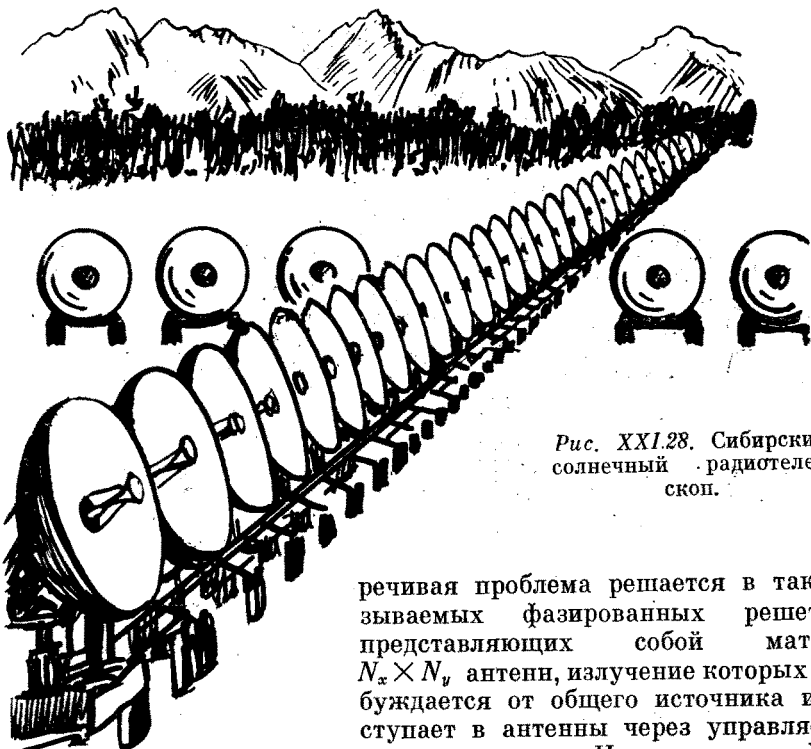


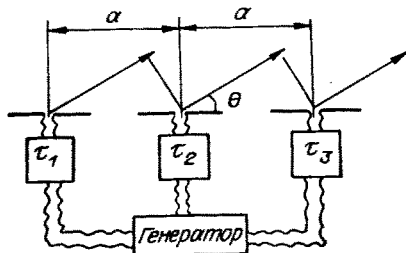
Рис. XXI.28. Сибирский солнечный радиотелескоп.

речивая проблема решается в так называемых фазированных решетках, представляющих собой матрицу $N_x \times N_y$ антенн, излучение которых возбуждается от общего источника и поступает в антенны через управляемые линии задержки. Например, для фазированной решетки, выполненной в виде набора полуволновых вибраторов, расположенных вдоль одной прямой, максимум ее излучения будет направлен под углом θ к оси антенны, если (рис. XXI.29) задержка сигнала, поступающего в каждый излучатель, возрастает по мере удаления от края антенны по закону

$$\tau_n = na \cos \theta / c; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, что направленность излучения такой антенны в плоскости, проходящей через ось антенны, есть по-прежнему $\Delta\theta \sim \lambda/Na$. Матрица $N \times N$ элементов имеет такую направленность в двух измерениях.

Рис. XXI.29. Линейная фазированная решетка.



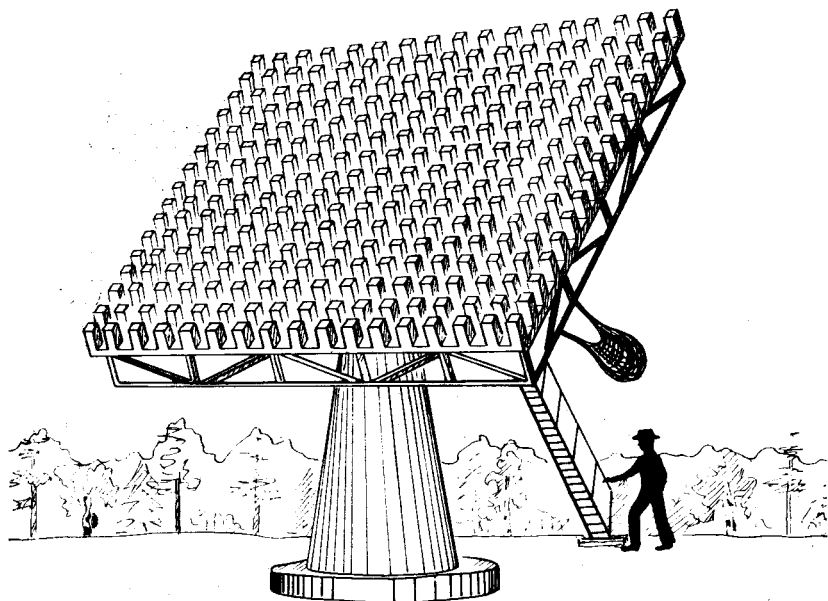


Рис. XXI.30. Приемная антенна Западно-Сибирского управления гидрометслужбы.

Фазированные решетки — очень сложные и дорогостоящие радиотехнические сооружения. Необходимость быстрой и синхронной перестройки линий задержки по заданному закону предъявляет серьезные требования к управляющей радиоаппаратуре.

Антенные фазированные решетки находят применение и в радиоастрономии. Примером таких сооружений может служить Большая сканирующая антенна (БСА) Физического института им. Лебедева АН СССР, имеющая апертуру 384×187 м и позволяющая регулировать направление приема сигнала (сканировать) в пределах $0-70^\circ$ зенитного угла θ . БСА представляет собой матрицу из 16384 дипольных вибраторов (256 рядов по 64 вибратора), ориентированных в широтном направлении и поднятых на 2 м над поверхностью Земли. При длине волны 3 м это дает разрешение около 10^{-2} рад. БСА предназначена для исследования пульсаров. Сканирование по методу фазирования осуществляется и в интерферометре ДКР-1000 (в пределах $0-43^\circ$). Приемные фазированные антенны находят применение также в метеорологии (рис. XXI.30).

6. Синтез апертуры. Пара телескопов, один из которых подвижный, может обеспечивать высокое разрешение по двум направлениям, если при своем перемещении подвижный телескоп покрывает некоторую площадь, например квадрат $a \times a$. Говорят, что такой интерферометр «синтезирует» апертуру. Разрешение интерферометра по-прежнему определяется соотношением (130.4). Существуют большие телескопы, выполненные в виде секторов параболоида или линейных решеток и обладающие высоким разрешением

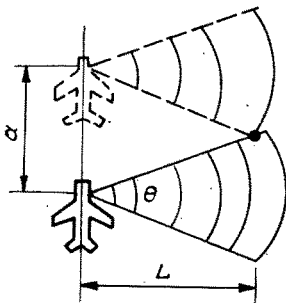


Рис. XXI.31. Схема работы локатора бокового обзора.

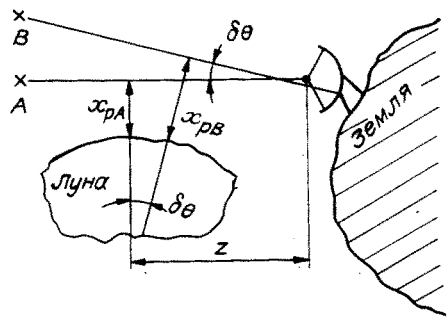


Рис. XXI.32. Схема метода покрытия Луной.

по одному направлению. Для синтеза апертуры в них используется естественное вращение Земли. Конечно, обработка информации в этом методе представляет собой более сложную задачу.

Метод синтеза апертуры применяется и в радиолокации — так называемые *радиолокаторы бокового обзора*, предназначенные для радиолокационной съемки местности. Радиолокатор, установленный на борту самолета, излучает в интервале $\theta \sim 1$ в направлении, ортогональном курсу самолета (рис. XXI.31), а сигнал, отраженный местностью, принимается локатором в том же угловом интервале θ и интерферирует (по принципу интерферометра интенсивностей) с опорным сигналом генератора. При записи сигнала регистрирующая система, кроме того, измеряет его запаздывание относительно момента излучения, что позволяет измерить расстояние до точки отражения. Излучение локатора имеет невысокую направленность, а каждый «отражающий» элемент местности играет роль точечного источника в предыдущих обсуждениях. Тогда синтезированная антенна эквивалентна линейной решетке, вытянутой вдоль курса самолета и имеющей размер $a \sim L\theta$, где L — расстояние до точки отражения сигнала, θ — угол, в котором антенна локатора принимает излучение. Поскольку угловое разрешение синтезированной антенны $\Delta\theta \sim \lambda/a$, то локатор разрешает линейные размеры порядка $L \cdot \Delta\theta \sim \lambda/\theta \sim \lambda$. Обычно локаторы антенн бокового обзора работают в сантиметровом диапазоне*.

7. *Метод покрытия Луной* следовало бы назвать, строго говоря, дифракционным методом, так как он использует явление дифракции электромагнитной волны на краю экрана — лунного диска. Идею метода можно пояснить на простейшем примере двух точечных источников, на которые постепенно «наплывает» край лунного диска (рис. XXI.32).

Свет каждого из источников дифрагирует на краю диска, в результате интенсивность излучения, падающего в каждый данный момент времени на зеркало телескопа от источников A, B , описы-

* Такой синтез апертуры с помощью одной передвижной антенны возможен благодаря когерентности источника и неприменим, например, при наблюдении звезд.

вается соотношением (99.6), в котором

$$w_{A, B} = (x_p)_{A, B} \sqrt{\pi/\lambda z} = \theta_{A, B} \sqrt{\pi z/\lambda}; \quad (x_p)_B \approx (x_p)_A + z \cdot \delta\theta, \quad (130.13)$$

$\delta\theta$ — угловое расстояние между источниками. В области больших значений w ($w \sim 5$, см. § 99) выражение для интенсивности можно, используя асимптотики (99.4), записать в виде

$$I(w) = I_{0A} \left(1 + \frac{\sin\left(w_A^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} w_A} \right) + I_{0B} \left(1 + \frac{\sin\left(w_B^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} w_B} \right).$$

Положим $w_B = w + \delta w$, $w_A \equiv w$. Очевидно, $\delta w = z \cdot \delta\theta \sqrt{\pi/\lambda z}$. В приближении $\delta w \ll w$, $I_{0A} = I_{0B} = I_0$ получим

$$I(w) \approx 2I_0 \left(1 + \frac{\sin(w^2 + w\delta w - \pi/4)}{\sqrt{\pi} w} \right). \quad (130.14)$$

Записывая эту интерференционную картину при движении Луны и регистрируя одновременно положение источника A на небосводе (т. е. измеряя x_{pA} и соответственно w), можно вычислить значение δw по периоду интерференционной картины $(w^2 + w \cdot \delta w)_1 - (w^2 + w \cdot \delta w)_2 = 2\pi$. Точность, с которой можно измерить значение δw , а значит, и $\delta\theta$, принципиально ограничена тем, что значение x_p определено с точностью до неровностей лунной поверхности δx_p , т. е. $\delta w \geq \delta x_p \sqrt{\pi/\lambda z}$. Следовательно, $\delta\theta \geq \delta x_p/z$. В этом заключается основная особенность метода покрытия Луной: точность измерения углового размера не зависит от длины волны излучения источника.

8. *Радиолокационный метод изучения планет* — одно из интересных направлений астрофизики. В качестве наиболее значительных достижений этого метода можно указать полученную советскими радиоастрономами (г. Горький) в 70-х годах картину поверхности планеты Венера. Карта была настолько точной, что позднее она позволила американским исследователям осуществить вывод на орбиту вокруг Венеры низколетящих спутников, с помощью которых сняли (также радиолокационными методами) более детальную карту поверхности. Любопытно, что последняя, в свою очередь, способствовала выбору наиболее подходящего места для посадки на Венеру в 1981 г. советской автоматической станции.

Одна из главных трудностей в радиолокационном изучении планет связана с громадным ослаблением приходящего на Землю сигнала, отраженного планетой. Его интенсивность падает обратно пропорционально четвертой степени расстояния от Земли до планеты (интенсивности прямой и отраженной волн убывают обратно пропорционально квадрату расстояния). Поперечный размер волнового фронта вблизи планеты обычно во много раз превышает ее размеры. При отражении излучения от планеты каждая точка ее поверхности является источником новой, также широко расходя-

щейся волны. В волне, приходящей на Землю, приемно-анализирующая система радиотелескопа выделяет парциальные сигналы, отраженные разными областями планеты. Для этого используются результаты измерений доплеровского смещения частоты и относительного запаздывания сигнала. Величина доплеровского смещения, возникающего из-за вращения планеты, зависит от положения точки отражения на планете (задача 1).

Задача 1. Найти сдвиг частоты сигнала, отраженного точкой поверхности планеты, стоящей на расстоянии r от оси вращения и имеющей широту α (см. рис. XXI.33).

Частота сигнала локатора в сопутствующей системе, движущейся со скоростью точки A , есть $\omega' = \gamma(\omega_0 + k_0 \sin \alpha \cdot V) \approx \omega_0(1 + \beta \sin \alpha)$, $\beta \ll 1$. Отраженный точкой A сигнал в этой системе имеет ту же частоту ω' , а в системе Земли —

$$\omega_{\text{отр}} = \frac{\omega'}{1 - \beta \sin \alpha} = \omega_0 \frac{1 + \beta \sin \alpha}{1 - \beta \sin \alpha} \approx \omega_0 (1 + 2\beta \sin \alpha).$$

Таким образом, сдвиг частоты отраженного сигнала

$$\Delta\omega = \omega_0 \cdot 2 \frac{V \sin \alpha}{c} = \omega_0 \cdot 2 \frac{\Omega x_A}{c},$$

где x_A — координата точки отражения, Ω — частота вращения планеты.

Прежде всего оценим величину сдвига частоты. Период обращения Венеры 242,98 земных суток, так что $\Omega \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$, поэтому $(\Delta\omega/\omega_0)_{\text{max}} = 1,24 \cdot 10^{-8}$, что, например, на длине волны 75 см (частота 400 МГц) дает сдвиг частоты всего лишь 5 Гц. Задача измерения такого частотного сдвига достаточно сложна.

Из соотношения (130.14) следует еще одно замечательное обстоятельство: на поверхности планеты существуют кольцевые зоны одинакового сдвига частоты отраженного сигнала. Эти зоны расположены вдоль линии пересечения сферической поверхности планеты с плоскостью $x = \text{const}$ (рис. XXI.34). Кроме того, можно выделить зоны одинакового среднего запаздывания. Очевидно, это кольцевые зоны вблизи линии пересечения поверхности планеты

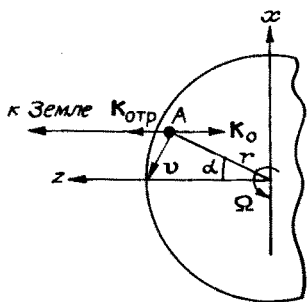


Рис. XXI.33. К расчету сдвига частоты сигнала, отраженного планетой (вид на планету вдоль оси ее вращения).

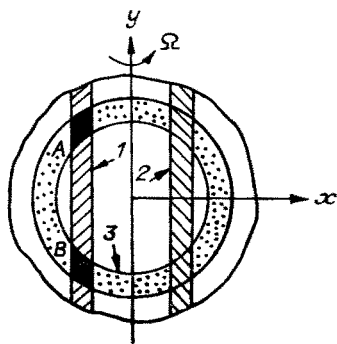


Рис. XXI.34. Зоны одинакового сдвига частоты (1 — $\Delta\omega > 0$; 2 — $\Delta\omega < 0$) и одинакового запаздывания (3).

плоскостью $z = \text{const}$. Ширина зон определяется разрешением локатора соответственно по частоте и временному запаздыванию сигнала. Таким образом, по сдвигу частоты и запаздыванию можно локализовать две области (A и B на рис. XXI.34) и «привязать» их к поверхности планеты с указанной неопределенностью. Поэтому карты планет, полученные радиолокационным методом, имеют «вынужденную» симметрию.

Даже при минимальном удалении Венеры от Земли запаздывание сигнала в среднем составляет около 5 мин, а точность измерения запаздывания в радиолокационном методе достигает нескольких микросекунд (порядка 10^{-8} от полного запаздывания). Точности измерения $\Delta\omega$ и Δt определяют размер области локализации на планете.

Задача 2. Оценить размер области локализации на планете Венера, если разрешение по частоте 1 Гц, по запаздыванию $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6}$ с, длина волны локатора 15 см (частота 2 ГГц).

Из (130.14) получим точность измерения координаты x (см. рис. XXI.33) $\delta x = (\Delta\omega/\omega_0)(c/2\Omega) \approx 250$ км. Широтная протяженность области по поверхности планеты $\delta l_x = \delta x/\sqrt{1 - (x/r)^2} \geq \delta x$. Аналогично протяженность области по долготе $\delta l_y = c \cdot \Delta t/\sin \theta$, где θ — угол между радиус-вектором, проведенным из центра планеты в локализуемую область, и направлением из центра планеты на Землю. Ясно, что наихудшее разрешение при $\theta \rightarrow 0$. Эти области не обмеряют, ожидая, пока они сместятся за счет вращения планеты. Таким образом, $\delta l_y \sim c \cdot \delta t \sim 1$ км. Отметим, что радиолокационная карта Венеры является примером превышения дифракционного предела в измерениях. Так, для разрешения двух точек, отстоящих на поверхности Венеры на 250 км (угол $6 \cdot 10^{-5}$ рад), телескоп-интерферометр, работающий на длине волны 15 см, должен иметь базу 2 км, тогда как фактический размер телескопа составлял 300 м.

Радиолокация планет, кроме данных о структуре их поверхности, позволяет получить много других ценных сведений. В частности, с помощью этого метода с высокой точностью измерены параметры орбит Венеры, Меркурия и спутника нашей планеты — Луны. Локация Венеры или Меркурия вблизи фазы максимального удаления от Земли (когда прямая, соединяющая планеты, касательна к поверхности Солнца) открывает возможности интересных экспериментов для проверки общей теории относительности.

Эти примеры подтверждают тот замечательный факт, что астрофизика (и часть ее — астрономия) в наше время перестала быть наукой описательной, а стала наукой экспериментальной.

9. «Радиовидение», или голография в радиодиапазоне. Принципы голографии, описанные в главе XVII, могут быть перенесены и

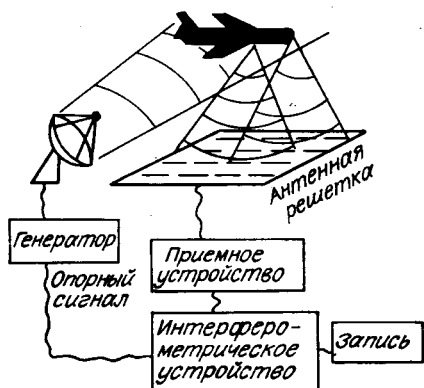


Рис. XXI.35. Схема регистрации радиоголограммы.

в радиодиапазон. Одна из возможных схем регистрации радиодограммы показана на рис. XXI.35. Волна радиолокатора, рассеянная объектом, регистрируется (по амплитуде и фазе) приемной антенной решеткой, причем в интерферометрическое устройство поступают последовательно сигналы от каждого элемента решетки. В интерферометрическом устройстве сигналы интерферируют с опорным сигналом генератора и записываются. При записи учитывается очередность сигналов, так что в памяти записывающего устройства (ЭВМ) возникает двумерная матрица-голограмма. Для ее восстановления нужно каким-либо способом спроектировать эту запись на экран (или экспонировать фотопленку и проявить) и восстановить в свете лазера. Такая схема является аналогом схемы голографии Френеля, и восстановленное изображение будет уменьшено в отношении длин волн, т. е. в несколько сотен тысяч раз. Поэтому более реальным (а главное, оперативным) представляется метод послойного воспроизведения на экране дисплея изображения, восстановленного в ЭВМ соответствующими вычислительными операциями. Очевидно, разрешение такой голограммы будет определяться размерами приемных элементов антенной решетки.

В заключение укажем на одно любопытное и практически очень важное «земное» применение радиоастрономических интерференционных методов. Можно обратить задачу и по интерференционной картине от излучения точечного источника измерять с высокой точностью базу аддитивного интерферометра, состоящего из неподвижного и подвижного (одного или нескольких) телескопов. Последний может перемещаться на значительные расстояния. Измеряя базу интерферометра, можно с высокой точностью определять расстояние между телескопами (между фокусами их зеркал!) $a = \lambda / \cos \theta \cdot \Delta \theta$, где θ — угол, задающий направление на источник, $\Delta \theta$ — изменение угла, соответствующее сдвигу фазы φ на 2π (для уменьшения ошибки измеряют средние по многим периодам интерференционной картины значения θ и $\Delta \theta$). Так современные методы радиоастрономии позволяют решать задачи геодезии. Следующий шаг в развитии этого направления — измерение колебаний земной коры, движения материков и т. д. Существенно, что для измерения относительного изменения базы не требуется точного знания длины волны источника и его положения на небосводе — достаточно фиксировать изменение периода интерференционной картины во времени: $\Delta a/a = \Delta \varphi/\varphi$. Естественно, что при этом речь идет о медленных колебаниях земной коры, характерное время которых много больше суток.

§ 131. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН И РАДИОСВЯЗЬ

Условия радиосвязи на нашей планете определяются строением и составом атмосферы, гидросферы и верхних слоев литосферы.

Атмосферу принято делить на четыре слоя. Толщина нижнего слоя — тропосферы — уменьшается с широтой от 16—18 км в тро-

никах до 8—10 км в полярных широтах. В тропосфере с высотой падают температура (около 6,5 град/км) и плотность воздуха (примерно втрое на толщине слоя). Выше, до высоты 50—55 км, расположена стратосфера, где температура примерно постоянна или растет с высотой, а плотность падает. Над стратосферой лежит мезосфера, верхняя граница которой примерно 85 км. Именно в этом слое находится плазменный пояс — ионосфера. Самый верхний слой — термосфера, где температура растет с высотой (от -90°C на нижней границе), пока не выходит на постоянное значение порядка 1—2 тыс. град на высоте 400 км.

Говоря о дальности распространения радиоволн, мы не будем пользоваться какими-либо точными определениями этого понятия. Приводимые цифры соответствуют по порядку величины освоенным для современного уровня развития радиотехники (мощность передатчиков и чувствительность приемников) расстояниям, на которых осуществляется устойчивая радиосвязь.

Излучение с длиной волны больше 10 м поглощается ионосферой и почти не отражается ею. Поэтому волны СДВ, ДВ и СВ диапазонов распространяются в «коридоре» между поверхностью Земли и ионосферой, затухая из-за потерь и рассеяния в тропосфере и проводящих слоях литосферы и дифрагируя (больше или меньше в зависимости от длины волны) на возвышениях местности и «горизонте».

Сверхдлинные волны имеют еще одну особенность — из-за низкой частоты они хорошо проходят «сквозь Землю». Действительно удельное сопротивление поверхностных слоев Земли довольно велико — от единиц до нескольких тысяч ом-метров у осадочных пород и от сотен до сотен тысяч ом-метров у магнетических и метаморфических (граниты, базальты и т. п.) пород. Соответственно скин-слой для волны с частотой, например, 3 кГц ($\lambda = 100$ км) лежит в пределах от нескольких десятков метров до нескольких километров. Дальность распространения СДВ порядка нескольких тысяч километров. На заре радиотехники дальняя радиосвязь осуществлялась на длинных и сверхдлинных волнах и были построены антенны радиотелеграфной связи Европа — Америка на волнах около 16 км. В наше время СДВ диапазон используется, главным образом, для связи с подводными лодками — лодка ложится на грунт и принимает радиосигнал, распространяющийся сквозь толщу Земли. Такая радиосвязь действовала во время второй мировой войны (волны 15—20 км). Со временем этот способ получил развитие. В частности, обнаружено явление «каналирования» СДВ естественными волноводами, образующимися в приповерхностных слоях литосферы из-за скачков плотности пород. Кроме того, шагнула вперед и радиотехника. В начале 80-х годов, например, в США разработана система связи на частотах 20 — 60 Гц (длина волны 15 — 45 тыс. км!), для которых толщина скин-слоя в морской воде (удельное сопротивление 0,3 Ом · м) составляет 60—35 м, что позволяет лодке вести радиоприем в подводном положении. Конечно, поток информации на таких частотах очень мал, и возможна лишь телеграфная связь, но куда спешить, если лежишь на грунте!

Еще одно применение СДВ — геофизика, зондирование земной коры радиоволнами. Впечатляющий эксперимент такого рода был осуществлен в СССР в 1977 г., когда в качестве излучателя использовалась естественная петля, охватившая п-ова Средний и Рыбачий в Баренцевом море. В морскую воду опустили электроды, соединенные кабелем, проложенным через перешеек этих полуостровов, и подали на эту петлю (площадь 5 тыс. км²) импульс тока. В результате удалось «просветить» Кольский полуостров и часть Карелии. В таком зондировании достигнута глубина порядка 50 км.

Длинные и средние волны используются в основном для радиовещания, а средние волны — еще и для коммерческой, т. е. деловой, технической радиосвязи. Дальность радиосвязи в этих диапазонах порядка 1 тыс. км.

Короткие волны в принципе не имеют ограничений по дальности распространения, так как они хорошо отражаются ионосферой и возвращаются на Землю. Любопытно, что для дальней радиосвязи короткие волны стали применяться только в конце 20-х годов, когда особенность их распространения была обнаружена... радиолюбителями. Из-за «тесноты в эфире» в ДВ и СВ диапазонах радиолюбителей вытеснили в КВ, где совершенно неожиданно их голоса стали слышны по всей планете. Об этом факте интересно рассказал в своих воспоминаниях замечательный советский радист-полярник Э. Кренкель. Ему, в частности, удавалось с дрейфующей станции «Северный полюс» (1937 г.), располагавшей передатчиком мощностью всего лишь 20 Вт, связываться с радиолюбителями Австралии и Новой Зеландии!

По мере развития техники возникает все большая теснота в эфире. Телевидение только усугубило эту проблему, так как для передачи телевизионного, особенно цветного, изображения требуется очень широкая полоса частот — около 6 МГц (см. задачу 1, § 79). Поэтому современная радиосвязь, не забывая хорошо опробованные «старые» методы, все больше развивается в сторону УКВ диапазона.

Ультракороткие волны слабо поглощаются и отражаются ионосферой. Поэтому в основном радиосвязь в УКВ диапазоне работает в пределах «прямой видимости».

Все большее место в наземной дальней радиосвязи занимают релейные линии (от англ. relay — замена). Они представляют собой систему приемно-передающих (ретрансляционных) станций, отстоящих одна от другой на расстояния, величина которых определяется типом линий. В линиях прямой видимости — это расстояния в 50—100 км; приемная и передающая антенны-зеркала ретрансляционных станций устанавливаются на высоких мачтах или башнях, так что антенна одной станции находится в прямой видимости другой. В СССР эти линии в основном используют диапазоны 7—9 см и 13—20 см, реже 0,75—3 м. Мощность передатчиков не более 10 Вт. Эти линии используются для телефонной, телеграфной связи и передачи телевизионных программ. Одна ли-

ния обслуживает одновременно до 600 каналов благодаря широкой полосе частот, в которой ведется связь. Укажем, что в США уже к 1966 г. радиорелейные линии прямой видимости обеспечивали 40% всей междугородной телефонной сети.

Тропосферные радиорелейные линии используют для своей работы эффект рассеяния УКВ на неоднородностях тропосферы на высоте 10—12 км. Расстояние между ретрансляционными станциями в этих линиях 150—500 км, работают они на излучении с длиной волны от 3 см до 1 м, а передатчики отличаются значительной мощностью — до сотен киловатт. Именно этот уровень мощности в сочетании с чувствительной приемной радиоаппаратурой и позволил реализовать такой экзотический, на первый взгляд, способ радиосвязи. Для ретрансляционных станций обычно используются параболические зеркальные антенны.

Аналогично действуют ионосферные радиорелейные линии. В этих линиях используются радиоволны метрового диапазона — от 4 до 12 м, что определяется отражательными и рассеивающими свойствами ионосферы. Расстояния между станциями этого типа достигают 2 тыс. км, причем расстояния короче 700—900 км оказываются неэффективными. Мощность передатчиков в таких линиях 50—100 кВт, антенны — сложные директорные, остронаправленные. Примером такой линии связи является действующая с 1957 г. система, связывающая Англию и США (4500 км) через три промежуточные станции (п-ов Лабрадор, Гренландия, Исландия). Тропосферные и ионосферные линии связи отличает высокая помехоустойчивость.

И все же наиболее современным видом дальней связи являются спутниковые линии связи. Действующая в Советском Союзе система «Орбита» обслуживается спутниками связи «Молния», которые выводятся на орбиту с апогеем 40,6 тыс. км в Северном полушарии и перигеем 653 км в Южном полушарии. Наклонение орбиты к плоскости экватора — $62,8^\circ$, период обращения спутника — 12 ч. При этом на каждом нечетном витке (отсчет от старта) апогей находится над территорией СССР, и спутник в течение 9 ч обеспечивает связь по всей территории Европы и Азии. На четном витке апогей находится над Северной Америкой, и спутник в течение 3 ч позволяет осуществлять связь между европейской частью СССР и Северной и Центральной Америкой. Бортовой передатчик спутника обладает мощностью 40 Вт, работает на двух частотах f_1 и f_2 , лежащих внутри диапазона 0,8—1 ГГц ($\lambda \approx 30$ см). Приемник спутника рассчитан на уровень мощности входного сигнала не менее 10^{-9} Вт и имеет другие частоты f_3 и f_4 из того же диапазона, но отличающиеся от f_1 и f_2 , что необходимо для отстройки от взаимных помех сигналов. Приемник и передатчик питаются от солнечных батарей и работают на общую параболическую антенну. Спутник имеет систему ориентации. Приемная наземная станция системы «Орбита» (см. рис. XXI.17) имеет антенну диаметром 12 м, которая рассчитана на работу без ветрозащитного

устройства до скоростей ветра 25 м/с в температурном диапазоне $\pm 50^\circ\text{C}$.

Другой разновидностью спутниковых линий связи является так называемая глобальная, которую обслуживают три спутника, равномерно отстоящие друг от друга на круговой геостационарной, или синхронной, орбите радиусом 35,7 тыс. км в плоскости экватора. Период обращения таких спутников 24 ч, так что они висят над одной и той же точкой Земли и «освещают» 98% площади планеты (до широт $76,5^\circ$). В СССР спутники связи на геостационарной орбите работают с конца 1976 г. — спутники серии «Экран» (более позднее название «Радуга»). Они обеспечивают передачу цветных программ Центрального телевидения на районы Сибири и Монголии, а с 1983 г. обслуживают также систему телевидения Индии. Спутник висит над экватором на долготе 99° (меридиан, проходящий через о. Суматра и посередине между Красноярском и Иркутском). Интересно, что система связи «Экран» позволяет устанавливать передачи ЦТВ на индивидуальные телевизионные установки «Экран 4М», что важно для малонаселенных районов.

Система «Орбита» была в свое время первой из наиболее разветвленных национальных систем космической связи. Свое вещание в рамках «Интервидения» она ведет и на зарубежные страны. Другой крупнейшей мировой системой космической связи является созданная под эгидой США система «Интелсат», которую обслуживают спутники как с наклонными, так и с геостационарными орбитами.

Рекордными по дальности можно считать системы связи с космическими кораблями. В эксперименте со станциями «Венера» управление последними при посадке осуществлялось с Земли, а изображение поверхности планеты и информация о параметрах ее атмосферы были переданы на Землю. Другой пример сверхдальней радиосвязи (свыше 1 млрд. км) — управление американскими космическими кораблями «Вояджер» при их полете к Сатурну и передача на Землю поразительно сложной структуры колец этой планеты.

Глава XXII

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Основные закономерности излучения релятивистской заряженной частицы можно получить, используя результаты предыдущих разделов. Мы уже знаем, как «устроено» излучение нерелятивистской частицы, и знаем законы преобразования полей, потенциалов,

энергии, потока энергии при переходе из одной системы в другую. Это позволяет с помощью введения мгновенно сопутствующей системы получить интересующие нас физические величины в лабораторной системе. Такой прием применяется ниже в § 132. В некоторых случаях проще воспользоваться общими соотношениями для потенциалов и полей заряженных частиц. В этой главе мы рассмотрим наиболее характерные виды излучения релятивистской частицы, движущейся во внешних электромагнитных полях и в среде.

§ 132. МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ И СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ

Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле является движением с переменной скоростью, т. е. частица излучает, теряя часть своей энергии. Этот результат для нерелятивистских скоростей частиц уже получен в главе XX. Рассмотрим теперь релятивистский случай.

Будем для краткости называть «системой частицы» мгновенно сопутствующую систему отсчета, а величины в этой системе обозначать индексом «0». Если ускорение частицы в такой системе имеет значение w_0 , то там полный поток энергии (мощность) излучения частицы (см. (124.6))

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w_0^2. \quad (132.1)$$

Дипольное излучение не уносит импульса, так как оно распределено в пространстве симметрично относительно вектора w_0 . В этом случае говорят, что излучение импульса dp_0/dt_0 равно нулю (тогда как излучение энергии отлично от нуля). Поэтому в лабораторной системе изменение энергии и импульса $d\mathcal{E} = \gamma d\mathcal{E}_0$, $dp_x = \gamma v d\mathcal{E}_0/c^2$ и, кроме того, $dt = \gamma dt_0$. Здесь $v = dr/dt$ — мгновенная скорость частицы, ось x направлена вдоль v , $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Таким образом, в лабораторной системе потери энергии частицы на излучение в единицу времени и связанное с ними изменение импульса описываются соотношениями

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}. \quad (132.2)$$

Обратим внимание на замечательную особенность выражения (132.2): импульс излучается только в лабораторной системе из-за излучения энергии. Простой моделью такой физической ситуации является движение грузовика, в кузове которого сидят два пассажира и синхронно швыряют одинаковые яблоки с одинаковой скоростью в противоположных направлениях (в системе грузовика). Тогда скорость грузовика не меняется, но меняется его масса и, следовательно, импульс. Сопоставление этого примера с картиной излучения частицы еще раз указывает на существование инерционных (механических) свойств электромагнитного поля.

Выразим теперь изменение энергии и импульса частицы через значение внешнего электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , в котором движется частица. Ускорение в системе частицы

$$\mathbf{w}_0 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0, \quad (132.3)$$

так как скорость частицы в этой системе по определению равна нулю. Воспользовавшись преобразованиями для поля, запишем $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\parallel} + \mathbf{E}_{0\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}))$, где индексы \parallel и \perp обозначают направления, параллельные и перпендикулярные вектору $\mathbf{v}(\boldsymbol{\beta})$. Для квадрата ускорения w_0 найдем

$$w_0^2 = \frac{e^2}{m^2} \{E_{\parallel}^2 + \gamma^2 (\mathbf{E}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}))^2\} = \frac{e^2}{m^2} \gamma^2 \{|\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H})|^2 - (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{E})^2\}.$$

Подставляя этот результат в (132.1) и затем в (132.2), получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 \{|\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H})|^2 - (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{E})^2\}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (132.4)$$

где $r_e = e^2/mc^2$ — классический радиус частицы.

Задача 1. Ультррелятивистская частица рассеивается на неподвижном кулоновском центре (заряд Ze) на малый угол. Оценить потери на излучение для заданного прицельного параметра ρ .

Считая траекторию частицы прямолинейной и вводя координату x вдоль траектории ($x = 0$ на минимальном расстоянии частицы от центра), запишем компоненты поля:

$$E_{\parallel} = Ze \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}; \quad E_{\perp} = Ze \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Потери энергии частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 \{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2 (1 - \beta^2)\},$$

и можно полные потери представить в виде суммы двух членов ($\beta \approx 1$):

$$\mathcal{E}_{\perp} \approx \frac{2}{3} r_e^2 \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp}^2 dx; \quad \mathcal{E}_{\parallel} \approx \frac{2}{3} r_e^2 \int E_{\parallel}^2 dx.$$

Интегрируя, найдем

$$\mathcal{E}_{\perp} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Z^2 e^2 \gamma_e^2}{\rho^3} \gamma^2; \quad \mathcal{E}_{\parallel} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{Z^2 e^2 r_e^2}{\rho^3}.$$

Таким образом, $\mathcal{E}_{\perp} = \gamma^2 \mathcal{E}_{\parallel} / 3 \gg \mathcal{E}_{\parallel}$, т. е. основные потери на излучение в данном случае связаны с поперечным ускорением частицы. Этот результат является достаточно общим, как мы увидим ниже.

Задача 2. Получить выражения для потерь энергии-импульса частицы, записанные через ее ускорение в лабораторной системе.

Выбирая, как обычно, направление декартовой оси x в лабораторной системе вдоль мгновенной скорости частицы \mathbf{v} , запишем:

$$v_{0x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v_{0y} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}; \quad v_{0z} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)},$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, v_x, v_y, v_z — компоненты скорости частицы в лабораторной системе ($v_x = v, v_y = v_z = 0$, но эти значения можно подставить только после вычисления w). Очевидно, компоненты ускорения

$$w_{0\alpha} = \frac{dv_{0\alpha}}{dt_0} = \frac{dv_{0\alpha}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_0} = \gamma \frac{dv_{0\alpha}}{dt}.$$

Дифференцируя компоненты скорости и подставляя $v_x = v, v_y = v_z = 0$, получим

$$w_{0x} = \gamma^3 w_x; \quad w_{0y} = \gamma^2 w_y; \quad w_{0z} = \gamma^2 w_z.$$

Подстановка в (132.1) дает

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 (w^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{w})^2). \quad (132.5)$$

Запишем теперь соотношения для энергии-импульса излучения частицы в релятивистски-инвариантном виде. Для этого по общему правилу заменим трехмерные векторы на 4-векторы и представим (132.1) как четвертую компоненту вектора энергии-импульса:

$$dP_4 = \frac{2e^2}{3c^5} \left(\frac{dU_n}{dt_e} \cdot \frac{dU_n}{dt_e} \right) dx_4, \quad (132.6)$$

где $P_4 = i\mathcal{E}/c$, U_n — 4-вектор скорости, $dt_e = dt/\gamma$ — инвариантное время частицы. Отсюда, полагая $dx_n = U_n dt_e$, получим

$$\frac{dP_k}{dt_e} = \frac{2e^2}{3c^5} \left| \frac{dU_n}{dt_e} \right|^2 U_k. \quad (132.7)$$

С другой стороны, уравнение движения заряда в электромагнитном поле можно записать в четырехмерной форме

$$m \frac{dU_k}{dt_e} = G_k = eF_{kl}U_l, \quad (132.8)$$

где G_k — компоненты 4-силы, которые выражаются через компоненты тензора поля F_{kl} . Пространственные компоненты 4-вектора G_k связаны с силой Лоренца соотношением

$$f_\alpha = \frac{G_\alpha}{\gamma} = \frac{eF_{\alpha l}U_l}{\gamma} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right)_\alpha.$$

Подставляя (132.8) в (132.7), имеем

$$\frac{dP_k}{dt_e} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_e^2}{c} |F_{kl}U_l|^2 U_k, \quad (132.9)$$

что совпадает с (132.4).

Выведем релятивистски-инвариантное выражение для силы торможения трением. Если, однако, прямо перейти к 4-векторам в выражении (126.2), то получится неправильное выражение для 4-силы торможения

$$G_k^{(\tau)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} U_k'' \quad (132.10)$$

(здесь штрих означает дифференцирование по инвариантному времени dt_e), поскольку оно не удовлетворяет тождеству $G_k^{(r)}U_k \equiv 0$. Это следует из соотношения $(U_k U_k)' = (-c^2)' \equiv 0$. Недостающее в (132.10) слагаемое можно найти из полного баланса энергии-импульса с учетом буферного поля, 4-вектор импульса которого обозначим Λ_k . Имеем

$$G_k^{(r)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^5} |U_n'|^2 U_k - \Lambda_k'.$$

Сравнивая это выражение с (132.10), запишем

$$\Lambda_k = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} U_k' \quad (132.11)$$

и

$$G_k^{(r)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{|U_n'|^2}{c^2} U_k - U_k'' \right). \quad (132.12)$$

Это выражение, конечно, удовлетворяет необходимому тождеству $G_k^{(r)}U_k = 0$. Отметим, что при $v \ll c$ четвертая компонента Λ_4 дает энергию буферного поля (126.4).

Проанализируем выражение для 4-силы торможения (132.12). При $v \ll c$ первым слагаемым можно пренебречь, и мы возвращаемся к нерелятивистской силе торможения (126.2). В противоположном предельном случае ($\gamma \gg 1$) можно пренебречь вторым слагаемым, так как $U_k \propto \gamma$. При этом трехмерная сила торможения

$$\mathbf{f}_T = -\frac{2}{3} r_e^2 \beta \gamma^2 |\mathbf{E}_\perp + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H})|^2. \quad (132.13)$$

Обратим внимание, что при очень больших γ сила торможения может значительно превышать внешнюю силу Лоренца:

$$f_T/f_L \sim r_e^2 H \gamma^2 / e. \quad (132.14)$$

Это не противоречит ограничению для собственной системы отсчета $(f_T/f_L)_0 \ll 1$ (см. § 126), так как

$$(f_T/f_L)_0 \sim \omega_0 e^2 / mc^3 \sim r_e / \lambda_0 \ll 1, \quad (132.15)$$

где $\lambda_0 = c/\omega_0$ — характерная длина волны внешнего поля в собственной системе отсчета. Поскольку $\lambda_0 \sim l/\gamma$, где l — характерный размер поля в лабораторной системе, то из (132.15) получаем $\gamma \ll l/r_e$, с учетом этого условия из (132.14) находим

$$f_T/f_L \ll l^2 H / e. \quad (132.16)$$

Это отношение может быть очень большим в широком интервале значений γ :

$$\sqrt{\frac{e}{H r_e^2}} \ll \gamma \ll \frac{l}{r_e}. \quad (132.17)$$

В земных условиях левое неравенство выполняется только для электронов космических лучей с $\gamma \gtrsim 10^8$ ($\mathcal{E} \gtrsim 10^{14}$ эВ). Однако во Все-

ленной существуют сверхплотные нейтронные звезды — пульсары с магнитным полем порядка 10^{12} Гс. В таком поле сила торможения является определяющей уже для $\gamma \geq 10^2$ ($\mathcal{E} \geq 10^8$ эВ).

Рассмотрим торможение частицы в магнитном поле $H(x)$ при выполнении этого условия. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = f_{\tau} = -\frac{2}{3} r_e^2 \left(\frac{p}{mc}\right)^2 H^2(x),$$

откуда, переходя к производной по координате x , получаем решение (Померанчук, 1939 г.)

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{2}{3} \left(\frac{r_e}{mc^2}\right)^2 c \int_0^x H^2(x) dx + \frac{1}{p(0)}. \quad (132.18)$$

Этот результат имеет интересную особенность: как бы велика ни была начальная энергия частицы, ее конечная энергия после пролета поля не превышает некоторого значения \mathcal{E}_{\max} , которое зависит только от величины и конфигурации поля. Полученное решение справедливо при условии, что ларморовский радиус частицы в магнитном поле при минимальном импульсе $p(l)$ много больше характерного размера поля l :

$$\frac{\rho_L(p_{\min})}{l} \sim \left(\frac{r_e}{l}\right)^2 \left(\frac{e}{Hr_e^2}\right)^3 = \left(\frac{H_c(l)}{H}\right)^3 \gg 1,$$

где критическое поле

$$H_c(l) = \frac{e}{(r_e^2 l)^{2/3}}. \quad (132.19)$$

Для Земли ($l \sim 1$ тыс. км) это поле порядка 100 Гс, т. е. условие $\rho_L \gg l$ удовлетворяется. Это условие эквивалентно, конечно, неравенству $f_{\tau} \gg f_{\kappa}$. Для пульсара ($l \sim 10$ км) $\rho_L(p_{\min}) \ll l$, и траектория электрона в процессе торможения перестает быть прямолинейной. Решение (132.18) остается справедливым (при $\gamma \gg 1$), если вместо x подставить координату вдоль фактической траектории электрона.

Задача 3. Ультрарелятивистская частица пересекает участок однородного магнитного поля, ортогонального ее траектории. Найти \mathcal{E}_{\max} и выяснить условия, при которых на выходе из поля энергия частицы близка к \mathcal{E}_{\max} .

Считая траекторию частицы прямолинейной, из (132.18) найдем

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{3}{2} \left(\frac{mc^2}{r_e H_0}\right)^2 \frac{1}{l}.$$

Условие максимальной потери энергии, очевидно, имеет вид $\mathcal{E}_0 \gg \mathcal{E}_{\max}$. Например, для электрона в поле напряженностью 100 кГс и протяженностью 30 м $\mathcal{E}_{\max} = 265$ ГэВ. Заметим, что радиус кривизны траектории электрона при таких значениях энергии и поля равен 88 м, так что оценки в приближении прямолинейности траектории достаточно точны.

Задача 4. Оценить потери энергии на излучение ультрарелятивистской частицей, пролетающей над сгустком N таких же частиц, движущимся ей навстречу. Сгусток имеет форму ленты с размерами $l \gg a \gg h$, частица летит вдоль направления l над плоскостью.

Из (132.4) найдем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 \left(\frac{2\pi N e}{la} \right)^2 [(1 + \beta^2)^2 - \beta^2]; \Delta\mathcal{E} \approx 8\pi^2 r_e^2 \gamma^2 \frac{N^2 e^2}{a^2 l}.$$

В ускорителе со встречными линейными электрон-позитронными пучками (ВЛЭПП), разрабатываемом в ИЯФ СО АН СССР, предполагаются параметры сгустка $N \sim 10^{12}$, $a = 10$ мкм, $l = 5$ мм, что на энергии 100 ГэВ ($\gamma = 2 \cdot 10^5$) дает $\Delta\mathcal{E} = 70$ ГэВ. В проекте ВЛЭПП встречные сгустки имеют толщину $h \sim 0,1$ мкм, что необходимо для получения высокой плотности сгустков и соответственно высокой светимости встречных пучков (большое число взаимодействий сталкивающихся частиц за одну встречу). Для уменьшения потерь на излучение их делают плоскими.

§ 133. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Вначале, не конкретизируя причины, вызывающие ускорение заряженной частицы, рассмотрим общие свойства ее излучения при заданном ускорении w . Как мы уже видели выше (задача 1, § 132), компоненты силы, параллельные и перпендикулярные скорости частицы v , вызывают излучение существенно разной интенсивности. Это нетрудно понять, если вспомнить, что одинаковые по величине силы, одна из которых параллельна скорости, а другая перпендикулярна, создают разные по величине ускорения частицы:

$$w_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{\gamma^3 m}; \quad w_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{\gamma m}. \quad (133.1)$$

По этим причинам мы рассмотрим отдельно составляющие излучения, связанные с каждой из двух компонент ускорения. Итак, пусть ускорение $w = w_{\parallel} + w_{\perp}$. Как мы уже отмечали (см. § 124), выражения для поля движущейся частицы содержат и поле излучения — это слагаемые, обратно пропорциональные первой степени расстояния R_e между зарядом и точкой наблюдения (§ 121):

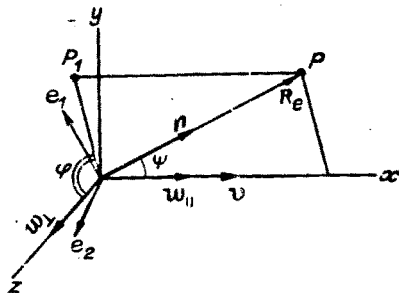
$$E_{\sim}(r_p, t) = \frac{e}{c^2 R_e} \cdot \frac{n \times ((n - \beta) \times w)}{(1 - \beta n)^3}; \quad H_{\sim} = n \times E_{\sim}. \quad (133.2)$$

Напомним, что все величины в правой части выражения для E определены в момент времени $t' = t - R_e(t')/c$.

Введем мгновенно сопутствующую систему координат, начало которой поместим в точке, где в момент t' находится заряд, ось x

Рис. XXII.1. К расчету излучения релятивистской заряженной частицы.

Ось x направлена вдоль векторов v, w_{\parallel} ; P_1 — проекция точки P на плоскость (y, z) : вектор e_1 лежит в плоскости (n, x) и перпендикулярен n ; вектор e_2 лежит в плоскости (y, z) и ортогонален плоскости (n, x) .



направим вдоль вектора $\mathbf{v}(t')$, ось z — вдоль \mathbf{w}_\perp , а ось y — ортогонально осям x, z . Направление на точку наблюдения P (вектор \mathbf{n}) будем описывать полярными углами ψ, φ (рис. XXII.1). Введем также единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, первый из которых лежит в плоскости векторов \mathbf{n}, \mathbf{v} и перпендикулярен вектору \mathbf{n} , а второй ортогонален плоскости (\mathbf{n}, \mathbf{v}) . Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ образуют правую тройку. Из геометрии рисунка ясно, что \mathbf{e}_1 составляет с плоскостью (y, z) угол ψ , а \mathbf{e}_2 лежит в плоскости (y, z) и составляет с осью z угол $(\pi/2) - \varphi$. Теперь можно приступить к анализу выражений (133.2).

Начнем с излучения, вызываемого продольной компонентой ускорения. Раскрывая двойное векторное произведение в (133.2) и учитывая, что

$$\beta \times \mathbf{w}_\parallel = 0, \quad \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{w}_\parallel) - \mathbf{w}_\parallel = \mathbf{e}_1 \sin \psi,$$

получим

$$\mathbf{E}_\sim(\mathbf{w}_\parallel) = \mathbf{e}_1 \frac{e w_\parallel}{c^2 R_e^2} \cdot \frac{\sin \psi}{(1 - \beta \cos \psi)^3}; \quad \mathbf{H}_\sim = \mathbf{e}_2 |\mathbf{E}_\sim|. \quad (133.3)$$

Таким образом, при продольном ускорении частицы вектор \mathbf{E}_\sim лежит в плоскости (\mathbf{n}, \mathbf{v}) . К этому вопросу мы вернемся в конце параграфа.

Поток энергии в единицу телесного угла есть

$$\frac{dJ(\mathbf{w}_\parallel)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E_\sim^2 R_e^2 = \frac{e^2 w_\parallel^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{\sin^2 \psi}{(1 - \beta \cos \psi)^6}. \quad (133.4)$$

Диаграмма излучения обладает аксиальной симметрией относительно направления скорости (не зависит от φ , см. рис. XXII.1). Максимум излучения, как следует из (133.4), лежит на направлении

$$\psi_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1}{4\beta}. \quad (133.5)$$

При $\beta \rightarrow 1$

$$\psi_{\max} \approx \sqrt{\frac{2}{5}(1 - \beta)} \approx \frac{1}{\sqrt{5}\gamma} \ll 1, \quad (133.6)$$

а при $\beta \rightarrow 0$ имеем $\psi_{\max} \rightarrow \pi/2$ и выражение (133.4) переходит в знаковую формулу (124.5) для дипольного излучения. Излучение вдоль направления скорости (и ускорения) точно равно нулю, как и для нерелятивистской частицы. При переходе от малых скоростей частиц ($\beta \ll 1$) к большим ($\beta \sim 1$) диаграмма излучения все больше вытягивается вдоль вектора скорости (рис. XXII.2, а). В ультрарелятивистском случае излучение, как видно из (133.4), сосредоточено в телесном угле с $\Delta\psi \sim 1/\gamma$.

Теперь перейдем к обсуждению излучения частицы при поперечном (по отношению к \mathbf{v}) ускорении. Двойное векторное произведение в (133.2) в этом случае может быть расписано с учетом выражений для проекций вектора \mathbf{w}_\perp на направления ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$:

$$\mathbf{w}_\perp = w_\perp (\mathbf{e}_1 \cos \varphi \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi + \mathbf{n} \cos \varphi \sin \psi);$$

$$\beta = \beta (-\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{n} \cos \psi).$$

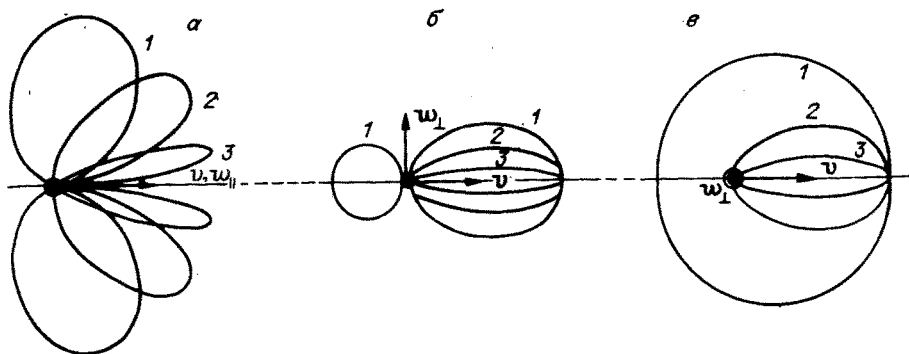


Рис. XXII.2. Векторные диаграммы углового распределения излучения ускоренно движущейся частицы.

a — продольное ускорение; b — поперечное ускорение, плоскость $\varphi = 0$; c — поперечное ускорение, $\varphi = \pi/2$. 1 — $\beta = 0,1$; 2 — $\beta = 0,5$; 3 — $\beta = 0,9$. Диаграммы нормированы на максимум $dJ/d\Omega$.

Тогда

$$(\mathbf{n}, \mathbf{w}_\perp) = w_\perp \cos \varphi \cdot \sin \psi \equiv w_\perp \cos \theta, \quad (133.7)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{w}_\perp ,

$$\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \beta) \times \mathbf{w}_\perp) = (\mathbf{n} - \beta) (\mathbf{n}, \mathbf{w}_\perp) - \mathbf{w}_\perp (1 - \beta \mathbf{n}).$$

В результате

$$\mathbf{E}_\sim(\mathbf{w}_\perp) = \frac{e w_\perp}{c^2 R_e} \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \cos \varphi (\beta - \cos \psi) - \mathbf{e}_2 \sin \varphi (1 - \beta \cos \psi)}{(1 - \beta \cos \psi)^3}. \quad (133.8)$$

Выражение для $\mathbf{H}_\sim(\mathbf{w}_\perp)$ получим из (133.8) заменой $\mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$. Этот результат означает, что поле излучения поперечно ускоренной частицы имеет две компоненты, одна из которых лежит в плоскости (\mathbf{n}, \mathbf{v}) , а другая ортогональна ей.

Угловое распределение излучения получим из (133.8) аналогично (133.4):

$$\frac{dJ(\mathbf{w}_\perp)}{d\Omega} = \frac{e^2 w_\perp^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{(1 - \beta \cos \psi)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \psi \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \psi)^6} \right\}. \quad (133.9)$$

Это угловое распределение в случае произвольного значения β ($0 \leq \beta \leq 1$) достаточно сложно (рис. XXII.2, б, в). Аксиальная симметрия относительно направления скорости \mathbf{v} теперь отсутствует. Это и не удивительно, так как при $\beta \rightarrow 0$ излучающий релятивистский диполь ориентирован так, что вектор \mathbf{d} , параллельный \mathbf{w}_\perp , перпендикулярен вектору \mathbf{v} . Правда, в соотношении (133.9) не так просто при $\beta = 0$ «узнать» дипольное излучение

$$\left. \frac{dJ(\mathbf{w}_\perp)}{d\Omega} \right|_{\beta=0} = \frac{e^2 w_\perp^2}{4\pi c^3} (1 - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi). \quad (133.10)$$

Однако из (133.7) следует, что

$$1 - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi = \sin^2 \theta, \quad (133.11)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{w}_\perp и \mathbf{n} , так что (133.10) опять-таки совпадает с (124.5), и максимум излучения лежит при $\theta = \pi/2$, т. е. в плоскости, ортогональной \mathbf{w}_\perp (в частности, и на направлении вектора \mathbf{v}), а излучение аксиально-симметрично относительно направления \mathbf{w}_\perp .

Максимум излучения (133.9) лежит, очевидно, на направлении, для которого угол $\varphi = \pi/2$:

$$\left. \frac{dJ}{d\Omega} \right|_{\varphi=\pi/2} = \frac{e^2 w_\perp^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^4}, \quad (133.12)$$

а эта функция угла φ имеет максимум при $\varphi = 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{dJ(w_\perp)}{d\Omega} \right)_{\max} = \frac{e^2 w_\perp^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{(1 - \beta)^4}. \quad (133.13)$$

Итак, максимум излучения поперечно ускоряемой частицы лежит на направлении скорости частицы \mathbf{v} .

В ультрарелятивистском случае, как и для продольно ускоряемой частицы, излучение сосредоточено внутри угла $\Delta\varphi \sim 1/\gamma$.

Зависимость поля излучения от времени в точке наблюдения задана функцией $w(t')$ с учетом связи между t' и t :

$$dt = dt' + \frac{dR_e(t')}{c} = (1 - \beta n) dt'. \quad (133.14)$$

Полученный результат показывает, что длительность импульса излучения, регистрируемая в точке наблюдения P , зависит от расположения этой точки (угла φ) — направления излучения. Это есть не что иное, как эффект Доплера. Спектральный состав излучения описывается фурье-образом функции $w(t)$, и если частица ускоряется в течение интервала времени $\Delta t'$, ширина спектра излучения, приходящего в точку P , в соответствии с соотношением неопределенности имеет порядок

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{1 - \beta \cos \varphi} \cdot \frac{\pi}{\Delta t'}. \quad (133.15)$$

По мере смещения частицы направление на точку наблюдения (угол $\varphi(t')$) изменяется, соответственно изменяется со временем ориентация векторов \mathbf{E}_\sim , \mathbf{H}_\sim в точке наблюдения. Для продольно ускоряемой частицы вектор \mathbf{E}_\sim лежит в неподвижной плоскости (\mathbf{n} , \mathbf{v}), так что излучение поляризовано линейно. Для поперечно ускоряемой частицы изменение углов ψ и φ может быть значительным, если траектория частицы существенно криволинейна. В этом случае поляризация излучения изменяется во времени.

Задача 1. Найти полную энергию, излучаемую электроном в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ при ускорении в течение короткого интервала τ ($w_\parallel = \text{const}$). Рассмотреть ультрарелятивистский и нерелятивистский случаи.

Искомая величина пропорциональна спектру мощности излучения электрона и может быть определена как

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{c}{4\pi} R_e^2 \int |E(\omega)|^2 d\Omega, \quad (133.16)$$

где $E(\omega)$ — фурье-образ поля излучения на заданном направлении, а интеграл берется по всему телесному углу.

Поле излучения под углом ψ к направлению скорости электрона имеет спектральную функцию

$$E(\omega, \psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, \psi) e^{i\omega t} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} E(t', \psi) e^{i\omega(t' + R_e(t')/c)} (1 - \beta \cos \psi) dt'.$$

Используя соотношения

$$t = t' + \frac{R_e(t')}{c} = t_0 + (1 - \beta \cos \psi) t',$$

где t_0 — задержка, зависящая от расстояния до точки регистрации, видим, что модуль спектральной функции в приближении малых τ есть

$$|E(\omega, \psi)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{ew_{\parallel}}{c^2 R_e} \cdot \frac{\sin \psi}{(1 - \beta \cos \psi)^3} \cdot \frac{1}{\omega} \left| \sin \frac{(1 - \beta \cos \psi) \omega \tau}{2} \right|.$$

Подставив этот результат в (133.16), найдем искомую величину. В ультрарелятивистском случае

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \Big|_{\gamma \gg 1} \approx \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 w_{\parallel}^2}{c^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)^6} \cdot \left| \sin \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) \frac{\omega \tau}{4} \right| \cdot \frac{\psi d\psi}{\omega^2}.$$

В области низких частот ($\omega \ll \gamma^2/\tau$) спектр мощности

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 w_{\parallel}^2}{c^3} \gamma^4 \tau^2$$

не зависит от частоты, а в области высоких частот

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 w_{\parallel}^2}{c^3} \cdot \frac{\gamma^8}{\omega^2}.$$

В нерелятивистском случае интегрирование дает

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{4e^2 w_{\parallel}^2}{3\pi c^3} \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} \right)^2.$$

В области низких частот ($\omega \ll 1/\tau$) спектр мощности, как и в релятивистском случае, не зависит от частоты. Этот результат известен под названием «инфракрасной катастрофы» — число квантов низкой энергии, излучаемых частицей, стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow 0$:

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{1}{\hbar \omega} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \rightarrow \infty.$$

Однако полная излученная энергия остается конечной.

§ 134. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Заряженная частица, движущаяся во внешнем магнитном поле, испытывает под действием силы Лоренца ускорение

$$\mathbf{w}_\perp = \frac{e}{\gamma mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) \quad (134.1)$$

и излучает. В 1907 г. немецкий физик Шотт первым указал на возможность такого излучения. Но только в 1944 г. советские физики Иваненко и Померанчук создали теорию излучения электрона в магнитном поле. Экспериментально оно было обнаружено американцем Блюитом (1946 г.), зарегистрировавшим свертывание круговой орбиты электронов, и его учеником Хабером (1947 г.), который первым визуально наблюдал свет от электронов, ускоряемых в синхротроне. Отсюда и название — синхротронное излучение (СИ). С развитием техники встречных пучков (см. § 13) активным «участником» физических экспериментов стал позитрон (антиэлектрон) — второй источник синхротронного излучения.

Рассмотрим основные свойства излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся по круговой орбите в однородном (для простоты) магнитном поле H_0 . Ускорение (134.1) направлено по радиусу и равно

$$\mathbf{w}_\perp = -\mathbf{e}_r \omega_L^2 \rho_L = -\mathbf{e}_r \frac{c^2}{\rho_L}, \quad (134.2)$$

где \mathbf{e}_r — единичный вектор, $\rho_L = pc/eH_0$ — радиус орбиты, $\omega_L = eH_0/\gamma mc$ — частота обращения, e , p — заряд и импульс частицы. Для описания излучения воспользуемся результатами § 133.

Угловое распределение излучения обладает острой направленностью: $\Delta\psi \sim 1/\gamma$. Максимум излучения лежит на направлении скорости и равен

$$\left(\frac{dJ}{d\Omega}\right)_{\max} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{ce^2\gamma^8}{\rho_L^2}. \quad (134.3)$$

Полная интенсивность излучения

$$J = \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 H_0^2, \quad (134.4)$$

и за оборот частица теряет энергию

$$\Delta\mathcal{E}_\tau = J \frac{2\pi\rho_L}{\beta c} = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \gamma^2 H_0^2 \rho_L. \quad (134.5)$$

Исключив отсюда H_0 , получим

$$\Delta\mathcal{E}_\tau = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{e^2\gamma^4}{\rho_L} = \frac{4\pi}{3} \gamma^4 mc^2 \frac{r_e}{\rho_L}. \quad (134.6)$$

Формула (134.6) может быть получена из простых оценок с помощью (134.3). Действительно, учитывая, что вблизи максимума

излучения $dt = (1 - \beta) dt' \approx dt'/2\gamma^2$, найдем

$$\Delta \mathcal{E}_T \sim \left(\frac{dJ}{d\Omega} \right)_{\max} \Delta \Omega \frac{T}{2\gamma^2} \sim \frac{2\pi e^2 \gamma^4}{\rho_L}$$

Потери на СИ ограничивают возможности создания циклических (кольцевых) ускорителей электронов на высокие энергии. Например, в электрон-позитронном накопителе ВЭПП-4 частицы при энергии 5 ГэВ теряют за оборот (радиус кривизны орбиты 36 м), 1,56 МэВ. Это означает, что при токе в пучках 20 мА на поддержание энергии частиц потребляется мощность от ускоряющих резонаторов в 31 кВт. В самом большом электрон-позитронном накопителе LEP, который сооружается в Международном центре ядерных исследований (ЦЕРН, Швейцария), энергия частиц будет достигать 50 ГэВ. Периметр этого накопителя 30 км. Потери энергии частицей за оборот составят около 150 МэВ. Именно СИ заставляет сооружать такие гигантские кольца, компенсируя за счет размеров (ρ_L в знаменателе) быстрый рост потерь с энергией. Однако компенсировать таким способом четвертую степень зависимости от энергии — дело довольно безнадежное, и, по-видимому, LEP является техническим пределом для таких сооружений. Другая возможность — линейные ускорители электронов и позитронов, в которых потери на излучение практически отсутствуют.

Для выяснения характера поляризации СИ воспользуемся формулой (121.4), откуда при $\gamma \gg 1$

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R_e} \cdot \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \beta) \times \mathbf{w}_\perp)}{(1 - \beta \mathbf{n})^3}$$

Вводя сферическую систему координат с полярной осью по \mathbf{v} , полярным углом ψ и азимутальным φ , который отсчитывается от направления \mathbf{w}_\perp , получим приближенное выражение

$$\mathbf{E} \approx \frac{4e}{\rho_L R_e} \cdot \frac{e_w (\psi^2 \cos 2\varphi - \alpha^2) + e_H \psi^2 \sin 2\varphi}{(\alpha^2 + \psi^2)^3}, \quad (134.7)$$

где $\alpha = 1/\gamma$, ρ_L — ларморовский радиус частицы, $e_w = \mathbf{w}_\perp/w_\perp$, $e_H = \mathbf{H}_0/H_0$, и использовано соотношение $w_\perp = c^2/\rho_L$. Максимум поля и излучения лежит на направлении скорости ($\psi = 0$), а характерная ширина излучения $|\psi| \sim \alpha = 1/\gamma$.

Пример зависимости поля синхротронного излучения от времени наблюдения t приведен на рис. XI.2 (см. § 78). Поскольку $\psi \approx \omega_L t'$, то необходимо найти зависимость $t'(t)$ (см. задачу 1).

Задача 1. Найти соотношение между временем излучения t' и временем t , если точка наблюдения находится в плоскости орбиты.

Используя соотношения (133.14) и $\psi = \omega_L t'$, запишем

$$dt = (1 - \beta \cos \psi) dt' \approx (\alpha^2 + \omega_L^2 t'^2) dt'/2,$$

откуда

$$t = \frac{\alpha^2 t'}{2} + \frac{\omega_L^2 t'^3}{6} + \frac{R_e(t' = 0)}{c}. \quad (134.8)$$

Отметим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt \equiv 0, \quad (134.9)$$

где $E(t)$ определяется (134.7), поскольку постоянное поле не может убывать как $1/R_e$. Это легко проверить для поля излучения в плоскости орбиты ($\varphi = 0, \pi$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt &\approx e_w \frac{4e}{\rho_L R_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2 - \alpha^2}{(\psi^2 + \alpha^2)^3} \cdot \frac{dt}{dt'} \cdot \frac{d\psi}{\omega_L} = \\ &= e_w \frac{2e}{\rho_L c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2 - \alpha^2}{(\psi^2 + \alpha^2)^2} d\psi = 0. \end{aligned}$$

Обсудим теперь спектральные характеристики СИ. Поскольку излучение лежит в пределах угла $|\psi| \sim 1/\gamma$, то время, в течение которого частица излучает в заданном направлении, $\Delta t' \sim 1/\gamma\omega_L$. Тогда длительность импульса излучения в точке наблюдения равна

$$\Delta t \sim (1 - \beta) \Delta t' \sim \frac{1}{\gamma^3 \omega_L}. \quad (134.10)$$

За время излучения $\Delta t'$ частица проходит по орбите отрезок

$$l_\phi = c \cdot \Delta t' \sim \frac{\rho_L}{\gamma}, \quad (134.11)$$

который является длиной формирования СИ. Поэтому все предыдущие соотношения справедливы при условии

$$l_\phi \ll R_e, \text{ или } \rho_L \ll \gamma R_e. \quad (134.12)$$

В ультрарелятивистском случае это условие всегда хорошо выполняется.

Спектр одиночного импульса синхротронного излучения — непрерывный, как у любого импульсного поля. Дискретный спектр при стационарном вращении частицы «размазывается» из-за квантовых флуктуаций энергии и зависимости частоты обращения от энергии частицы. Поэтому реально можно наблюдать только низкие гармоники частоты обращения.

Ширину спектра СИ можно оценить из длительности импульса (134.10):

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \gamma^3 \omega_L \equiv \frac{2}{3} \omega_0, \quad (134.13)$$

где ω_0 — характерная частота СИ. Расчет показывает, что спектр мощности СИ описывается следующими асимптотическими выражениями:

$$\frac{dJ}{d\omega} \propto \begin{cases} \sqrt{\omega} e^{-\omega/\omega_0}; & \omega \gg \omega_0; \\ \omega^{1/3}; & \omega \ll \omega_0. \end{cases} \quad (134.14)$$

Электроны и позитроны в современных синхротронах и накопительных кольцах имеют такие параметры траекторий и энергий, что заметная доля мощности их СИ лежит в области видимого света. В приведенных выше примерах ВЭПП-4 и ЛЕР максимум спектра СИ приходится примерно на одну и ту же длину волны $\lambda_{\max} \approx 5 \text{ \AA}$ ($\hbar\omega = 2,5 \text{ кэВ}$). Это жесткое рентгеновское излучение. Однако благодаря медленному спаду спектра в область больших длин волн свет даже от одиночного электрона хорошо виден. Поэтому СИ широко используется для наблюдения за движением частиц в ускорителях. Любопытно, что сейчас уже и протонные ускорители добрались до таких параметров, при которых становится заметным СИ от протонов. Так, в Тэватроне (лаборатория им. Ферми, США) радиус орбиты 1 км, и при энергии 1 ТэВ максимум их СИ лежит на длине волны $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, а потери за оборот составят 6 эВ.

В накопителе частицы движутся вдоль равновесной орбиты, которая в простейшем случае имеет вид окружности. Под действием различного рода возмущений частицы могут отклоняться от равновесной орбиты. Это происходит, например, в результате рассеяния на атомах остаточного газа, хотя его плотность в современных накопителях очень низкая (рабочее давление порядка 10^{-10} торр, плотность $4 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$), время жизни частицы составляет несколько часов, и часто оно определяется именно рассеянием на большие углы, в результате чего частица попадает на стенки вакуумной камеры. Отклонившаяся частица испытывает действие фокусирующей системы накопителя и начинает колебаться вокруг равновесной орбиты. Частота этих поперечных или «бетатронных» колебаний зависит от «жесткости» фокусирующей системы. И здесь для электронов и позитронов вступает в действие синхротронное излучение, которое гасит колебания частиц, заставляя их двигаться строго по равновесной орбите. Происходит так называемое радиационное затухание колебаний. При этом средние потери энергии (изменение компоненты импульса, касательной к орбите) компенсирует ускоряющая система накопителя. Одновременное действие сил, возбуждающих и демпфирующих поперечные колебания, приводит к тому, что в пучке частиц устанавливается некий средний, постоянный во времени размер (рис. XXII.3).

Задача 2. Найти время радиационного затухания бетатронных колебаний электрона в накопителе. Частота обращения электрона ω_L , частота колебаний ν_{ω_L} .

Воспользовавшись выражением (132.13) для силы торможения, запишем уравнение поперечных (бетатронных) колебаний электрона в виде

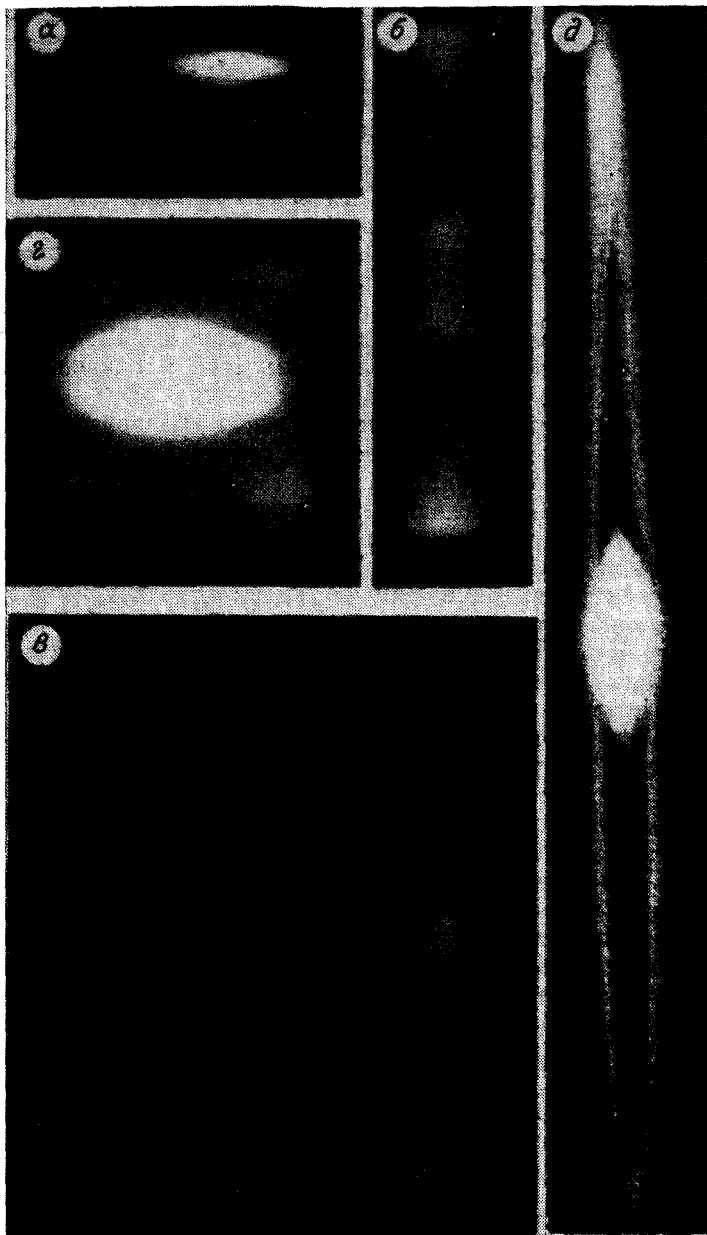
$$\gamma m (\ddot{x} + (\nu\omega_L)^2 x) = (f_T)_x = -\frac{2}{3} r_e^2 \gamma^2 H_0^2 \frac{\dot{x}}{c}$$

или

$$\ddot{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_e}{c} \gamma^3 \omega_L^2 \dot{x} + \nu^2 \omega_L^2 x = 0.$$

Отсюда в приближении малого трения время затухания колебаний

$$\tau^{-1} = \frac{r_e}{3c} \gamma^3 \omega_L^2; \tau \gg 1/\omega_L.$$



Строго говоря, приведенное решение справедливо для бетатронных колебаний частицы вдоль оси магнитного поля. Полное решение задачи о поперечных колебаниях частицы в фокусирующих полях накопителя гораздо сложнее. В частности, при определенном выборе параметров фокусирующей системы затухание колебаний по одной степени свободы может сопровождаться раскачкой колебаний по другой.

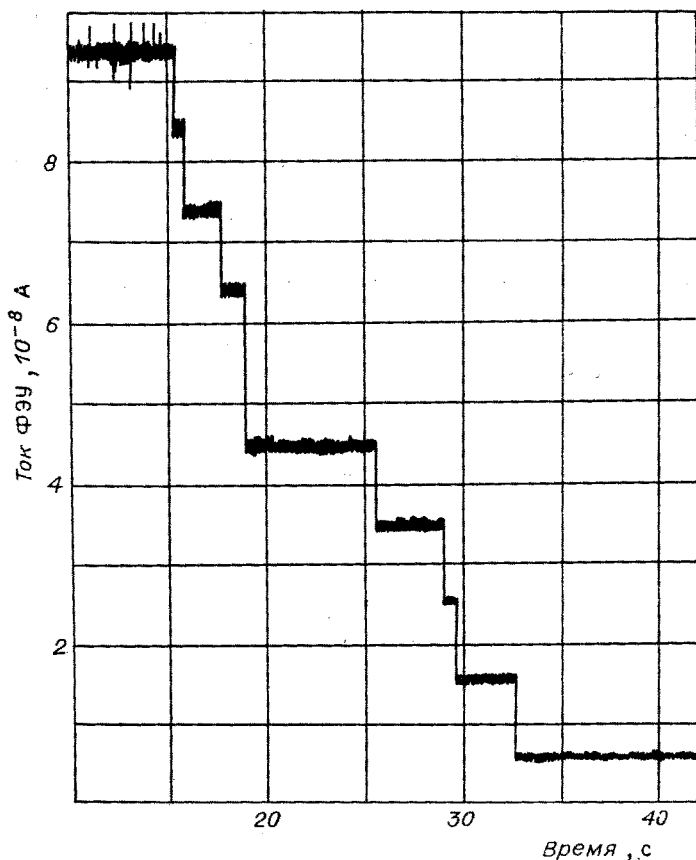


Рис. XXII.3. Синхротронное излучение сгустка электронов (позитронов) в накопителе ВЭПП-2 ИЯФ СО АН СССР.

Энергия частиц 200 МэВ, радиус орбиты 1,5 м: а — равновесное состояние пучка, б, в, г, д — в пучке возбуждены поперечные колебания по одной (б) и двум (в) степеням свободы и нелинейные (г, д) с большой амплитудой (для возбуждения колебаний по пучку «ударяют» поперечным импульсным электрическим полем, длительность импульса меньше периода обращения электронов); е — скачкообразное изменение интенсивности излучения при малой интенсивности сгустка — каждый скачок соответствует потере одного электрона, рассеянного на атомах остаточного газа (метод калибровки по СИ).

На рис. XXII.3 представлены фотографии «светящихся» электронов и позитронов, совершающих поперечные колебания в накопителе со встречными электрон-позитронными пучками ВЭПП-2 (ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.).

До сих пор мы обсуждали излучение одной частицы. Рассмотрим, как изменится характер излучения, если на орбите находится N частиц. Пусть N очень велико и частицы распределены строго равномерно по круговой орбите. Тогда система излучает как 2^N -поль

(см. § 126), т. е. такой симметричный кольцевой пучок частиц практически не излучает. Однако в реальном пучке имеют место флуктуации плотности $\Delta N_1 \sim \sqrt{N_1}$, где N_1 — число частиц в некотором объеме пучка. Очевидно, поля этих флуктуаций (случайных отклонений от среднего) будут складываться в случайных фазах, так что полная интенсивность излучения пропорциональна числу частиц. Это типичный случай *некогерентного излучения*, когда складываются не поля, а интенсивности. Если же частицы собраны в сгусток очень малых размеров, возможно усиление излучения — сгусток излучает когерентно, J растет с числом частиц как N^2 .

Задача 3. Оценить размеры сгустка, излучающего когерентно.

Потребовав, чтобы разность хода от крайних точек сгустка до точки наблюдения была много меньше λ , найдем

$$l_{\parallel} \ll \lambda \sim \rho_L / \gamma^3; \quad l_{\perp} \ll \rho_L / \gamma^2. \quad (134.15)$$

Второе условие следует из очевидного выражения для разности хода от осевой и боковой точек сгустка $\Delta l \approx l_{\perp} \psi \sim l_{\perp} / \gamma$. Для когерентности излучения необходимо выполнение обоих неравенств.

Для многочисленных применений СИ, обсуждение которых вынесено в § 140, часто требуется иметь источник с перестраиваемыми интенсивностью и спектром. С этой целью в прямолинейные участки накопителей электронов, где $H_0 = 0$, помещают специальные генераторы — «змейки», которые представляют собой устройства со знакопеременным или спиральным магнитным полем, ортогональным траектории частиц.

Если поле вдоль траектории меняется по закону

$$H_{\perp}(x) = H_A \sin k_d x; \quad k_d = 2\pi/d,$$

где d — период, то потери энергии на СИ (см. (132.4))

$$\Delta \mathcal{E}_L = \frac{1}{3} r_e^2 \gamma^3 H_A^2 L,$$

$L = nd$ (n — целое) — полная длина генератора. В зависимости от соотношения между длиной формирования излучения и периодом поля различают два типа таких генераторов. В первом из них $l_{\phi} \gg d$. Это означает, что максимальный угол отклонения частицы меньше $1/\gamma$, так что длина формирования излучения

$$l_{\phi} = L \gg d. \quad (134.16)$$

Длина волны излучения в этом случае

$$\lambda \approx d / \gamma^2, \quad (134.17)$$

а ширина спектра

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \sim \frac{1}{n}. \quad (134.18)$$

Например, для электрона с энергией 1 ГэВ и $d = 4$ см длина волны приблизительно равна 100 Å (рентген).

Длина когерентности по-прежнему определяется оценками (134.15), где теперь

$$\rho_L \sim (\rho_L)_{\min} = pc/eH_A. \quad (134.19)$$

Как и в синхротроне, длина когерентности очень мала, и электроны излучают некогерентно. Условия когерентности (134.15) справедливы только в том случае, когда средняя плотность частиц постоянна вдоль пучка. Если же промодулировать плотность пучка определенным образом, то его излучение будет когерентным независимо от полной длины пучка (см. § 144).

Второй тип генератора-«змейки» соответствует условию $l_\phi \ll d$. При этом максимальный угол отклонения частицы больше $1/\gamma$ и длина формирования излучения

$$l_\phi \sim (\rho_L)_{\min}/\gamma = mc^2/eH_A \ll d. \quad (134.20)$$

В эту оценку входит именно минимальное значение ρ_L , так как оно соответствует максимуму магнитного поля, а следовательно, и максимальной интенсивности излучения. В этом случае, как и в синхротроне, излучение, приходящее в данную точку наблюдения, имеет вид серии коротких импульсов, а длительность каждого импульса описывается той же формулой (134.10). Излучение имеет широкий спектр $\Delta\omega \sim \omega$ (см. 134.13) с характерной длиной волны

$$\lambda \sim \frac{c}{\gamma^3 \omega_L} = \frac{mc^2}{\gamma^2 eH_A}. \quad (134.21)$$

Например, в «змейке» со сверхпроводящей магнитной системой ($H_A = 50$ кГс) при энергии электрона 1 ГэВ $\lambda \sim 1\text{Å}$ ($\hbar\omega \sim 10$ кэВ).

§ 135. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

Эффект Вавилова — Черенкова кратко описан в § 71. Подчеркнем, что это — излучение заряженной частицы, движущейся в среде с постоянной скоростью. Теперь мы можем детальнее обсудить механизм генерации этого излучения. Но прежде еще раз вернемся к истории открытия эффекта, которая является прекрасным и поучительным примером тщательного подхода к экспериментальному исследованию. В начале 30-х годов Вавилов и его аспирант Черенков проводили эксперименты по изучению флюоресценции жидкостей под действием гамма-излучения радия. Черенков обратил внимание на необычность излучения, свойства которого существенно отличались от флюоресценции. Вавилов сделал предположение, что наблюдаемое видимое излучение является тормозным излучением электронов, выбиваемых гамма-лучами из атомов. И только три года спустя Тамм и Франк дали объяснение механизма излучения, обнаруженного в эксперименте. Излучали действительно электроны, выбитые гамма-лучами, но механизм излучения был совсем иным [4].

Схема эксперимента Вавилова — Черенкова представлена на рис. XXII.4. Радиевый препарат помещался в одно из двух положе-

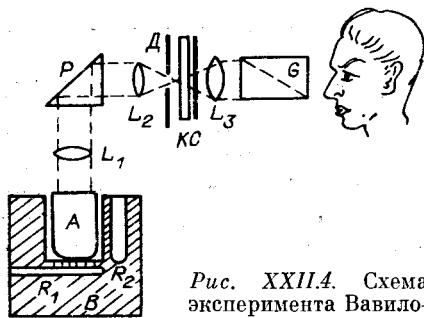


Рис. XXII.A. Схема эксперимента Вавилова — Черенкова.

А — платиновый сосуд с исследуемой жидкостью; В — деревянная подставка; R_1, R_2 — пазы для размещения радиевых источников; L_1, L_2, L_3 — линзы; P — призма; D — диафрагма — элементы оптической системы наблюдения; K — оптический клин для измерения относительной яркости излучения; C — светофильтр; G — «призма Глана» для измерения поляризации излучения.

Собственная картина излучения также следует из условия (135.1): излучение распространяется внутри конического сектора, ось которого направлена вдоль вектора скорости частицы, а толщина определяется дисперсией $n_e(\omega)$ (см. ниже).

Найдем теперь интенсивность черенковского излучения и соответствующую ему силу торможения частицы в среде. Ниже приводится несколько видоизмененный и упрощенный вывод, принадлежащий Ландау [5]. Будем исходить из уравнений для потенциалов (см. § 67) поля заряженной частицы, движущейся в среде с постоянной скоростью v :

$$\Delta A - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu e v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t);$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \frac{e}{\varepsilon} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (135.2)$$

Как будет видно ниже, дисперсия ($n_e = n_e(\omega)$) играет существенную роль в черенковском излучении. Поэтому естественно произвести фурье-преобразование, т. е. представить потенциалы в виде суперпозиции плоских волн

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3k;$$

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3k. \quad (135.3)$$

Аналогично

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3k;$$

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} dV = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (135.4)$$

ний R_1, R_2 для изучения зависимости свечения от направления потока гамма-лучей. Стенки сосуда и подставка поглощали альфа-частицы и электроны из источника, так что в сосуд проникало только гамма-излучение.

Условие возникновения черенковского излучения (см. § 71)

$$\cos \psi^* = \frac{1}{\beta n_e} \leq 1, \quad (135.1)$$

где ψ^* — угол между направлением излучения и скоростью электрона, выполняется только в среде с показателем преломления $n_e > 1/\beta > 1$. Простран-

Подставляя в правую часть первого соотношения $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, получаем показатель экспоненты в виде $(\mathbf{k}\mathbf{r} - kvt)$ и, сравнивая с (135.3), находим

$$\omega = kv. \quad (135.5)$$

С помощью подстановки Фурье-разложений (135.3), (135.4) в уравнения (135.2) находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c\mu e v}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}; \quad \varphi(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^2 e/\varepsilon}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2};$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}(\mathbf{k}) - i\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu e \frac{\omega v - \frac{kc^2}{n_e^2}}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}. \quad (135.6)$$

Фурье-компонента силы торможения определяется только электрическим полем: $\mathbf{f}_T(\mathbf{k}) = e\mathbf{E}(\mathbf{k})$, откуда ($\mathbf{r} = \mathbf{v}t$)

$$\mathbf{f}_T = \frac{i\mu e^2}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\omega v - \frac{kc^2}{n_e^2}}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}. \quad (135.7)$$

Представим вектор \mathbf{k} в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}_z + \mathbf{q}$, $k^2 = k_z^2 + q^2$, где ось z направлена по \mathbf{v} . Из соображений симметрии ясно, что сила f_T направлена вдоль оси z . Переходя в (135.7) к интегрированию по q , ω ($d^3k = 2\pi q dq d\omega/v$), найдем

$$f_T = \frac{i\mu e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{n_e^2 \beta^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{q dq}{c^2 q^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} (\beta^2 n_e^2 - 1)} =$$

$$= \frac{i\mu e^2}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{n_e^2 \beta^2}\right) \ln \left[c^2 q^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} (\beta^2 n_e^2 - 1) \right]_0^{\infty}. \quad (135.8)$$

Поскольку физические поля, потенциалы и соответственно сила торможения — действительные величины, то их Фурье-компоненты удовлетворяют соотношениям $\mathbf{A}(-\mathbf{k}) = \mathbf{A}^*(\mathbf{k})$, $\varphi(-\mathbf{k}) = \varphi^*(\mathbf{k})$. Поэтому (135.8) можно интегрировать по ω в пределах $(0, \infty)$ и взять удвоенную действительную часть полученного выражения. Отсюда следует, что вклад в силу торможения дает только мнимая часть интеграла. Это возможно в том случае, если аргумент логарифма отрицателен, что имеет место на нижнем пределе $q=0$ при условии $\beta n_e > 1$, т. е. при условии черенковского излучения (135.1). В этом случае мнимая часть логарифма $\text{Im} \ln(-F(\omega)) = \text{Im}(\ln(-1) + \ln F(\omega)) = \pm\pi$; $F(\omega) > 0$. В результате получаем

$$f_T = \pm \frac{\mu e^2}{c^2} \int_0^{\omega_0} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_e^2(\omega)}\right), \quad (135.9)$$

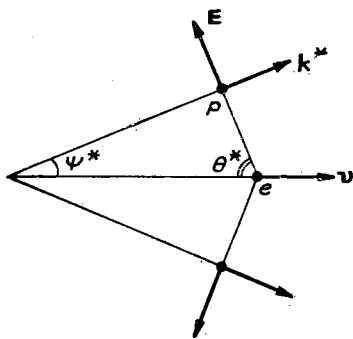


Рис. XXII.5. Кинематика черенковского излучения.

Поле излучения сосредоточено в узком коническом секторе с углом ψ^* .

где граничная частота ω_0 определяется из условия черенковского излучения $\beta n_e(\omega_0) = 1$. Знак минус соответствует торможению частицы и излучению ею электромагнитных волн, а знак плюс — обратному процессу, т. е. поглощению частицей падающей на нее волны и черенковскому ускорению.

Соотношение (135.9) указывает на решающую роль дисперсии, которая ограничивает диапазон излучаемых частот. В отсутствие дисперсии $\omega_0 = \infty$ и сила торможения оказалась бы бесконечной.

По порядку величины сила торможения

$$f_T = -\frac{e^2}{\lambda_0^2} \cos^2 \theta^*, \quad (135.10)$$

где $\lambda_0 = c/\omega_0$, θ^* — угол между направлениями фронта излучения и вектора скорости (рис. XXII.5). Физический смысл этой оценки очень простой: торможение частицы вызывается натяжением силовых линий поля, «отстающего» от частицы на расстояниях $r \geq \lambda_0$. Вблизи частицы ($r \leq \lambda_0$) условие черенковского излучения нарушается из-за дисперсии, и конфигурация поля имеет обычный вид (см. § 122), при котором торможение отсутствует.

Проделанные вычисления силы торможения справедливы при условии, что граничная длина волны λ_0 много больше среднего расстояния между молекулами среды. Только в этом случае поле в среде можно описывать макроскопически, т. е. вводить ϵ и μ . Поскольку λ_0 порядка длины волны собственного излучения атома среды (см. (77.9)), т. е. $\lambda_0 \sim 10^{-5}$ см, то даже в газе это условие выполняется для плотности $\gg 10^{15}$ см $^{-3}$ (при нормальных условиях плотность газа $2,7 \cdot 10^{19}$ см $^{-3}$).

Спектр черенковского излучения получается из (135.9):

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{\mu \beta e^2 \omega}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_e^2(\omega)} \right). \quad (135.11)$$

Это излучение распространяется в интервале углов

$$d\psi = \frac{1}{\beta n_e^2 \sin \psi^*} \cdot \frac{dn}{d\omega} \cdot d\omega. \quad (135.12)$$

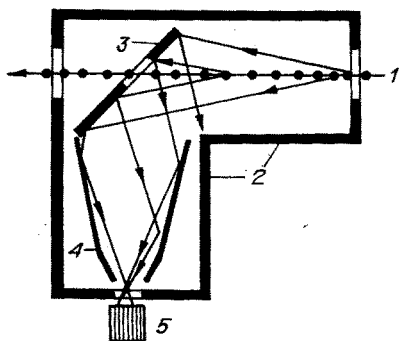


Рис. XXII.6. Схема порогового черенковского счетчика.

1 — траектория частицы; 2 — стенки корпуса счетчика; 3 — плоское зеркало; 4 — параболическое зеркало; 5 — фотоумножитель.

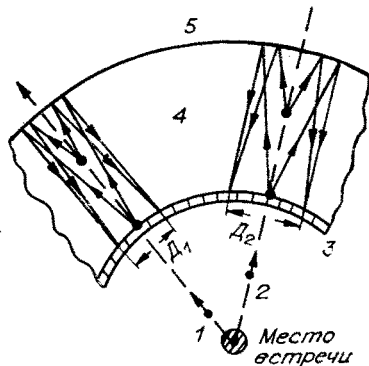


Рис. XXII.7. Схема дифференциального черенковского счетчика.

1, 2 — траектории регистрируемых частиц; 3 — детектор светового излучения; 4 — газовая среда; 5 — зеркало; $D_{1,2}$ — размеры изображений конусов излучения.

Например, показатель преломления воды $n_{e1} = 1,3402$ для $\lambda_1 = 4358 \text{ \AA}$, $n_{e2} = 1,331$ для $\lambda_2 = 6563 \text{ \AA}$. Ультрарелятивистская частица в воде испускает видимый свет под углом $\psi^* = 41^\circ 37'$ в интервале углов $\Delta\psi = 14'$ ($4 \cdot 10^{-3}$ рад) и излучает на 1 см пути энергию 440 эВ, т. е. около 200 квантов.

Отметим здесь одну важную особенность черенковского излучения: его интенсивность не зависит от массы частиц, поэтому черенковское излучение наблюдается и у тяжелых частиц. Например, протон в воде начинает излучать ($\psi^* \approx 0$) при энергии 261 МэВ ($\beta_{\min} = 0,746$). Независимость от массы объясняется тем, что излучателем в данном случае является не сама частица, а атомные электроны, возбужденные ее полем.

Эффект Вавилова — Черенкова имеет важное применение в физике элементарных частиц — на нем основан способ измерения скорости частицы (по углу ψ^* (135.1)). На рис. XXII.6, XXII.7 схематически изображены две разновидности черенковских счетчиков. Первый счетчик — так называемый пороговый, регистрирующий частицы, скорость которых превышает $\beta_{\min} = 1/n_e^{**}$, где n_e^{**} — значение показателя преломления в диапазоне длин волн $\Delta\lambda$, определяемом областью чувствительности детектора светового излучения (фотоумножителя). Такие счетчики применяются в различных детекторах заряженных частиц для отделения быстрых частиц от медленных. Обычно детекторы представляют собой сложные анализирующие устройства, измеряющие параметры частиц, рождающихся в различных реакциях, и черенковские счетчики в этих приборах выполняют функцию определения одного из параметров — скорости. Для повышения пороговой скорости регистрации и ее удобной регулировки используют газовые черенковские счетчики высокого давления (до

нескольких десятков атмосфер). Кроме того, такие счетчики слабо тормозят и почти не поглощают частицы.

Длительность вспышки черенковского излучения определяется дисперсией среды (толщина конуса излучения), и ее можно оценить следующим образом. Разность хода в интервале углов $\Delta\psi$ (135.12) равна $\Delta l \approx l \cdot \Delta\psi \cdot \operatorname{tg} \psi$, где l — длина пути центрального луча в оптической системе сбора света. Отсюда длительность импульса излучения

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} n_e \approx \frac{l}{c} \cdot \frac{dn}{d\omega} \cdot \Delta\omega. \quad (135.13)$$

Здесь мы использовали соотношения (135.1), (135.12). Например, для воды и $l = 1$ м $\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-11}$ с. Отметим, что обычно длительность вспышки много больше обратной ширины полосы пропускания $\Delta\omega$ регистрирующей системы:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \approx \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \Delta n \gg 1, \quad (135.14)$$

и поэтому вспышка практически не искажается.

Черенковские счетчики второго типа — дифференциальные, позволяющие измерять скорость частицы. В последнее время появилась их интересная модификация (см. рис. XXII.7), в которой пространственно-протяженный детектор светового излучения регистрирует диаметр светового конуса, излучаемого частицей. Такие счетчики применяются, например, в накопителях со встречными пучками. На рис. XXII.7 частицы летят навстречу друг другу вдоль прямой, ортогональной плоскости рисунка, и сталкиваются в «месте встречи»; родившиеся частицы, разлетающиеся в поперечном к пучкам направлении, излучают в пространстве \mathcal{A} , заполненном газом или специальной легкой и прозрачной пластмассой, а световое излучение регистрируется проволочными пропорциональными камерами, измеряющими координаты фотонов, поступающих в детектор. Сигналы камеры анализируются ЭВМ, и по диаметру конуса измеряется скорость частиц.

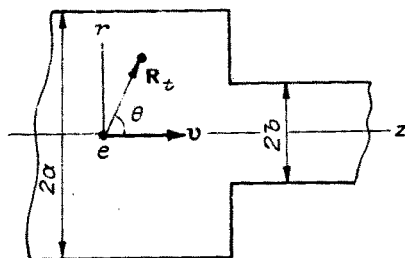
§ 136. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Переходное излучение — это еще один вид излучения заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью. Возникает оно при движении частицы в среде с пространственно-неоднородными свойствами, в частности при пересечении частицей границы двух разных областей среды.

Переходное излучение обнаружено еще в 1919 г. немецким физиком Лилиенфельдом при бомбардировке металлической поверхности электронами, однако природа этого излучения в то время понята не была, а теория была дана только в 1945 г. советскими физиками Гинзбургом и Франком.

Ниже мы приведем некоторые простые оценки переходного излучения ультрарелятивистской частицы.

Рис. XXII.8. К оценке переходного излучения заряженной частицы в трубе переменного сечения.



Начнем обсуждение с наиболее показательного примера: релятивистская частица движется в вакууме вдоль оси цилиндрической трубы переменного сечения (рис. XXII.8). Поле частицы при $v \approx c$ ($\gamma \gg 1$) имеет, как уже знаем, большие значения вблизи $\theta = \pi/2$:

$$E \approx \frac{eR_t}{R_t^3} \cdot \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2}\right)^{3/2}}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \ll 1; \quad \mathbf{H} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}. \quad (136.1)$$

В этой области ($\theta \approx \pi/2$, $\alpha \lesssim 1/\gamma$) поле направлено почти ортогонально скорости: $E_{\perp}/E_{\parallel} = \operatorname{tg} \theta \approx \gamma$. В области малых углов ($\theta \lesssim 1$) поле примерно в γ^3 раз меньше. Таким образом, поле релятивистской частицы по своей структуре близко к полю плоской волны. Когда частица влетает в трубу меньшего диаметра, последняя «срежет» поле частицы, и оно, отразившись от торцевой стенки на стыке труб, излучается в направлении, обратном движению частицы. Потери энергии частицы на излучение можно оценить как

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{1}{4\pi} \int_a^b E_{\perp}^2(r) 2\pi r dr \cdot l_{\parallel} \approx e^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) l_{\parallel}. \quad (136.2)$$

Здесь l_{\parallel} — характерный продольный размер области поля частицы, $l_{\parallel} \sim ab \sim b/\gamma$. Тогда,

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{\gamma e^2}{b} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right). \quad (136.3)$$

При $b \ll a$ приходим к задаче об излучении частицы, пролетающей сквозь круглое отверстие в плоском экране.

Очевидно, длина формирования переходного излучения в данном случае есть l_{\parallel} , а длительность вспышки и ширина спектра излучения

$$\tau \sim \frac{l_{\parallel}}{c} \sim \frac{b}{\gamma c}; \quad \omega \sim \Delta\omega \sim \frac{\pi}{\tau} \sim \frac{\pi \gamma c}{b}; \quad \lambda \sim \frac{b}{\gamma}. \quad (136.4)$$

Сгусток из N частиц в данной ситуации будет излучать когерентно (т. е. потери энергии вырастут в N^2 раз), если его размеры $\Delta z < l_{\parallel}$, $\Delta r \ll b$. Если же мы имеем дело с длинным и (для простоты) тонким пучком частиц ($\Delta z \gg l_{\parallel}$), то излучение будет происходить некогерентно. Точнее, здесь нужно решить задачу о поле дви-

жущегося заряженного релятивистского цилиндра. Аналогичные оценки по порядку величины дают

$$E_{\perp} \sim \frac{2eN}{rl}; \quad l_{\parallel} \sim b; \quad \Delta \mathcal{E}_N \sim \frac{2e^2 N^2}{l^2} b \ln \frac{a}{b}, \quad (136.5)$$

где $l \gg b$ — длина сгустка в лабораторной системе. Излучение будет происходить на фронте сгустка, на длине $\Delta z \sim a$, пока не установится стационарное поле. Такая же энергия теряется на заднем фронте сгустка.

Приведем численный пример. Электрон с энергией 100 ГэВ при влете в трубу радиусом $b = 1$ см ($b \ll a$) теряет ничтожно малую долю своей энергии $\Delta \mathcal{E} \sim 1,5 \cdot 10^{-2}$ эВ. Сгусток из $N = 10^{12}$ таких электронов длиной $l = 1$ см в тех же условиях теряет $\Delta \mathcal{E}_N \sim 3 \cdot 10^{17}$ эВ, или 150 кэВ на электрон.

Задача 1. Оценить энергию переходного излучения назад при прохождении релятивистской частицы из вакуума в диэлектрик. Граница раздела плоская, скорость частицы направлена по нормали к границе. Дисперсией среды пренебречь.

Применяя к «плоскому» полю релятивистской частицы формулу отражения плоской волны от границы диэлектрика

$$E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} (\sqrt{\varepsilon} - 1) / (\sqrt{\varepsilon} + 1),$$

аналогично (136.2) запишем

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{4\pi} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\gamma^2 e^4}{r^4} 2\pi r dr.$$

Для оценки l_{\parallel} учтем, что «плоское» поле сосредоточено вблизи угла $\theta = \pi/2$, так что $l_{\parallel} = l_{\parallel}(r) \approx \alpha 2r \sim 2r/\gamma$. Интегрируя, получим

$$\Delta \mathcal{E} \sim (\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 \gamma e^2 / r_{\min}. \quad (136.6)$$

В качестве r_{\min} естественно выбрать величину, характеризующую поляризационные свойства среды:

$$r_{\min} \sim \lambda_p = 2\pi c / \omega_p; \quad \omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m, \quad (136.7)$$

ω_p — плазменная частота, n_e — полное число электронов вещества в единице объема. Окончательно получим

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{2\pi c} \gamma e^2 \omega_p. \quad (136.8)$$

Из формулы (136.8) можно сделать определенные заключения и о влиянии дисперсии среды. Поскольку с ростом частоты (см. задачу 1 § 77) ε убывает: $\varepsilon(\omega) \approx 1 - (\omega_p/\omega)^2$, энергия излучения при $\omega \gg \omega_p$ убывает как ω^{-4} . Поэтому в спектральном составе излучения назад будут преобладать низкие частоты $\omega \leq \omega_p$. Именно поэтому в излучении назад присутствует свет (что и было обнаружено Лилиенфельдом). Для графита, например, $\omega_p \approx 4,6 \cdot 10^{16}$ с⁻¹, $\lambda_p \sim 400$ Å (мягкий рентген).

Гораздо более коротковолновое излучение генерируется вперед при прохождении частицы из диэлектрика в вакуум. В этом случае

дисперсия среды играет определяющую роль. В области $n_e(\omega) > 1$ поле частицы имеет «черенковский» характер, и о переходном излучении вперед говорить не приходится: частица приходит на границу раздела «раздетой» — ее поле тянется сзади (см. рис. XXII.5), и, едва выбравшись в вакуум, частица должна «срочно» формировать свое поле. Столь забавная ситуация еще раз указывает на необходимость последовательного учета дисперсии среды. Можно, однако, сделать определенные заключения и без громоздких выкладок.

Задача 2. Оценить энергию переходного излучения при прохождении ультрарелятивистской частицы из диэлектрика в вакуум по нормали к границе.

В области высоких частот, где $n_e(\omega) \leq 1$, поле релятивистской частицы будет иметь ту же структуру, что и в вакууме. Для этих частот можно вновь использовать приведенный выше прием (только теперь нас интересует энергия в проходящей «волне»). Аналогично (136.8) проведем оценки энергии излучения

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{4\sqrt{\epsilon}}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^2} \int \frac{\epsilon E^2}{4\pi} dV, \quad (136.9)$$

где множитель перед интегралом дает долю энергии проходящей «волны» от полной энергии, падающей на границу раздела, $\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость в «нечеренковской» области ($\epsilon(\omega) \leq 1$). Из приведенной оценки видно, что в области высоких частот ($\omega > \omega_p$) нет резкого падения интенсивности (ср. (136.8)). Аналогично задаче 1 получим

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{\gamma e^2 \omega_p}{2\pi c}. \quad (136.10)$$

Этот результат отличается только отсутствием малого множителя $(\sqrt{\epsilon} - 1)^2$. Спектр излучения определяется длиной его формирования $l_{\parallel} \sim r_{\min}/\gamma \sim \lambda_p/\gamma$, откуда ширина спектра излучения

$$\Delta\omega \sim \omega \sim \gamma\omega_p. \quad (136.11)$$

Переходное излучение находит применение в детекторах ультрарелятивистских заряженных частиц: по энергии излучения измеряется $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$. Делаются попытки использовать этот механизм и в СВЧ-генераторах.

Глава XXIII

РАСSEЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 137. РАСSEЯНИЕ ВОЛНЫ СВОБОДНЫМ ЗАРЯДОМ

Электромагнитная волна, распространяющаяся в пространстве, содержащем заряженные частицы, вызывает их движение, частицы в поле волны испытывают ускорение и соответственно излучают. Энергия движения частиц и энергия их излучения черпаются из энергии волны. Поэтому такой процесс переизлучения есть не что иное, как рассеяние электромагнитной волны частицами. Как и лю-

бое рассеяние, этот процесс можно описать с помощью сечения рассеяния, определив последнее как

$$d\sigma = \left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle d\Omega/S, \quad (137.1)$$

где $\langle dJ/d\Omega \rangle$ — средний по времени поток энергии излучения частицы в единицу телесного угла, \mathbf{S} — вектор Пойнтинга падающей волны, усреднение проводится по времени, много большему периода колебаний поля волны.

Начнем с простейшей ситуации — свободная заряженная частица в поле плоской линейно поляризованной волны. Очевидно, ускорение частицы будет направлено вдоль направления вектора \mathbf{E} (ось x):

$$m\ddot{x} = eE_0 e^{-i\omega t},$$

откуда интенсивность излучения частицы, согласно (124.5),

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \langle |E(t)|^2 \rangle \sin^2 \theta, \quad (137.2)$$

где угол θ отсчитывается от направления оси x . Усреднение по времени и подстановка в (137.1) дают

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta; \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (137.3)$$

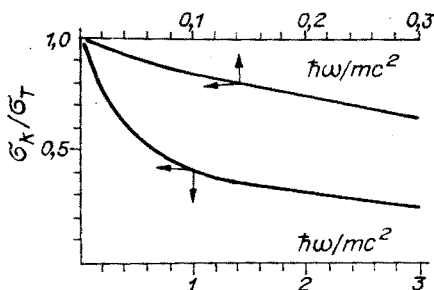
Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния пропорционально квадрату классического радиуса частицы r_e . Сохраним индекс « e », поскольку, как мы знаем, излучают, а значит, и рассеивают главным образом электроны. Как и «положено» дипольному излучению, здесь нет рассеянного потока вдоль оси x , т. е. по направлению вектора \mathbf{E} в падающей волне. Полное сечение получим, проинтегрировав (137.3) по телесному углу:

$$\sigma_T = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (137.4)$$

Для электрона $\sigma_T = 0,66 \cdot 10^{-24}$ см² = 0,66 барн. Этот результат был получен английским физиком Дж. Дж. Томсоном.

Классическая теория Томсона нарушается с ростом энергии кванта $\hbar\omega$ (частоты падающей волны). Экспериментально это было обнаружено американским физиком Комптоном (1923 г.), а позднее Клейн и Нишина (1929 г.) и независимо Тамм (1930 г.) получили формулу для квантового процесса. На рис. XXIII.1 приведен этот результат. С ростом энергии сечение рассеяния монотонно падает, так что формула Томсона справедлива только для «мягкого» излучения, когда энергия кванта много меньше энергии покоя электрона. Реально отклонения от нее заметны уже в области сравнительно мягкого рентгеновского излучения ($\hbar\omega \approx 10$ кэВ). Для комптоновского рассеяния характерна передача электрону заметной доли энер-

Рис. XXIII.1. Зависимость сечения комптоновского рассеяния σ_K от энергии кванта.
Стрелки указывают шкалы для кривых.

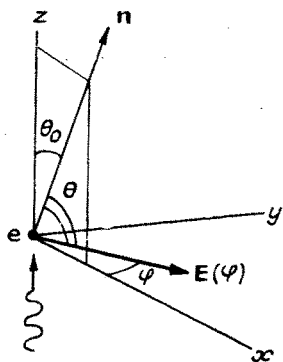


гии падающего кванта, что приводит к уменьшению частоты (энергии) рассеянного кванта.

Формулы (137.3), (137.4) нетрудно обобщить на случай неполяризованной волны. Пусть заряд находится в начале системы координат, вдоль оси z которой падает неполяризованная монохроматическая волна. Вектор \mathbf{E} лежит в плоскости (x, y) , причем в волновом потоке равновероятно представлены все возможные поляризации, так что угол φ между вектором \mathbf{E} и осью x принимает значения между 0 и 2π . Для каждого заданного направления вектора \mathbf{E} дифференциальное сечение описывается той же формулой (137.3), а угол θ можно выразить (рис. XXIII.2) через углы φ и θ_0 (угол между осью z и направлением на точку наблюдения): $\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi$. Усреднив по φ , получим дифференциальное сечение рассеяния неполяризованной волны:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta_0). \quad (137.5)$$

Подчеркнем, что операция усреднения соответствует сложению интенсивностей, что означает некогерентность отдельных поляризаций в падающем потоке. Для неполяризованной волны, как и для поляризованной, максимумы интенсивности рассеянного излучения направлены вперед и назад вдоль направления распространения падающей волны. Но теперь одинаковы по величине все потоки, рассеянные поперек этого направления ($\theta_0 = \pi/2$), и сечение рассеяния в поперечном направлении равно $r_e^2/2$, т. е. вдвое меньше максимального. Это нетрудно понять: вдоль данного поперечного направления (например, вдоль оси x) рассеиваются компоненты неполяризованной волны, составляющие с ней ненулевой угол. Полное сечение рассеяния в случае неполяризованной волны



$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0 = \sigma_T, \quad 137.6$$

Рис. XXIII.2. К рассеянию неполяризованной волны свободным зарядом.

т. е. то же самое томсоновское сечение (137.4). Результаты (137.5), (137.6), очевидно, справедливы и для циркулярно-поляризованной волны.

Поляризация излучения, рассеянного свободным электроном, зависит от поляризации первичной волны. Для линейно поляризованной падающей волны рассеянная волна остается линейно поляризованной, а направления векторов \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s в последней те же, что и в потоке излучения точечного диполя, ориентированного вдоль \mathbf{E} (см. рис. XX.1). Поляризация в потоке, рассеянном из циркулярно поляризованной падающей волны, имеет ту же структуру, что и в излучении вращающегося диполя (задача 1, § 124). Наконец, неполяризованная волна (в которой равновероятно представлены все поляризации) образует рассеянный поток, в котором степень поляризации зависит от направления рассеяния (см. задачу 1 ниже). В частности, излучение, рассеянное под углом $\theta_0 = \pi/2$, будет линейно поляризовано: точка наблюдения лежит в той же плоскости (x, y) , что и вектор \mathbf{E} в падающей волне и соответственно вектор \mathbf{d} переизлучающего диполя.

Задача 1. Для анализа поляризации волны используется специальное устройство (поляриметр — см. ниже), пропускающее электромагнитную волну с заданной поляризацией P_0 . Так, для линейно поляризованной волны сигнал, регистрируемый поляриметром, пропорционален $I_r = (\mathbf{E}, \mathbf{P}_0)^2$, где \mathbf{E} — амплитуда волны. Для неполяризованной волны $I_r = (\mathbf{E}(\varphi), \mathbf{P}_0)^2$; здесь усреднение производится по углу φ (см. рис. XXIII.2). Вращая поляриметр вокруг оси, параллельной направлению падения волны, находят степень поляризации волны

$$p = \frac{I_{r\max} - I_{r\min}}{I_{r\max} + I_{r\min}}.$$

Степень поляризации равна единице для линейно поляризованной волны и нулю для неполяризованной волны.

Найти зависимость $p(\theta_0)$ в волне, рассеянной свободным зарядом при падении на него неполяризованной волны.

Векторы $\mathbf{E}(\varphi)$, \mathbf{n} (см. рис. XXIII.2) и \mathbf{P}_0 имеют компоненты

$$\mathbf{E}(\varphi) = E_0 \times \{\sin \varphi; \cos \varphi; 0\};$$

$$\mathbf{n} = \{\sin \theta_0; 0; \cos \theta_0\};$$

$$\mathbf{P}_0 = \{\cos \alpha \cos \theta_0; \sin \alpha; \cos \alpha \sin \theta_0\}.$$

Здесь α — угол между единичным вектором \mathbf{P}_0 и плоскостью (x, z) , в которой лежит точка наблюдения, углы φ и θ_0 определены выше. Вектор \mathbf{E}_s в рассеянной волне, согласно (124.3) и (137.2), можно представить так:

$$\mathbf{E}_s(\varphi) = \frac{r_e}{r_p} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\varphi))).$$

Записав покомпонентно скалярное произведение $(\mathbf{E}_s, \mathbf{P}_0)$ и усреднив по φ его квадрат, найдем

$$I_r = \frac{r_e^2}{r_p^2} (\sin^2 \alpha + a(\theta_0) \cdot \cos^2 \alpha);$$

$$a(\theta_0) = \cos^2 \theta_0 \cdot \cos^2 2\theta_0.$$

I_r принимает экстремальные значения при $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, причем

$$\begin{aligned} \text{при } a(\theta_0) > 1 & \begin{cases} I_{r\max} = a(\theta_0); & \alpha_{\max} = 0, \pi, 2\pi; \\ I_{r\min} = 1; & \alpha_{\min} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \end{cases} \\ \text{при } a(\theta_0) < 1 & \begin{cases} I_{r\max} = 1; & \alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \\ I_{r\min} = a(\theta_0); & \alpha_{\min} = 0, \pi, 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

В обоих случаях степень поляризации есть

$$p = \frac{|a-1|}{a+1} = \frac{|2\kappa^4 - \kappa^2 - 1|}{2\kappa^4 + \kappa^2 + 1}; \quad \kappa = \cos \theta_0.$$

Рассеянный поток полностью поляризован ($p = 1$) при $\theta_0 = \pi/2$ и неполяризован ($p = 0$) при $\theta_0 = 0, \pi$.

В качестве поляриметра в диапазоне радиоволн можно использовать металлическую решетку. В оптическом диапазоне используют кристаллы и пленки — поляриды. Последние изготавливаются в виде полимерных пленок (например, поливиниловый спирт с йодом). Молекулы в них представляют собой длинные цепочки, выстроенные параллельно друг другу в результате специальной обработки (механическое натяжение). Такие пленки обладают особым свойством — *дихроизмом*: они практически полностью (с точностью до 10^{-8} от полной интенсивности) пропускают свет, в котором вектор \mathbf{E} перпендикулярен оси молекул, и поглощают 99% интенсивности света, поляризованного вдоль оси молекул.

Если падающая волна имеет достаточно высокую интенсивность, то при рассеянии ее на свободном заряде могут, вообще говоря, стать заметными эффекты, связанные с влиянием магнитного поля волны.

Задача 2. Найти сечение рассеяния плоской линейно поляризованной волны на свободном электроны с учетом влияния магнитного поля волны.

Записав уравнения движения с учетом действия магнитного поля \mathbf{H} (вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси x , вектор \mathbf{H} — вдоль оси y)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_0 e^{-i\omega t} + \frac{e}{c} \dot{z} H_0 e^{-i\omega t}; \\ m\ddot{z} &= -\frac{e}{c} \dot{x} H_0 e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

решим эту систему уравнений методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{e}{m\omega^2} E_0 e^{-i\omega t}; \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0; \\ \ddot{z}_2(t) &= i \frac{eH_0}{mc} \cdot \frac{eE_0}{m\omega} e^{-2i\omega t}. \end{aligned}$$

Отсюда получим сечение рассеяния с удвоением частоты

$$\frac{d\sigma_{2\omega}}{d\Omega} = \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 r_e^2 \sin^2 \theta_0; \quad \omega_L = \frac{eH_0}{mc}; \quad \sigma_{2\omega} = \left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 \sigma_T, \quad (137.7)$$

θ_0 — угол между осью z и направлением на точку наблюдения. Отметим, что такой же по порядку величины вклад в рассеяние дадут магнитодипольное и квадрупольное излучения электрона, которые здесь не учтены.

Рассмотренный эффект рассеяния на двойной частоте, по-видимому, реально ненаблюдаем: для оптических частот ($\omega \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$) $\omega_L \approx \omega$ лишь для волны чрезвычайно высокой интенсивности ($H \sim \sim 200 \text{ МГс}$). Он представляет тем не менее физический интерес: в поле волны достаточно высокой интенсивности начинаются нелинейные эффекты — удвоение частоты и др. (ср. § 86 и 138).

§ 138. РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ СВЯЗАННЫМ ЗАРЯДОМ

Как мы уже знаем, из заряженных частиц, входящих в состав вещества (протонов и электронов), рассеивают электромагнитные волны практически только электроны. Электроны в атомах — связанные заряды; в качестве простейшей модели атома можно использовать осциллятор с собственной частотой ω_0 . Такую модель мы применяли уже не раз (см., например, (77.9)). В поле линейно поляризованной падающей волны электрон совершает вынужденные колебания

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}.$$

Такой связанный электрон, как и свободный, излучает, т. е. рассеивает, падающую волну. Имея в виду результаты исследования резонансной ситуации ($\omega \approx \omega_0$), учтем теперь силу торможения излучением, что было несущественно в случае свободного электрона:

$$f_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}}. \quad (138.1)$$

Добавив эту силу в уравнение движения, получим

$$\ddot{x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_e}{c} \ddot{\dot{x}} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (138.2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = - \frac{\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3 \frac{2r_e}{3c}},$$

откуда сечение рассеяния есть

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathcal{F}(\omega, \omega_0) r_e^2 \sin^2 \theta; \quad \sigma = \mathcal{F}(\omega, \omega_0) \sigma_T; \quad (138.3)$$

$$\mathcal{F}(\omega, \omega_0) = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e}{c}\right)^2 \omega^6}.$$

В соотношениях (138.3) можно выделить три случая:

1. Область высоких частот, $\omega \gg \omega_0$. Функцию \mathcal{F} можно представить в виде

$$\mathcal{F} \approx \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e}{\lambda} \right)^2} \approx 1; \quad \sigma \approx \sigma_T, \quad (138.4)$$

поскольку силой торможения можно пользоваться только при условии $\lambda \gg r_e$ (см. § 126). Таким образом, в данном случае атомный электрон рассеивает волну как свободный.

2. Резонансное рассеяние, $\omega \approx \omega_0$

$$\mathcal{F} = \frac{9}{4} \left(\frac{\lambda_0}{r_e} \right)^2; \quad \sigma = 6\pi\lambda_0^2 \gg \sigma_T. \quad (138.5)$$

3. Область низких частот, $\omega \ll \omega_0$, где

$$\mathcal{F} \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4; \quad \sigma \approx \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \ll \sigma_T. \quad (138.6)$$

Такую частотную зависимость сечения рассеяния в видимой области впервые установил Рэлей. В работах по теории рассеяния света он нашел объяснение закономерностей, волновавших физиков с незапамятных времен: почему небо голубое, а заря красная? В 1809 г. французский физик Араго обнаружил сильную поляризацию света, приходящего с «голубого неба», что только усугубило проблему. Рост свечения с частотой резко подчеркивает окраску проходящего и рассеянного потоков. К тому же на заре солнечный свет, распространяясь по касательной к поверхности Земли вблизи точки наблюдения, проходит гораздо больший путь сквозь атмосферу, нежели в полдень, и практически полностью теряет свои голубые компоненты. Свои результаты Рэлей получил на модели молекулы в виде диэлектрического шарика. В следующем параграфе мы увидим, что учет интерференции света, рассеянного множеством молекул газа, не меняет результатов.

Посмотрим, как теория Рэля объясняет поляризованность рассеянного солнечного света. Для этого достаточно вернуться к результатам предыдущего параграфа — обсуждению поляризации рассеянного потока при падении неполяризованной плоской волны на свободный заряд. Переход от свободного заряда к связанному не меняет физической сущности картины — волна возбуждает дипольные колебания в системе зарядов (молекуле), что и дает излучение. Поэтому свет, рассеянный молекулой, будет частично поляризован в зависимости от направления рассеяния, и, в частности, свет, рассеянный поперек направления распространения падающей волны, будет поляризован линейно в соответствии с результатами опытов Араго.

Интересно, что поляризованность солнечного света, рассеянного атмосферой, можно продемонстрировать с помощью фотографий: фотоснимок кучевых облаков в солнечный день, сделанный через поляризатор (поляроидную пленку), скрещенный с преобладающим

направлением поляризации, будет заметно контрастнее снимка, сделанного без поляризатора. Это связано с тем, что облака, многократно рассеивающие свет из-за их большой плотности, «излучают» практически неполяризованный свет, который не ослабляется поляризатором, тогда как свет, излучаемый «чистым небом», поляризован и ослабляется заметно.

При рассеянии электромагнитной волны на связанном заряде наблюдается еще одно интересное явление, экспериментально открытое в 1928 г. индийским физиком Раманом (в жидкостях) и независимо советскими физиками Ландсбергом и Мандельштамом (в кристаллах), — образование в рассеянной волне компонент с комбинационными частотами $\omega_s = \omega \pm \omega_0$, где ω_0 — частота, зависящая от рассеивающей среды.

На языке классической электродинамики комбинационное рассеяние есть суперпозиция собственного излучения заряда, совершающего колебания с частотой ω_0 , и внешнего излучения, рассеянного этим зарядом. Комбинационные частоты появляются, если атомный осциллятор является нелинейным (задача 1).

Задача 1. Электрон совершает колебания вдоль оси x под действием нелинейной упругой силы

$$F(x) = m\omega_0^2(x + \alpha x^2), \quad \alpha x_{\max} \ll 1.$$

Найти частоты излучения электрона при падении на него плоской линейно поляризованной волны, вектор E в которой направлен вдоль оси x .

Из уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \alpha x^2) = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}$$

методом последовательных приближений находим

$$x(t) \approx A_{1,2} e^{\pm i(\omega_0 t + \varphi_{1,2})} + \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2} + \alpha B_{1,2} e^{-i(\omega \pm \omega_0)t \pm i\varphi_{1,2}}.$$

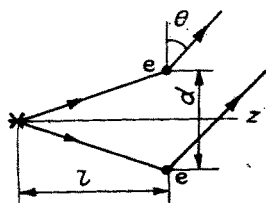
Константы $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ зависят от начальных условий, через них и выражаются константы $B_{1,2}$ (при подстановке в уравнение), мы не будем выписывать полные выражения ввиду их громоздкости. Важно, что решение $x(t)$ содержит слагаемое с комбинационными частотами $\omega \pm \omega_0$, которое дает в выражении для рассеянной волны искомого компоненту.

§ 139. РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ СИСТЕМОЙ ЗАРЯДОВ

При рассеянии волны на зарядах, образующих некоторую систему конечных размеров, волны, рассеянные отдельными зарядами, интерферируют, что приводит к перераспределению потоков в пространстве и усилению или ослаблению полного рассеянного потока в зависимости от параметров системы и падающей волны.

Рассмотрим, например, рассеяние волны, испускаемой точечным источником, на двух одинаковых зарядах (рис. XXIII.3). Пусть расстояние между зарядами d много меньше расстояния от зарядов до источника l , а волна поляризована так, что вектор E лежит в плос-

Рис. XXIII.3. Рассеяние волны системой из двух зарядов.



кости рисунка. Тогда волновой фронт вблизи зарядов квазиплоский, а поле в потоке, рассеянном под углом θ ,

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{s1} + \mathbf{E}_{s2} = \mathbf{E}_{s0}(1 + e^{i\delta}); \quad \delta = \delta_0 \cos \theta; \quad \delta_0 = kd. \quad (139.1)$$

Повторяя преобразования (137.2) — (137.4), найдем дифференциальное сечение рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 2r_e^2 \sin^2 \theta (1 + \cos \delta); \\ \sigma &= 2\sigma_T \left(1 - \frac{3 \cos \delta_0}{\delta_0^2} + \frac{3 \sin \delta_0}{\delta_0^3} \right). \end{aligned} \quad (139.2)$$

При $kd \ll 1$ это выражение совпадает с сечением рассеяния волны точечным зарядом $2e$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4r_e^2 \sin^2 \theta; \quad \sigma = 4\sigma_T. \quad (139.3)$$

(Заметим, что при $\delta_0 \rightarrow 0$ в выражении для σ следует произвести разложение до δ_0^3 в числителях дробей.) В этом случае система из двух зарядов рассеивает как один заряд, т. е. когерентно. Для конечного значения kd имеем типичный случай интерференционного рассеяния. В частности, возможно некоторое уменьшение полного сечения: например при $kd = 2\pi$ полное сечение в рассмотренном примере

$$\sigma = 2\sigma_T \left(1 - \frac{3}{4\pi^2} \right) < 2\sigma_T.$$

При достаточно большом расстоянии между зарядами полное сечение только вдвое больше сечения рассеяния на одном заряде, как если бы заряды рассеивали независимо, это результат усреднения (139.2) по телесному углу. Угловое распределение рассеянного излучения при любом kd имеет некоторую интерференционную структуру, однако ее угловой размер уменьшается с ростом kd , и она легко «замывается» любыми возмущениями.

В рассмотренном примере схема рассеяния в точности повторяет схему Юнга (см. § 92). Поэтому здесь можно использовать знакомые уже представления о когерентности источника. Если, например, источник излучает на частоте ω в полосе $\Delta\omega$, то волны, рассеянные под углом θ , не интерферируют, если

$$kd \cos \theta \gtrsim \pi \frac{\omega}{\Delta\omega}, \quad (139.4)$$

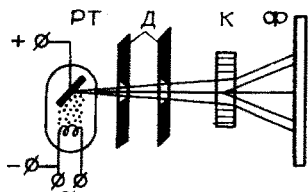


Рис. XXIII.4. Схема опытов Лауэ.
РТ — рентгеновская трубка; Д — свинцовые диафрагмы; К — кристалл; Ф — фотопластинка.

т. е. разность хода лучей на данном направлении превосходит длину волнового пакета. Если схема несимметрична, так что на пути волны от источника до зарядов «набегает» разность хода δl , рассеяние может происходить полностью некогерентно, если $\delta l > \pi c / \Delta \omega$.

Обобщая рассмотренный пример на случай системы N зарядов с характерным размером a , можно выделить три случая:

$\lambda \gg a$; $\sigma = N^2 \sigma_r$ — когерентное рассеяние,

$\lambda \sim a$; $\sigma = \sigma_r \mathcal{F}(a/\lambda)$ — интерференционное рассеяние,

$\lambda \ll a$; $\sigma = N \sigma_r$ — некогерентное рассеяние.

Для системы неподвижных зарядов некогерентным является только полное сечение рассеяния, тогда как дифференциальное сечение остается когерентным, как отмечено выше. Если же заряды движутся внутри области размера a , то когерентность рассеяния пропадает вплоть до значений $\lambda \sim a$ вследствие усреднения по различным расположениям зарядов (см. ниже).

Функция $\mathcal{F}(a/\lambda)$ имеет тот или иной конкретный вид в зависимости от расположения и характера движения зарядов. Важным примером интерференционного рассеяния является дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке. Дифракционный (интерференционный) характер рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах был обнаружен в экспериментах (рис. XXIII.4) немецкими физиками Лауэ, Фридрихом и Книппингом. Рассеянный поток рентгеновских лучей регистрировался фотопластинкой, и распределение интенсивности носило типично дифракционный характер — остро локализованные максимумы. На рис. XXIII.5 приведена рентгенограмма молекулы ДНК — пример результатов современных рентгеноструктурных исследований. Механизм такого рассеяния объяснен Лауэ. Он показал, что рассеяние рентгеновского излучения в кристалле аналогично дифракции электромагнитной волны на трехмерной дифракционной решетке. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Представим себе кристалл в виде трехмерной решетки, в узлах которой находятся атомы (ионы). Для простоты будем считать, что электронная оболочка иона рассеивает падающую волну изотропно.

Если \mathbf{k} , \mathbf{k}' — волновые векторы падающей и рассеянной волн, то разность фаз в волнах, рассеянных атомами A и O (рис. XXIII.6), равна

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r} = -\mathbf{q}\mathbf{r}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}; \quad q = 2k \sin \frac{\psi}{2}. \quad (139.5)$$

Интенсивность рассеянной волны

$$J = J_0 \left| \sum_n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2, \quad (139.6)$$

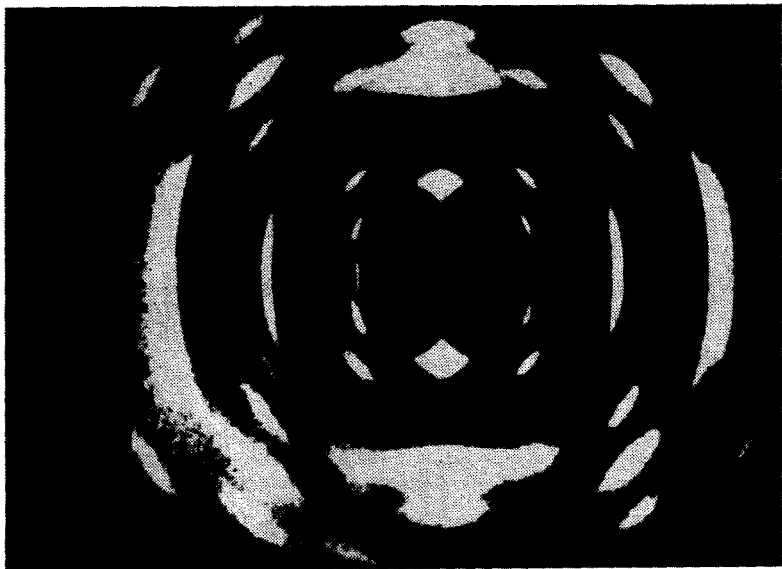


Рис. XXIII.5. Рентгенограмма молекулы ДНК (натриевая соль ДНК), полученная в монохроматическом пучке рентгеновского излучения, вырезанном из потока СИ накопителя ВЭПП-3 ИЯФ СО АН СССР (1974 г.).

Схема монохроматизации представлена на рис. XXIII.8.

где J_0 — интенсивность волны, рассеянной отдельным атомом решетки, а сумма берется по всем рассеивающим атомам. Таким образом, интенсивность J пропорциональна квадрату фурье-компоненты кристаллической решетки. Направление максимума рассеянного излучения определяется условием

$$\mathbf{q}\mathbf{r}_n = 2\pi m_n, \quad (139.7)$$

где m_n — любые целые числа (вообще говоря, разные для разных n).

Рассмотрим простейший случай трехмерной решетки, элементарная ячейка которой представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Тогда условие (139.7) принимает вид $q_\alpha a_\alpha = 2\pi m_\alpha$. Все три эти условия должны выполняться одновременно, что и приводит к образованию узких максимумов — пятен (см. рис. XXIII.5). В рентгеноструктурном анализе их принято называть рефлексами, т. е. отражениями. В частности, если вектор \mathbf{q} имеет только одну компоненту (например, q_1 — случай А на рис. XXIII.7, или только q_2 — случай В), условие (139.7) принимает вид

$$qa = 2ka \sin \frac{\psi}{2} = 2\pi m; \quad 2a \sin \theta = m\lambda. \quad (139.8)$$

Последнее соотношение, носящее название условия Вульфа — Брэгга, получено русским физиком Вульфом (1912 г.) и независимо

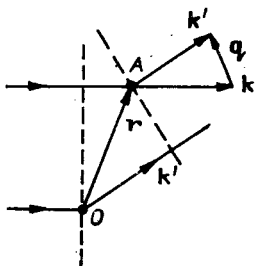


Рис. XXIII.6. К расчету дифракции рентгеновских лучей на кристалле.

Штриховой линией показаны фронты падающей и рассеянной волн.

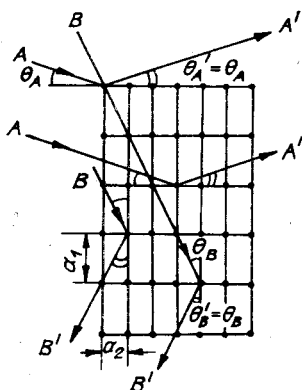


Рис. XXIII.7. Условие Вульфа — Брэгга для рассеянной волны на кристалле.

английским физиком Брэггом (мл.) (1913 г.). Мы уже встречались с этим условием при обсуждении объемной голографии (см. § 110).

Дифракция рентгеновских лучей в веществе позволяет расшифровать его структуру. Соответствующие экспериментальные методы мы обсудим в следующем параграфе.

Рассмотрим теперь влияние беспорядочных тепловых колебаний атомов в кристалле при температуре T . В показателе экспоненты (139.6) появляется дополнительное изменение фазы $\delta\varphi = \mathbf{q}\Delta\mathbf{r}_n$, где $\Delta\mathbf{r}_n$ — случайное смещение n -го атома, сферически симметричное по гауссовому закону с дисперсией $(\Delta r)^2 = \rho^2(T)$. Тогда $\delta\varphi$ также имеет гауссовское распределение с дисперсией $(\delta\varphi)^2 = q^2\rho^2/3$, и можно воспользоваться результатом, полученным в § 80 (см. (80.15)). Согласно этому результату, интенсивность когерентного рассеяния ослабляется:

$$J(T) = J(0) e^{-q^2\rho^2/3}. \quad (139.9)$$

Описанный эффект ограничивает длину волны рентгеновского излучения: $q\rho \lesssim 1$.

Рассеяние электромагнитной волны в аморфной среде имеет совершенно другой характер. Например, в простейшем случае газа хаотическое движение молекул не ограничено, и, согласно (139.9), интенсивность когерентного рассеяния равна нулю ($\rho \rightarrow \infty$). Интенсивность некогерентного рассеяния получим из (139.6) в предположении, что \mathbf{r}_n — случайные независимые величины (это справедливо для достаточно разреженного газа). Тогда

$$J = NJ_0, \quad (139.10)$$

где N — полное число молекул газа, т. е. каждая молекула рассеивает независимо.

Отметим, что в жидкости рассеяние уже не является полностью некогерентным, поскольку в ней имеется так называемый ближний порядок, т. е. положение близких молекул сильно скоррелировано.

Явление рассеяния непосредственно связано с давлением света (см. § 118). Действительно, при рассеянии волны на заряде последний испытывает действие силы $\mathbf{f} = \sigma \mathbf{g} c$, где \mathbf{g} — плотность импульса поля (117.8) в падающей плоской волне:

$$\mathbf{g} = \frac{E\mathbf{H}}{4\pi c} = \frac{w}{c}. \quad (139.11)$$

Средняя по времени сила

$$\langle \mathbf{f} \rangle = e_1 \sigma \langle w \rangle. \quad (139.12)$$

Отметим, что симметрия рассеянного излучения (равенство нулю импульса, уносимого рассеянным излучением) приводит к тому, что давление волны на заряд определяется силой торможения, что прямо показано в следующей задаче.

Задача 1. Получить выражение для силы, действующей на покоящийся заряд, рассеивающий плоскую линейно поляризованную волну.

Поскольку скорость заряда $v \approx 0$, сила, действующая на заряд,

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \mathbf{f}_T = e\mathbf{E} + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}},$$

$$\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{e}{m} \left(\dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} \right) \approx \frac{e}{m} \left(\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right),$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — поле падающей волны. Отсюда

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \frac{2}{3} r_e^2 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = e_2 \sigma_T \langle w \rangle,$$

что совпадает с (139.12).

Задача 2. На систему зарядов из N покоящихся электронов, равномерно распределенных вдоль оси y на длине h , падает плоская линейно поляризованная волна, вектор \mathbf{k} которой лежит в плоскости zy и составляет угол φ_1 с осью z , вектор \mathbf{E} направлен по оси x . Найти угловую зависимость сечения рассеяния в плоскости zy ($\theta = \pi/2$).

Поле рассеянной волны

$$\mathbf{E}_S \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 \right) = \frac{r_e}{r_p} \mathbf{E} \sum_{n=0}^N e^{ikn\Delta},$$

где $\Delta = kh(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)/N \equiv 2\alpha$, $\varphi_{1,2}$ — углы падения и отражения соответственно. Здесь специально сохранен параметр α из § 100, чтобы подчеркнуть аналогию с дифракционной решеткой. Повторяя стандартную процедуру вычисления сечения, найдем

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=\pi/2} = r_e^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2.$$

При $N \rightarrow \infty$ это выражение переходит в знакомую формулу дифракции на апертуре h (см. § 97):

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=\pi/2} \approx N^2 r_e^2 \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2;$$

$$U = \frac{kh}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2); \quad N \gg 1.$$

Таким образом, рассеянное излучение в плоскости zy сосредоточено вблизи направлений $\varphi_2 = \varphi_1, \pi - \varphi_1$ в интервале углов $\Delta\varphi \sim \lambda/h$. Рассмотренная система зарядов является простейшей моделью зеркала.

Задача 3. Плоская монохроматическая волна рассеивается на электронном газе плотности n_0 . Найти распределение по частоте в волне, рассеянной на угол θ_S , считая распределение электронов по скорости максвелловским с температурой T .

Для рассеяния излучения на отдельном электроне, скорость которого \mathbf{v} составляет угол θ с направлением регистрации рассеянного излучения, запишем

$$\omega' = \gamma(\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}) = \gamma(\omega_S - \mathbf{k}_S\mathbf{v}). \quad (139.13)$$

Здесь $\omega_0, k_0, \omega_S, k_S$ — частота и волновое число соответственно для падающего и рассеянного излучения, ω' — частота в системе электрона. Отсюда

$$\Delta\omega_S \equiv \omega_S - \omega_0 = (\mathbf{k}_S - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}). \quad (139.14)$$

Типичным для таких задач диагностики плазмы является случай $v \ll c$, когда $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k}_S - \mathbf{k}_0| = 2k_0 \sin(\theta_S/2) + k_S - k_0 \approx 2\omega_0 \sin(\theta_S/2)/c$; $\Delta\omega_S \ll \omega_0$. Интенсивность излучения, рассеянного электронным газом на угол θ_S в интервал частот $(\omega_S, \omega_S + d\omega_S)$, найдем, просуммировав интенсивности потоков, рассеянных теми электронами, у которых направление и величина скорости удовлетворяют равенству

$$\Delta\omega_S = 2 \frac{\omega_0}{c} \sin \frac{\theta_S}{2} v \cos \theta, \quad (139.15)$$

где θ — полярный угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{q} . Для максвелловского распределения электронов по скоростям $f(v) = (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-mv^2/2T)$ спектральная плотность интенсивности записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\Omega_S} \left(\frac{dJ}{d\omega_S} \right) = \\ & = S_0 A n_0 l r_e^2 \sin^2 \theta_S \int f(v) v^2 dv \cdot 2\pi \sin \theta d\theta \cdot \delta(qv \cos \theta - \Delta\omega_S), \end{aligned}$$

где $d\Omega_S$ — элемент телесного угла в лабораторной системе, S_0 — плотность потока падающего излучения, A, l — площадь поперечного сечения и толщина плазменного слоя. Дельта-функция под интегралом нормируется условием

$$\int \delta(qv \cos \theta - \Delta\omega_S) d\omega_S = 1.$$

Выполнив вначале интегрирование по θ , а затем по v , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dJ}{d\omega_S} \right) &= \frac{S_0 A n_0 l r_e^2 \sin^2 \theta_S}{\sqrt{\pi} \omega_T} e^{-(\Delta\omega_S/\omega_T)^2}, \\ \omega_T &= \sqrt{\frac{8T}{mc^2}} \omega_0 \sin \frac{\theta_S}{2}. \end{aligned} \quad (139.16)$$

Измерив это распределение, можно найти электронную температуру.

§ 140. РЕНТГЕНОСТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ

Явление дифракции рентгеновских лучей на периодических кристаллических решетках лежит в основе структурного анализа. Традиционно в качестве источника излучения применялись рентгеновские трубки. Новые, существенно более широкие возможности от-

Таблица 2. Характеристики некоторых источников рентгеновского излучения

Источник	$\lambda, \text{ \AA}$	Угловая расходимость излучения (радиан)	Яркость (число фотонов с квадратного сантиметра поверхности источника за секунду в стерадиан и единственный интервал $\Delta\lambda/\lambda$)
Рентгеновская трубка мощностью 30 кВт	1,54	~ 1	$4 \cdot 10^{20}$
Линейный ускоритель электронов 10 МэВ, 1 МВт	10^{-3}	0,25	$3 \cdot 10^{20}$
Накопитель электронов ВЭП-3 ИЯФ СО АН СССР	0,5—5	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{24}

крылись во второй половине 60-х годов, когда была выяснена возможность использования синхротронного излучения, возникающего в электронных накопителях. Накопители оказались весьма интенсивными источниками электромагнитных волн в рентгеновском диапазоне, позволившими совершить качественный скачок в развитии методов анализа, значительно расширить круг решаемых задач. В конце 70-х — начале 80-х годов один за другим вступают в строй специализированные электронные накопители, построенные только для работы с синхротронным излучением, как в СССР, так и за рубежом. Этот «синхротронный бум» захватил целые отрасли науки (химию, биологию, молекулярную физику) и техники (электронную, химическую промышленность и др.). В нашей стране различные эксперименты, базирующиеся на синхротронном излучении, и разработка его применения для целей технологии были начаты в Институте ядерной физики в Новосибирске. Приведенные ниже примеры взяты из работ, осуществленных в ИЯФ.

В подавляющем большинстве случаев используется не интегральный поток излучения, а его спектральная интенсивность. И здесь благодаря острой направленности СИ электронные накопители на несколько порядков превосходят по интенсивности лучшие рентгеновские трубки и другие рентгеновские источники (см. табл. 2). Немаловажную роль в совершенствовании методов рентгеноструктурного анализа сыграло и привлечение современных способов регистрации излучения и обработки информации (ЭВМ), развитых в экспериментальной физике элементарных частиц.

Как мы уже видели, спектр излучения рентгеновских трубок и электронных накопителей довольно широкий. В структурных работах чаще всего применяют монохроматическое излучение, его получают, вырезая из широкого спектра узкую полосу с помощью стандартного приема — вольфбратговского рассеяния на кристалле, как это показано на рис. XXIII.7 и XXIII.8. Излучение, падающее на плоскость кристаллической решетки под углом скольжения $\theta(\lambda)$, рассеивается под таким же углом и содержит излучение с заданной длиной волны в соответствии с (139.8). Различают два способа монохроматизации — метод широкого пучка (рис. XXIII.8, а) и метод качающегося кристалла (рис. XXIII.8, б). В первом на кри-

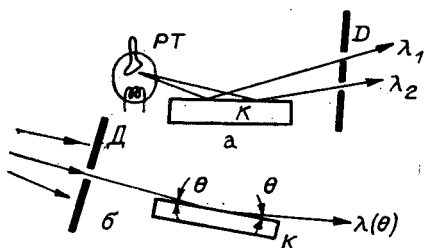


Рис. XXIII.8. Схемы монохроматизации рентгеновского излучения.

а — метод широкого пучка; б — метод качающегося кристалла; РТ — рентгеновская трубка; К — кристалл, Д — свинцовая диафрагма, задающая угол расходимости излучения и определяющая тем самым величины $\Delta\lambda$ и (в случае а) λ .

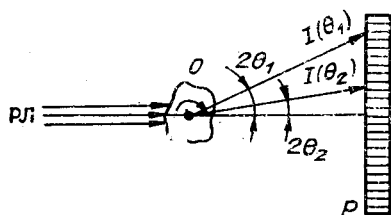


Рис. XXIII.9. Схема метода вращающегося образца в рентгеноструктурном анализе.

РЛ — пучок рентгеновских лучей; О — образец; Р — регистратор.

сталл падает расходящийся поток рентгеновского излучения, а под разными углами θ' выходят монохроматические потоки с разными λ . Во втором методе узкий пучок рентгеновского излучения с широким спектром падает на кристалл, поворотом которого в пространстве выбирают необходимые брэгговские углы $\theta(\lambda)$, так что рассеянный поток несет монохроматическое излучение с выбранной длиной волны. Последний метод обычно применяется для монохроматизации синхротронного излучения, обладающего узкой направленностью.

В рентгеноструктурном анализе широко распространен метод вращающегося (качающегося) образца. Монохроматический узкоколлимированный пучок рентгеновского излучения падает на исследуемый образец, который медленно вращают вокруг оси, перпендикулярной пучку (рис. XXIII.9). Несмотря на то что отдельные кристаллы (проще объяснить сущность метода именно на кристаллической структуре) ориентированы в образце хаотически, узкие максимумы дифрагированного излучения образуются в плоскости регистратора в определенных точках. Когда данный кристалл ориентируется в пространстве так, что для падающего пучка вы-

Интенсивность

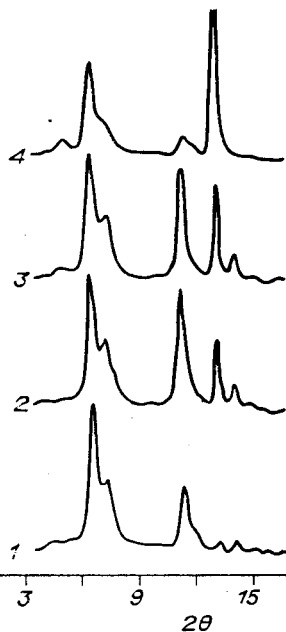


Рис. XXIII.10. Кадры «рентгенодифракционного кино»: процесс перестройки кристалла AgJ под действием давления. 1 — 2500 атм, структура «AgJ-I»; 2, 3 — промежуточные состояния, 4 — 2900 атм, структура «AgJ-II».

полняется условие Вульфа — Брэгга (для некоторого угла θ), дифрагированный поток дает максимум — рефлекс под углом 2θ к направлению первичного пучка. Если в кристалле существует несколько периодов структуры, дифракционная картина имеет соответственно несколько рефлексов. В результате в плоскости регистратора возникает сложная картина, наподобие той, которая показана на рис. XXIII.5. Вращая образец вокруг нескольких осей, получают соответствующие рентгенограммы и по ним ведут расшифровку структуры образца. Как правило, это сложная и трудоемкая задача, которую приходится решать последовательными приближениями: по рентгенограммам строится приближенная модель кристалла, затем рассчитывается рассеяние на этой модели, результаты расчетов сопоставляются с рентгенограммами, вносятся поправки в модель (если она не опровергается полностью), и процедура расчета и сравнения повторяется еще и еще раз. Классическим примером таких исследований является расшифровка сложной структуры молекулы ДНК Криком и Уотсоном (1952 г., Англия).

Существуют различные варианты схемы вращающегося образца, но их основной принцип один и тот же — выявление структуры по брэгговскому рассеянию. Методы рентгеноструктурного анализа широко применяются для контроля состава веществ, например в металлургии. Такая задача несравненно проще описанной задачи расшифровки — она сводится к сравнению получаемых рентгенограмм с эталонными. Использование интенсивных источников СИ приводит к резкому сокращению времени экспозиции, а регистрация при помощи координатных детекторов (пропорциональных проволочных камер), позволяющих сразу же вводить информацию в ЭВМ, существенно облегчает обработку результатов и расшифровку рентгенограмм. Теперь стало возможным изучение методами рентгеноструктурного анализа развития во времени различных процессов перестройки структуры вещества — съемка своего рода «рентгендифракционных кинофильмов». Конечно, демонстрируются такие кинофильмы на экранах дисплеев ЭВМ. В качестве примера на рис. XXIII.10 приведены кадры, иллюстрирующие процесс перестройки кристалла AgJ под действием давления. По оси абсцисс отложен удвоенный угол поворота кристалла, а по оси ординат — интенсивность излучения, дифрагированного под данным углом θ . Каждая кривая снята сканированием по углу θ (поворотом кристалла AgJ) при разных, но фиксированных давлениях. Отчетливо видно, как с ростом давления возрастает интенсивность рефлекса $2\theta \approx 13^\circ$, а в конечном состоянии исчезает рефлекс $2\theta \approx 11^\circ 30'$.

Одно из очень интересных направлений в современном рентгеноструктурном анализе — так называемая «дальняя тонкая структура рентгеновского спектра». Этот метод, требующий интенсивных рентгеновских источников, также получил свое развитие с появлением накопителей — генераторов СИ. В эксперименте измеряется зависимость коэффициента поглощения монохроматического рентгеновского излучения в веществе от энергии падающего излучения. Последняя выбирается такой, чтобы она превышала энергию связи

электрона («край поглощения») на какой-либо внутренней оболочке атома (отсюда название — «дальняя структура спектра», т. е. «за краем поглощения»). Оказывается, что в этом случае эффективность передачи энергии (сечение поглощения) от рентгеновского кванта электрону зависит от энергии кванта и от расположения близлежащих (на расстояниях 4—6 Å) соседних атомов. Варьируя энергию падающего пучка и регистрируя интенсивность падающего и прошедшего сквозь образец пучков, находят их разность — интенсивность поглощенного излучения. По ее зависимости от энергии падающего пучка (это и есть рентгеновский спектр поглощения) можно, привлекая методы квантовой механики, определить расположение окружающих атомов. При достаточно высокой монохроматичности излучения и точности определения его энергии ($\Delta\mathcal{E} \lesssim 3\text{--}4\text{ эВ}$ — «тонкая структура спектра» при полной энергии кванта 5—15 кэВ в зависимости от вида исследуемого вещества) удается измерять расположение атомов с точностью порядка 0,02 Å (!). Заметим, что монохроматизацию излучения также осуществляют с помощью брэгговского рассеяния, как это описано выше, а поворотом плоскости кристалла (изменением угла θ) перебирают энергию «вырезаемого» пучка.

Исторически первым применением рентгеновского излучения было простое, теперь хорошо всем знакомое, «просвечивание» исследуемых объектов, в том числе и живых, с наблюдением распределения плотности вещества по объему образца — рентгеноскопия (буквально «рассматривание» рентгеном). Для рентгеноскопии очень важно иметь возможность регулировать контрастность деталей образца в исследуемой области объекта. Это достигается введением различного рода веществ, сильно поглощающих рентгеновское излучение. В медицине, например, при рентгеноскопии желудочно-кишечного тракта пациенту дают предварительно съесть кашу, насыщенную солями, содержащими барий — тяжелый элемент ($Z = 56$), который сильно рассеивает и поглощает рентгеновское излучение. Тогда на рентгеновском снимке или рентгеночувствительном экране органы, насыщенные барием, выглядят подчеркнуто темными. Кроме соединений бария часто применяют также соединения брома и висмута, безвредные для живого организма. Типичная энергия излучения в медицинской рентгенодиагностике 90 кэВ (0,13 Å) — излучение существенно меньшей энергии сильно поглощается мягкими тканями.

Применение интенсивного и монохроматического излучения от источников СИ позволяет выйти в медицинской и биологической рентгеноскопии на существенно новый уровень — резко поднять чувствительность благодаря использованию разностного метода при регистрации рентгеновских снимков. В исследуемый объект вводится в очень малой концентрации вещество, повышающее контрастность, например раствор соли йода, и делаются два снимка в монохроматическом рентгеновском излучении (в случае йода $\lambda \approx \approx 0,3\text{ Å}$) с разными энергиями — в одном случае выше, а в дру-

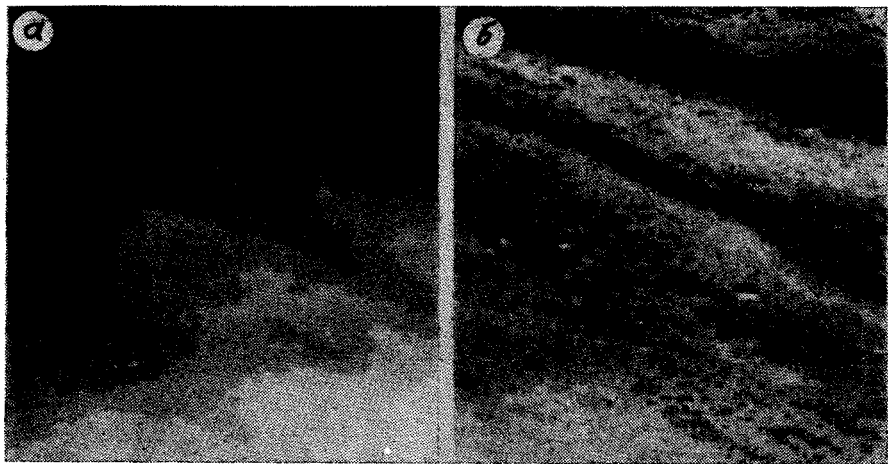


Рис. XXIII.11. Рентгенограммы участка (10×10 мм) ушной раковины кролика, выведенные на экран дисплея.

а — обычная рентгенограмма; б — разностная рентгенограмма. Контрастное вещество — бром; в верхней части снимка виден кровеносный сосуд диаметром 1 мм.

гом — ниже энергии ионизации K -оболочки атомов этого вещества (йода). В первом случае йод сильно поглощает излучение, во втором — слабо. Вычитая (на ЭВМ) интенсивности сигналов обоих «снимков», получают контрастную фотографию объекта (рис. XXIII.11). Метод представляет большой интерес для рентгеноскопии кровеносных сосудов. Конечно, регистрация также ведется с помощью координатных детекторов, что к тому же делает диагностическую процедуру очень оперативной.

Рентгеноскопия широко применяется в технике для выявления скрытых дефектов конструкций, например, внутренних трещин, раковин в массивных изделиях из металла, бетона, полимеров и других материалов. Для этого требуется достаточно жесткое рентгеновское излучение, обычно это тормозное излучение электронов, ускоренных до энергии в несколько мегаэлектронвольт ($\lambda_{\min} \sim \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$). Регистрируется рентгенограмма на фотоэмульсии или в современном варианте на люминесцентном экране, изображение с которого телевизионным устройством передается наблюдателю, находящемуся за радиационной защитой. Электроника позволяет построчно считать телекадр и передать в цифровом коде в ЭВМ.

Исследование микроструктуры вещества на «надмолекулярном» уровне — задача рентгеновской микроскопии. Она тесно примыкает по своей сути к описанной выше рентгеноскопии микрообъектов. И простейший вид рентгеновской микроскопии — контактная, когда образец помещается на регистратор и просвечивается рентгеновским излучением. Полученный снимок рассматривается в микроскоп. Сейчас в качестве регистраторов применяют фоточувствительные резистивные пленки (например, из полиметилметакрилата-



Рис. XXIII.12. Увеличенное изображение картины фраунгоферовской дифракции монохроматического излучения, вырезанного из пучка СИ накопителя ВЭПП-3 ИЯФ СО АН СССР (1975 г.).

Длина волны $1,8 \text{ \AA}$, ширина щели 4 мкм , расстояние от щели до фотопластины 8 м . При этом ширина главного максимума составляет $\pm 0,23 \text{ мрад}$, или $\pm 0,18 \text{ мм}$.

та), а изображение «проявляют» травлением пленки в кислоте. Такой снимок можно изучать с помощью электронного микроскопа, в результате чего достигается разрешение порядка 50 \AA . Рентгеновский микроскоп имеет ряд преимуществ по сравнению с электронным, в частности можно работать при больших толщинах образцов, их не нужно помещать в вакуум.

В недалеком будущем появится, видимо, и голографическая рентгеновская микроскопия, в которой можно надеяться получить разрешение того же порядка. Здесь главная проблема — яркие когерентные источники излучения, и решается она с помощью все того же синхротронного излучения. Первые эксперименты в этой области состояли в осуществлении классических дифракционных и интерференционных схем (рис. XXIII.12, XXIII.13) и голографировании простейших объектов. В начале 70-х годов японским физикам (Кикута, Аоки с сотрудниками) удалось зарегистрировать на пучке синхротронного излучения ($\lambda = 60 \text{ \AA}$) и восстановить в свете He-Ne-лазера голограмму трех щелей размером по 3 мкм с таким же расстоянием между ними.

Отметим, что рентгеновская оптика в последние годы получает значительное развитие благодаря технике многослойных зеркал, работающих аналогично интерферометрам Фабри — Перо (или интерференционным фильтрам). Толщина слоев и угол отражения связаны с длиной волны все тем же условием Вульфа — Брэгга. В качестве материала слоев используются углерод (прозрачный слой) и вольфрам (отражатель), толщина слоя — порядка десяти длин волн. Такая техника применяется, в частности, для зеркал рентгеновских телескопов.

При помощи рентгенфлуоресцентного анализа оказалось возможным изучать элементный состав различных руд, минералов, смесей веществ. Метод основан на свойстве атомов испускать под воздействием достаточно коротковолнового рентгеновского излучения вторичное, характеристическое излучение, спектр которого однозначно определяется атомным номером облучаемого элемента. Вид спектра флуоресценции, таким образом, содержит информацию

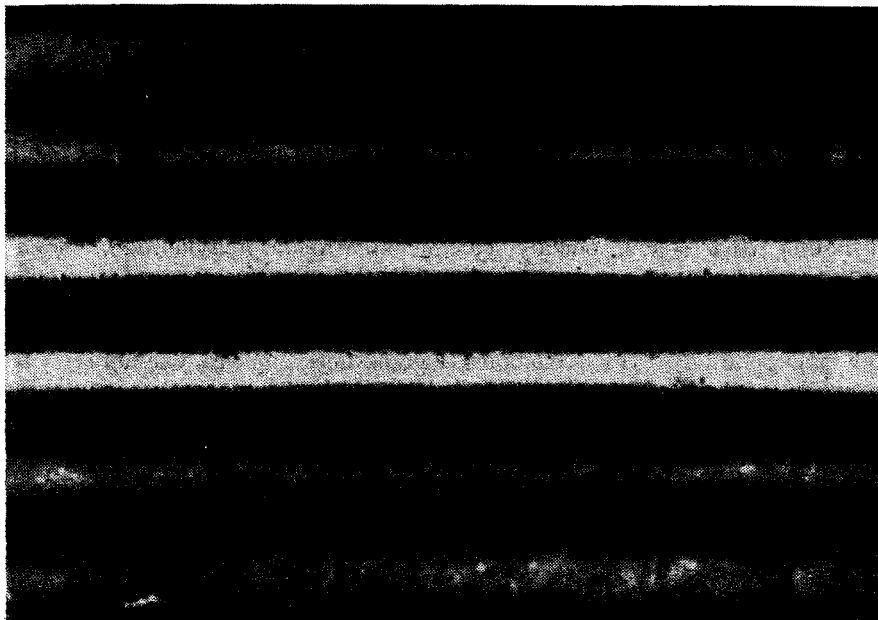


Рис. XXIII.13. Увеличенное изображение картины интерференции рентгеновского излучения электронов, проходящих через спиральную «змейку» накопителя ВЭПП-2М ИЯФ СО АН СССР (1983 г.).

Интерференционная схема Юнга, $\lambda=130 \text{ \AA}$, $\Delta\lambda/\lambda=0,1$ («змейка» имеет 10 периодов), a_s — от 7 до 15 мкм, $L_s=5 \text{ м}$, $a=50 \text{ мкм}$, $L=30 \text{ см}$, диаметр отверстий в экране 5 мкм, размер «источника» в направлении, ортогональном плоскости рисунка, 350 мкм. Интерференционная картина наблюдается при увеличении расстояния между отверстиями вплоть до $a=500 \text{ мкм}$, что точно совпадает с критерием когерентности источника (93.6). Для $a=50 \text{ мкм}$ расстояние между максимумами (92.15) составляет 84 мкм, а размер интерференционной картины (94.7) $\pm 840 \text{ мкм}$, т. е. ± 10 линий.

об элементном составе объекта, а относительные интенсивности максимумов — о концентрации этих элементов. При помощи источников СИ удастся регистрировать концентрации элементов на уровне 10^{-8} .

Как и другие виды электромагнитного излучения, рентгеновское излучение широко используется в спектроскопических исследованиях, в частности при определении структуры энергетических уровней молекул, атомов и атомных ядер.

Наконец, следует указать еще одну важную область уже реализуемых сегодня и возможных в будущем применений СИ — для промышленных (технологических) целей. Одним из наиболее ярких примеров здесь, по-видимому, является рентгеновская литография — нанесение на поверхность кристаллов проводящих покрытий заданной конфигурации, что позволяет создавать различные сложные схемы микроэлектроники (так называемые БИСы — большие интегральные схемы). В обычной технологии такого производства исходная структура состоит из трех слоев — кремния, провод-

ника (хром) и фоторезиста (полиметилметакрилат). После засвечивания фоторезиста через маску-экран с отверстиями заданной формы полиметилметакрилат в местах засветки приобретает устойчивость к кислоте и при последующем протравливании предохраняет проводник от разрушения. Так на поверхности кремния возникает схема электрических соединений. Минимальные размеры ее элементов ограничены дифракцией излучения, экспонирующего фоторезист, на отверстиях маски, т. е. порядка нескольких длин волн. В конце 70-х годов, освоив ультрафиолетовое излучение лазеров, микроэлектроника вышла на уровень 2—3-микронных размеров (20—30 тыс. ангстрем). Переход на рентгеновское синхротронное излучение позволит на 2—3 порядка повысить «плотность упаковки» электронных схем. Это дает возможность резко увеличить быстродействие вычислительной техники, эффективность электронных систем регистрации и обработки различных сигналов и т. д.

Существует, конечно, множество других применений рентгеновского и синхротронного излучений как для технологических, так и для исследовательских целей.

Глава XXIV

КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим основные принципы генерации интенсивного когерентного электромагнитного излучения и его усиления в устройствах, получивших название квантовых генераторов и квантовых усилителей. Диапазон длин волн, в котором работают квантовые генераторы, простирается от единиц сантиметров (радиоволны) до тысяч ангстрем (ультрафиолетовое излучение). Элементарным излучателем в таких устройствах является возбужденный атом (молекула). Уже само название этих источников говорит о существенной роли, которую играют квантовые физические процессы в механизме их действия. Мы рассмотрим качественно лишь основные принципы их работы, опираясь на классические свойства электромагнитного поля и привлекая лишь упрощенные квантовые представления (подробнее см., например, [6]).

Квантовые генераторы — детище второй половины XX в., однако принято считать, что с их открытием физики опоздали лет на двадцать — тридцать. Физические представления о вынужденном излучении, лежащем в основе действия квантовых генераторов, были развиты Эйнштейном и Дираком еще в начале столетия, а резонатор оптических квантовых генераторов, представляющий собой не что иное, как интерферометр Фабри — Перо, известен с конца прошлого столетия. И тем не менее появление квантовых генераторов датируется 1954-м годом, когда советские физики Басов и Прохо-

ров и независимо американские — Гордон, Цайгер и Таунс продемонстрировали действие аммиачного лазера (СВЧ-генератор, $\lambda = 1,25$ см). Десять лет спустя это открытие было отмечено Нобелевской премией (Басов, Прохоров, Таунс).

Квантовые генераторы и усилители называют также мазерами и лазерами. Первый термин образован начальными буквами слов Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (усиление микроволн стимулированным испусканием излучения), а второй — аналогично с заменой первого слова словом Light (свет). Стимулированное, или, как его принято называть в отечественной литературе, индуцированное, излучение является физическим процессом, на котором основывается действие квантовых генераторов и усилителей. Интересно, что еще в 1940 г. советский физик Фабрикант предложил использовать это явление для усиления электромагнитного излучения.

Тридцать лет, прошедшие со времени открытия квантовых генераторов, отмечены огромными успехами в развитии этой новой отрасли науки и техники. В первых квантовых усилителях СВЧ на парамагнитных кристаллах (Бломберген, США), созданных в 1956 г., была реализована трехуровневая схема, предложенная годом ранее Басовым и Прохоровым. В 1958 г. Прохоров сформулировал идею об использовании открытых резонаторов, а в 1960 г. Мейман (США) построил первый лазер на монокристалле рубина. Газовый лазер (Джаван, Беннет, Эрриот, США) появился в 1961 г., а годом позже — полупроводниковый лазер (одновременно несколько групп исследователей). С развитием квантовых генераторов в физике и технике появились интенсивные источники когерентного и остро-направленного электромагнитного излучения и высокочувствительные усилители электромагнитных сигналов.

§ 141. ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Прежде всего выясним, какова монохроматичность излучения «обычных» источников, работающих в оптическом и СВЧ диапазонах. Для оптических длин волн элементарными излучателями являются атом или молекула, а минимальная ширина линии излучения $\Delta\omega_0$ определяется временем жизни атома в возбужденном состоянии τ_c . Оно, в свою очередь, зависит от структуры атома и вещества, в состав которого этот атом входит, от того, какой именно уровень возбужден, и т. д. По порядку величины τ_c составляет 10^{-8} с, так что в соответствии с соотношением неопределенности монохроматичность излучения свободного покоящегося атома в оптическом диапазоне ($\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$) есть $\Delta\omega_0/\omega \sim 10^{-7}$. Ширина линии излучения атома, входящего в состав кристалла или сложной молекулы, может быть значительно больше. Так, в полупроводниках $\Delta\omega_0/\omega \sim 10^{-3}$.

Атомы вещества, кроме того, участвуют в тепловом движении, что приводит к доплеровскому уширению линии излучения ансамб-

ля возбужденных атомов:

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega} \sim \frac{v_T}{c} \sim \sqrt{\frac{T}{Mc^2}} \sim 5 \cdot 10^{-6}.$$

Численное значение приведено для молекулы водорода при комнатной температуре. Такая ширина линии излучения для многих применений является недопустимо большой, поэтому для монохроматизации источников приходится прибегать к различным «вырезающим» устройствам, таким, как, например, интерферометр Фабри — Перо. Конечно, в этом случае монохроматизация достигается за счет потери интенсивности.

В радиодиапазоне ширина линии генератора обычно определяется добротностью Q резонатора или контура: $\Delta\omega_c/\omega \sim Q^{-1} \sim 10^{-5}$.

Можно, однако, реализовать условия, при которых возбужденные атомы (молекулы) будут излучать не независимо, а когерентно. Такая «привязка» по фазе имеет место при индуцированном или вынужденном излучении, когда все возбужденные атомы находятся в поле одной электромагнитной волны, частота которой совпадает с частотой их излучения (резонанс). На этом основано действие так называемых квантовых генераторов (мазеры, лазеры и др.). В действительности такой механизм генерации возможен и в классической системе, когда излучателями являются не атомные электроны, а, например, электроны в магнитном поле, движение которых описывается классически (в частности, лазер на «свободных» электронах). В последнем случае механизм вынужденного излучения очень прост: это работа поля волны над электроном.

В квантовом случае вынужденное излучение характеризуется эффективным поперечным сечением σ_{ν} . Как и для других резонансных процессов, по порядку величины $\sigma_{\nu} \sim \lambda^2$ (ср. (138.5)). Точное выражение для σ_{ν} можно найти, используя изящный метод Эйнштейна (задача 1). Он основан на распределении Планка для теплового излучения:

$$dn_{\phi}/d\omega = (\omega^2/\pi^2c^3) \cdot 1/(e^{\hbar\omega/kT} - 1), \quad (141.1)$$

где n_{ϕ} — плотность фотонов, T — температура излучения, которое считается изотропным. Для дальнейшего формулу Планка удобно представить в виде

$$\frac{dn_{\phi}}{d\omega d\Omega} = \frac{dN}{d\omega d\Omega dV} \bar{m}; \quad \bar{m} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}, \quad (141.2)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, в котором распространяются фотоны; N — число мод резонатора объема V :

$$dN = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (141.3)$$

а \bar{m} — среднее число тепловых фотонов в одной моде. При $T \gg \hbar\omega$ величина $\bar{m} \approx T/\hbar\omega$. Число мод N равно числу степеней свободы поля в резонаторе (см. § 103).

Задача 1. Найти сечение поглощения и вынужденного излучения двухуровневой системы из условия термодинамического равновесия.

Условие равновесия на резонансной частоте ω в единичном интервале $\Delta\omega$ запишем в виде

$$c \frac{dn_{\Phi}}{d\omega} (\sigma_{\Pi} n_1 - \sigma_{\text{В}} n_2) = \frac{n_2}{\tau_c \Delta\omega_c}. \quad (141.4)$$

Здесь σ_{Π} — резонансное сечение поглощения; n_1, n_2 — плотности атомов на нижнем и верхнем уровнях соответственно; τ_c — среднее время спонтанного излучения с переходом $2 \rightarrow 1$; $\Delta\omega_c$ — эффективная ширина спектра спонтанного излучения.

В термодинамическом равновесии

$$n_1/n_2 = e^{\hbar\omega/T}. \quad (141.5)$$

Подставляя выражения (141.1), (141.5) в (141.4), получаем

$$\sigma_{\text{В}} = \sigma_{\Pi} = \frac{\pi^2 \lambda^2}{\tau_c \Delta\omega_c} \leq 2\pi\lambda^2. \quad (141.6)$$

Последнее неравенство связано с тем, что произведение $\tau_c \cdot \Delta\omega_c \geq \pi/2$, причем равенство достигается в случае естественной ширины спектральной линии (см. (142.14) ниже). Обычно же $\tau_c \cdot \Delta\omega_c \gg 1$, например, из-за доплеровского уширения. Уменьшение сечения при $\tau_c \Delta\omega_c > \pi/2$ объясняется тем, что фотоны взаимодействуют только с частью атомов вблизи резонансной частоты ω .

Из условия термодинамического равновесия (141.4) следует еще один важный вывод. Перепишем это уравнение в виде

$$w_{\text{В}} \frac{n_1 - n_2}{n_2} = w_c,$$

где $w_{\text{В}} = c\sigma_{\text{В}}(dn_{\Phi}/d\omega)$ — вероятность спонтанного перехода на один атом, а $w_c = 1/(\tau_c \Delta\omega_c)$ — вероятность спонтанного излучения на один атом. Отсюда отношение вероятностей

$$\frac{w_{\text{В}}}{w_c} = \frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} = \bar{m}. \quad (141.7)$$

Общая картина усиления излучения может быть представлена теперь следующим образом. Пусть среда состоит из атомов, способных совершать переходы с испусканием или поглощением излучения некоторой частоты ω , и пусть концентрация возбужденных атомов, способных испускать излучение, по каким-то причинам превышает концентрацию невозбужденных поглощающих атомов ($n_2 > n_1$). Такая среда называется *активной*. Если сквозь активную среду проходит монохроматическая волна частоты ω , ее интенсивность будет возрастать в результате того, что вклад вынужденного излучения возбужденных атомов преобладает над потерями на поглощение. Если пренебречь для простоты всеми остальными потерями, кроме резонансного поглощения, то уравнение для усиления плотности потока энергии $j = cn_{\Phi}\hbar\omega$ имеет вид

$$\frac{dj}{dz} = \frac{j}{l}; \quad l = \frac{1}{\sigma_{\text{В}}(n_2 - n_1)}, \quad (141.8)$$

где l — средняя длина «размножения» фотонов. Отсюда

$$j(z) = j(0) e^{z/l}. \quad (141.9)$$

В термодинамическом равновесии $n_2 < n_1$, и эти же соотношения описывают затухание волны ($l < 0$) вследствие резонансного поглощения. Простой закон с $l = \text{const}$ справедлив до тех пор, пока концентрации $n_{1,2}$ можно считать неизменными. Однако при достаточно большой интенсивности волны $n_2 \rightarrow n_1$ (из-за равенства сечений $\sigma_B = \sigma_A$), и поглощение волны уменьшается. Это так называемый эффект насыщения, или просветление среды, на который впервые указал Вавилов. Уравнение (141.8) становится при этом нелинейным, так как l зависит от j (см. задачу 2). Этот эффект положил начало так называемой нелинейной оптике.

Задача 2. Найти закон резонансного поглощения монохроматической волны произвольной интенсивности.

Прежде всего найдем соотношение между плотностью фотонов n_Φ и равновесными концентрациями $n_{1,2}$, предполагая, что уменьшение концентрации n_2 связано только со спонтанным излучением со временем τ_c . Условие равновесия имеет теперь вид

$$cn_\Phi \sigma_B (n_1 - n_2) = \frac{n_2}{\tau_c}. \quad (141.10)$$

Отсюда, учитывая, что $n_1 + n_2 = n = \text{const}$, находим

$$\Delta n = n_1 - n_2 = n \frac{n_H}{n_\Phi + n_H}; \quad n_H = \frac{1}{2\sigma_B \tau_c \cdot c}, \quad (141.11)$$

где n_H — так называемая плотность насыщения (фотонов). Подставляя этот результат в (141.8), найдем

$$\frac{dn_\Phi}{dz} = -\frac{n_H}{l_0} \cdot \frac{n_\Phi}{n_\Phi + n_H}; \quad l_0 = \frac{1}{\sigma_B n}.$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} -n_H \frac{z}{l_0} &= n_\Phi - n_\Phi(0) + n_H \ln \frac{n_\Phi}{n_\Phi(0)}; \\ n_\Phi(z) &\approx \begin{cases} n_\Phi(0) - n_H \frac{z}{l_0}; & z < l \equiv l_0 \frac{n_\Phi(0)}{n_H}; \\ n_\Phi(0) e^{-z/l_0}; & z > l. \end{cases} \end{aligned} \quad (141.12)$$

Таким образом, l — полный пробег волны большой интенсивности, а l_0 — средняя длина затухания волны малой интенсивности.

Аналогичный эффект насыщения имеет место и при усилении волны в активной среде. В этом случае начальная инверсия $\Delta n_0 = n_2(0) - n_1(0)$ падает по мере роста интенсивности волны, что приводит к уменьшению коэффициента усиления. Равновесное значение $\Delta n(j)$ в каждой точке активной среды будет определяться конкуренцией вынужденного излучения и накачки. Последнюю будем характеризовать величиной инверсии в отсутствие поля $\Delta n_0 = \Delta n(0)$ и временем τ релаксации инверсии $\Delta n \rightarrow \Delta n_0$ (см. § 143).

Задача 3. Найти закон роста интенсивности волны в активной среде для описанной модели накачки в пренебрежении нерезонансными потерями.

Найдем прежде всего равновесную инверсию в зависимости от интенсивности волны. Аналогично (141.10) запишем

$$\frac{j}{\hbar\omega} \sigma_B \Delta n = \frac{\Delta n_0 - \Delta n}{\tau}, \quad (141.13)$$

откуда

$$\frac{\Delta n(j)}{\Delta n_0} = \frac{1}{1 + \frac{j}{j_H}}, \quad j_H = \frac{\hbar\omega}{\sigma_B \tau}. \quad (141.14)$$

Тогда (141.8) принимает вид

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta}, \quad (141.15)$$

где $\eta = j(z)/j_H$; $l_0 = 1/\sigma_B \cdot \Delta n_0$. Решая это уравнение, получаем

$$\frac{z}{l_0} = \ln \frac{\eta}{\eta(0)} + \eta - \eta(0). \quad (141.16)$$

Решение полностью аналогично обратному процессу затухания (141.12). В частности, при $z \rightarrow \infty$ имеем $\eta \approx z/l_0$, или

$$j(z) \approx \frac{\hbar\omega \Delta n_0}{\tau} z. \quad (141.17)$$

Таким образом, при большой интенсивности волны ее дальнейшее усиление идет по линейному закону и определяется только интенсивностью накачки $\Delta n_0/\tau$ ($\Delta n \approx 0$).

§ 142. КВАНТОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ

Для осуществления непрерывной генерации необходимо кроме усиления излучения ввести каким-либо способом положительную обратную связь, т. е. вернуть обратно часть волнового потока, прошедшего сквозь активную среду и усиленного ею. Если коэффициент усиления K , а коэффициент обратной связи — β , т. е. $J_{\text{вых}} = KJ_{\text{вх}}$, $J_{\text{вх}} = \beta J_{\text{вых}} + J_{\text{пад}}$, где $J_{\text{пад}}$ — интенсивность (мощность) падающей волны, то интенсивность на выходе

$$J_{\text{вых}} = \frac{K}{1 - \beta K} J_{\text{пад}}. \quad (142.1)$$

При $\beta K \rightarrow 1$ величина $J_{\text{вых}}$ неограниченно возрастает, что означает переход от режима усиления к режиму генерации. Поэтому равенство

$$\beta K = 1 \quad (142.2)$$

и есть известное в радиотехнике условие генерации. Для создания обратной связи активную среду помещают в резонатор, конструкция которого зависит от длины волны излучения — объемный резонатор СВЧ (мазеры) или открытый резонатор из двух зеркал (лазеры). В дальнейшем будем рассматривать резонатор длины L (вдоль направления излучения), одна из торцевых стенок которого

является полупрозрачной для излучения с коэффициентом отражения β или имеет соответствующее выходное отверстие. Для простоты пренебрежем всеми потерями в резонаторе, кроме полезного излучения.

Задача 1. Рассмотреть баланс энергии в резонаторе в установившемся режиме генерации.

В отсутствие активной среды энергия поля в резонаторе затухает как $\dot{W} = -\omega W/Q$, где Q — добротность резонатора (см. § 52), связанная с излучением из резонатора. Поскольку в этом случае $\dot{W} = -cW(1 - \beta)/2L$, то

$$Q = \frac{2L}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \beta}; \quad \lambda = \frac{c}{\omega}. \quad (142.3)$$

С учетом интенсивности излучения активной среды $J_{\text{изл}}$ баланс энергии имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = J_{\text{изл}} - J_{\text{вых}} = J_{\text{изл}} - \frac{\omega W}{Q}. \quad (142.4)$$

В установившемся режиме ($\dot{W} = 0$)

$$J_{\text{вых}} = J_{\text{изл}} = \frac{\omega W}{Q} = \frac{W}{\tau_p}, \quad (142.5)$$

где τ_p — время затухания мощности в резонаторе, связанное с шириной резонансной кривой (полоса пропускания резонатора $\Delta\omega_p$) соотношением

$$\frac{2\Delta\omega_p}{\pi} = \frac{1}{\tau_p} = \frac{\omega}{Q} = \frac{c(1 - \beta)}{2L} \quad (142.6)$$

(см. (142.14) ниже).

Обычно ширина пропускания резонатора $\Delta\omega_p$ гораздо меньше $\Delta\omega_c$ — ширины линии спонтанного излучения (с учетом доплеровского уширения). Более того, обычно $\Delta\omega_c$ много больше расстояния между соседними продольными модами в резонаторе $\delta\omega_p = \pi c/L$ (см. § 76). Поэтому, во-первых, усиление волны (генерация) в резонаторе может происходить сразу на нескольких модах, лежащих в полосе $\Delta\omega_c$, а во-вторых, ширина каждой моды будет определяться резонатором ($\Delta\omega_p$). Схематически эта зависимость показана на рис. XXIV.1. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одномодового режима генерации (в центре линии спонтанного излучения), когда все остальные моды каким-то способом подавлены (см. § 144), и состоянием с одной поляризацией.

Определим мощность излучения квантового генератора в установившемся режиме. Будем по-прежнему описывать процесс накачки уравнением (141.13), в котором теперь нужно заменить $j(z)$ на $2j(z)$, так как в резонаторе имеется два встречных потока примерно одинаковой интенсивности (см. ниже). Поскольку потери на полупрозрачном зеркале равны $(1 - \beta)j$, то, считая $1 - \beta \ll 1$, из (141.15) получим условие стационарной генерации в виде

$$j_{\text{ст}} \frac{2L}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j_{\text{ст}}}{j_{\text{н}}}} = (1 - \beta) j_{\text{ст}}, \quad (142.7)$$

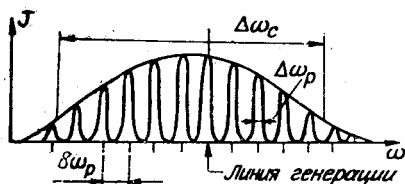


Рис. XXIV.1. Ширины линий спонтанного и индуцированного излучений в квантовом генераторе.

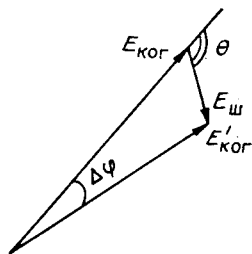


Рис. XXIV.2. Диффузия фазы когерентного поля.

где $l_0 = 1/\sigma_v \Delta n_0$, а плотность насыщения теперь $j_n = \hbar\omega/2\sigma_v\tau$ (ср. (141.14)). Отсюда полная мощность излучения квантового генератора в стационарном режиме

$$J_{\text{вых}} = (1 - \beta) S j_{\text{ст}} = \left(\frac{2L}{l_0} - (1 - \beta) \right) S j_n \approx \frac{\hbar\omega}{\tau} \Delta n_0 V, \quad (142.8)$$

где S — площадь поперечного сечения потока излучения; V — объем активной среды. Последнее приближенное выражение справедливо при условии $j_{\text{ст}} \gg j_n$.

Из соотношений (142.7) и (141.14) находим равновесное значение инверсии, соответствующее режиму стационарной генерации

$$\Delta n(j) = \Delta n_0 \frac{j_n}{j_n + j_{\text{ст}}} = \frac{1 - \beta}{2L\sigma_v}. \quad (142.9)$$

Отсюда при $j_{\text{ст}} = 0$ получаем пороговое значение инверсии $(\Delta n_0)_{\text{пор}} = (1 - \beta)/2L\sigma_v$.

Спектр излучения квантового генератора является непрерывным вследствие влияния неустранимых шумов теплового излучения в резонаторе и спонтанного излучения. Вид спектра можно найти следующим образом.

Будем описывать когерентное и шумовое поля в резонаторе с помощью комплексных векторов $E_{\text{ког}}$, $E_{\text{ш}}$ соответственно (рис. XXIV.2). Фаза шумового поля θ является случайной, поэтому среднеквадратичный сдвиг фазы когерентного поля под действием слабого шума $\langle (\Delta\phi)^2 \rangle = \langle E_{\text{ш}}^2 \rangle / E_{\text{ког}}^2 \ll 1$. Это приводит к диффузии фазы когерентного поля со скоростью

$$D_\phi = \frac{d}{dt} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle = \frac{1}{E_{\text{ког}}^2} \cdot \frac{d}{dt} \langle E_{\text{ш}}^2 \rangle = \frac{J_{\text{ш}}}{W}, \quad (142.10)$$

где $J_{\text{ш}} = W_{\text{ш}}/\tau_p$ — интенсивность шума, а $W_{\text{ш}}$ — полная энергия шума в рассматриваемой моде колебаний резонатора. Распределение по $\Delta\phi$ является в этом случае гауссовым с дисперсией $\langle (\Delta\phi)^2 \rangle = D_\phi t$.

Если бы смещение фазы не росло со временем, то колебания имели бы строго монохроматическую компоненту (см. (80.15)). Диффузия же фазы приводит к чисто непрерывному спектру (стохастическое поле) — см. задачу 2.

Задача 2. Найти спектр стационарных колебаний со средней частотой ω_0 , фаза которых диффундирует с постоянной скоростью D_φ .

Считая амплитуду колебаний единичной, найдем их корреляционную функцию (см. § 80)

$$\mathcal{K}(t-t') = \overline{e^{i(\varphi(t)-\varphi(t'))}}.$$

Как и при получении формулы (80.15), заменим интегрирование по времени интегрированием по функции распределения

$$f(\Delta\varphi, t-t') = f_0 \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2D_\varphi|t-t'|}\right\}, \quad (142.11)$$

где $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t')$, а f_0 — нормировочный множитель. В результате получаем

$$\mathcal{K}(t-t') = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\Delta\varphi - \frac{(\Delta\varphi)^2}{2D_\varphi|t-t'|}\right\} d(\Delta\varphi) = e^{-D_\varphi|t-t'|/2},$$

т. е. корреляция убывает экспоненциально со временем. Производя фурье-преобразование функции корреляции, получим спектр мощности

$$P(\omega) = \frac{D_\varphi/2\pi}{(D_\varphi/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (142.12)$$

Определим эффективную ширину спектра $\Delta\omega$ условием $p(0) \cdot \Delta\omega = 1$, откуда

$$\Delta\omega = \pi\gamma = \pi D_\varphi/2, \quad (142.13)$$

где γ — скорость экспоненциального затухания корреляции.

Полученные соотношения верны для любого экспоненциально затухающего процесса, например для затухания свободных колебаний резонатора. Действительно, пусть поле в резонаторе затухает по закону $E(t) \propto e^{-\gamma_p t}$. Тогда корреляция $\overline{E(t) \cdot E(t')^*} \propto e^{-\gamma_p|t-t'|}$, откуда

$$\Delta\omega_p = \pi\gamma_p = \frac{\pi}{2\tau_p}, \quad (142.14)$$

τ_p — время затухания мощности колебаний в резонаторе. То же справедливо и для спонтанного излучения с заменой τ_p на τ_c — время затухания вероятности возбужденного состояния.

Для определения ширины линии квантового генератора нам осталось только найти отношение $W_{ш}/W = J_{ш}/J_{вых}$. Два источника шума в резонаторе не могут быть устранены в принципе: тепловое излучение с температурой резонатора T и спонтанное излучение возбужденных атомов. Поскольку мы рассматриваем односторонние колебания, то для первого источника $W_{ш} = \hbar\omega\bar{n}$ (см.

(141.2))* , для второго

$$\frac{J_{\text{вых}}}{J_c} = \frac{W}{\hbar\omega} \cdot \frac{\Delta n}{n_2}, \quad (142.15)$$

где $W/\hbar\omega$ — число квантов когерентного излучения в одной моде (ср. (141.7)). Поясним, что в (141.7) рассматривается термодинамически равновесная ситуация, когда $n_2/(n_1 - n_2) = m(T)$, тогда как (142.15) относится к резко неравновесной ситуации (инверсия), когда число квантов в моде $W/\hbar\omega \gg 1$, а $\Delta n/n_2 = (n_2 - n_1)/n_2$. Собирая соотношения (142.10), (142.13), (143.15), найдем ширину линии излучения квантового генератора:

$$\Delta\omega_r = \frac{\pi}{2} D_\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\hbar\omega}{\tau_p^2 J_{\text{вых}}} \left(\bar{m} + \frac{n_2}{\Delta n} \right). \quad (142.16)$$

Поскольку выражение для D_φ (142.10) справедливо лишь при условии $W_{\text{ш}} \ll W$, то из (142.16) следует, что $\tau_p \cdot \Delta\omega_r = \pi W_{\text{ш}}/2W \ll 1$.

Обычно $\Delta n = n_2 - n_1 \ll n_2$, поэтому первое слагаемое в скобках $\bar{m} = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$ существенно только в том случае, когда оно много больше единицы ($\bar{m} \approx T/\hbar\omega \gg 1$). Оба слагаемых сравниваются при некоторой критической температуре:

$$\frac{T_{\text{кр}}}{\hbar\omega} = \frac{2n_2 L \sigma_B}{1 - \beta}.$$

Здесь использовано соотношение (142.9) для Δn .

При $T \ll T_{\text{кр}}$ ширина линии определяется спонтанным излучением:

$$\Delta\omega_r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_{\text{кр}}}{\tau_p^2 J_{\text{вых}}} = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{\hbar\omega}{J_{\text{вых}}} \cdot \frac{n_2 c^4}{L\omega^2} \cdot \frac{1 - \beta}{\tau_c \Delta\omega_c}. \quad (142.17)$$

Следует иметь в виду, что n_2 — плотность активных атомов, как правило, много меньше плотности среды.

Излучение квантового генератора, помимо высокой монохроматичности ($\Delta\omega/\omega \ll 1$), обладает узкой направленностью, определяемой дифракцией на выходном зеркале резонатора.

По порядку величины телесный угол, в котором сосредоточено излучение, равен $\Delta\Omega \sim \lambda^2/S$ (см. задачу 3).

Задача 3. Найти плотность потока излучения квантового генератора $dj/d\Omega$ вблизи его максимума.

Примем, что интенсивность излучения постоянна по всей площади S выходного зеркала. Тогда фурье-компонента поля излучения в плоскости (x, y)

$$E_{\mathbf{k}}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_S dx dy E e^{-i(k_x x + k_y y)}.$$

Максимум излучения соответствует $k_x = k_y = 0$ и равен $E_{\mathbf{k}}(0, 0) = ES/2\pi$.

* Из этого соотношения следует, в частности, формула Найквиста (см. § 80), которую в центре резонанса можно переписать в виде $dJ_{\text{ш}}/d\omega = \hbar\omega \bar{m}/\tau_p \Delta\omega_p \approx 2T/\pi (T \gg \hbar\omega)$.

Отсюда плотность интенсивности излучения

$$\frac{d^2 j}{dk_x dk_y} = j \frac{E_k^2}{SE^2} = \frac{S}{4\pi^2} j = \lambda^2 \frac{dj}{d\Omega}, \quad (142.18)$$

так как $d\Omega = dk_x dk_y / k^2$ и $\int \int E_k^2 dk_x dk_y = SE^2$.

Излучение квантового генератора, как и всякое излучение с непрерывным спектром, можно характеризовать определенной температурой T_Γ . Она находится приравнованием плотности излучения генератора $dj/d\omega d\Omega$ планковской плотности теплового равновесного излучения (141.2). Учитывая, что $j = cn_\Phi \hbar \omega$, и используя (141.3), для $T_\Gamma \gg \hbar \omega$ найдем

$$\bar{m} \approx \frac{T_\Gamma}{\hbar \omega} = \frac{d^2 j}{d\omega d\Omega} \cdot \frac{4\pi^3 \lambda^2}{\hbar \omega} = \frac{\pi J_{\text{ВЫХ}}}{\Delta\omega_\Gamma \hbar \omega}. \quad (142.19)$$

Отсюда, в частности, опять получается формула Найквиста $J_{\text{ВЫХ}}/\Delta\omega_\Gamma = dJ_{\text{ВЫХ}}/d\omega = T/\pi$, которая отличается от выражения для температуры внутри резонатора множителем 1/2, поскольку вне резонатора излучение направлено только в одну сторону.

Подставляя в (142.19) значение $\Delta\omega_\Gamma$ из (142.16), получим

$$T_\Gamma = \frac{2J_{\text{ВЫХ}}^2 \tau_p^2}{\hbar \omega \left(\bar{m} + \frac{n_2}{\Delta n} \right)}. \quad (142.20)$$

В случае $T \gg T_{\text{кр}}$ имеем любопытное соотношение

$$T_\Gamma T = 2W^2. \quad (142.21)$$

Температура излучения квантового генератора T_Γ определяет максимальную температуру, до которой можно нагреть какое-либо тело. Эта максимальная температура достигается, если нагреваемое тело может излучать только в очень узком интервале частот $\Delta\omega \ll \ll \Delta\omega_\Gamma$ и телесном угле $\Delta\Omega \ll \lambda^2/S$.

§ 143. МАЗЕРЫ

Мазерами называются генераторы-усилители электромагнитного излучения СВЧ диапазона. Первым мазером был так называемый пароструйный мазер на молекулах аммиака (рис. XXIV.3). Для создания активной среды в аммиачном мазере применяется метод сортировки, а генерация (усиление) излучения происходит на переходе между двумя возможными состояниями молекулы с соответствующей частотой 23,87 ГГц ($\lambda \approx 1,25$ см).

Для выделения молекул с большей энергией (создания активной среды) можно использовать неоднородное электрическое поле, поскольку на молекулу с дипольным моментом $\mathbf{d} = \mp \alpha \mathbf{E}$ действует сила $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{d}, \mathbf{E}) = \pm \alpha \nabla E^2$. Направление этой силы не зависит от направления поля, но определяется тем, в каком энергетическом

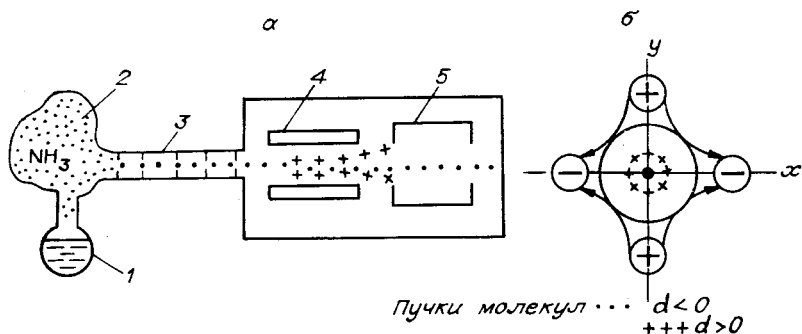


Рис. XXIV.3. Схема аммиачного мазера (а) и конфигурация электрического поля в сепараторе (б).

1 — объем с жидким аммиаком; 2 — нагреваемый объем с парообразным аммиаком; 3 — коллиматор; 4 — сепаратор; 5 — резонатор.

состоянии находится молекула (знак перед коэффициентом α). Для разделения состояний служит квадрупольный конденсатор (см. рис. XXIV.3, б), представляющий собой четыре параллельных линейных проводника, на которые «крест-накрест» поданы положительный и отрицательный потенциалы, одинаковые по величине.

Задача 1. Описать движение цилиндрического потока молекул аммиака, поступающего в квадрупольный электрический конденсатор.

Вводя систему координат, как показано на рис. XXIV.3, б, найдем поле вблизи оси конденсатора:

$$E_x = Gx; E_y = -Gy; G \approx \frac{V}{a^2}, \quad (143.1)$$

где V — разность потенциалов между полюсами конденсатора; $2a$ — расстояние между ними. Движение диполя массы M в таком поле описывается уравнением

$$M\ddot{\mathbf{r}} = \pm\alpha\nabla E^2 = \pm\alpha G^2\mathbf{r}.$$

Решение этого уравнения (в пренебрежении начальными поперечными скоростями частиц) есть

$$r(z) = r(0) \times \begin{cases} \cos kz; & d < 0; & k = \sqrt{\frac{\alpha}{M}} G; \\ e^{kz}; & d > 0; & z = v_{\parallel} t, \end{cases} \quad (143.2)$$

где v_{\parallel} — продольная компонента скорости частиц. Коллиматор (см. рис. XXIV.3, а) пропускает только те молекулы, у которых $v_{\parallel} \gg v_{\perp}$ (на входе в коллиматор $\langle v_{\parallel} \rangle \sim \langle v_{\perp} \rangle \sim v_T$). Этот результат означает, что молекулы $-\alpha$ (с большей энергией) будут колебаться вокруг оси конденсатора — «фокусироваться», а молекулы $+\alpha$ — дефокусироваться. Поставив на выходе конденсатора круглую диафрагму, можно выделить из потока молекулы с антипараллельным дипольным моментом (сфокусированные), находящиеся в состоянии с более высокой энергией. Ясно, что выгодно использовать конденсатор длины l , такой что $kl = \pi(2n + 1)$, $n \gg 1$. Таким образом, на выходе квадрупольного конденсатора (сепаратора) преобладают молекулы в верхнем энергетическом состоянии.

Параметры	Марка	
	Ч1-12	Ч1-44
Рабочее вещество	NH ₃	H
Частота, ГГц	2,8	1,42
Воспроизводимость частоты, $\delta\omega/\omega$	$3 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-13}$
Разброс частоты от прибора к прибору, $\delta\omega/\omega$	$4 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-12}$
Нестабильность во времени ($\delta\omega/\omega$)		
	за 1 с	$3 \cdot 10^{-12}$
за 1 ч	$5 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-12}$

Отметим, что в методе сортировки параметры накачки (см. (141.13) и текст выше) равны: $\Delta n_0 = n_2$ — плотность пучка молекул в верхнем возбужденном состоянии, τ порядка времени протекания молекул через резонатор.

Другим примером является водородный мазер. Принцип его действия и устройство аналогичны, а основное отличие связано с тем, что атомы водорода в возбужденном состоянии имеют магнитный, а не электрический дипольный момент. Поэтому в водородном лазере используется квадрупольный магнитный сепаратор (см. § 57). Атомарный пучок водорода получают, расщепляя молекулы в электрическом разряде. Ширина линии генерации типичного водородного лазера примерно 1 Гц, а частота генерации лазера 1,4204 057 517 860 (± 46) ГГц ($\lambda \approx 21$ см). Эти мазеры служат как правило, в качестве стабильных генераторов частоты (стандарты частоты).

Наша промышленность выпускает два типа таких генераторов, параметры которых приведены в табл. 3.

Назовем еще один молекулярный генератор, с 1977 г. применяемый в службе времени СССР в качестве стандарта частоты — цезиевый мазер (частота рабочего перехода 9,912 631 777 ГГц, сортировка в неоднородном магнитном поле). Сложный комплекс радиотехнических устройств, в котором для непрерывного отсчета используется водородный мазер, а для его калибровки — цезиевый, обеспечивает стабильность отсчета времени 10^{-11} с за сутки ($\Delta t/t \sim \sim 10^{-16}$).

Стандарты частоты необходимы для различных измерений, требующих прецизионного отсчета времени. Один такой пример — синхронизация записи сигналов в радиоинтерферометрах — мы уже приводили в § 130. Другим примером являются эксперименты по проверке специальной теории относительности, ставшие доступными при скоростях современных самолетов и ракет благодаря молекулярным генераторам (задача 2).

Задача 2. Два самолета облетают с одинаковой скоростью v земной шар вдоль экватора в противоположных направлениях. При какой точности измерения времени можно зарегистрировать релятивистский «эффект близнецов»? Разность собственных времен обоих самолетов

$$\Delta\tau = t \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} \right) \approx \frac{t}{2c^2} [(V+v)^2 - (V-v)^2] = 2t \frac{Vv}{c^2} = 2 \frac{LV}{c^2} \approx 0,5 \text{ (мкс)},$$

где t — время облета земного шара в инерциальной системе, связанной, например, с центром Земли, $V \approx 0,5$ км/с — скорость вращения Земли на поверхности экватора, $L \approx 40$ тыс. км — периметр Земли по экватору. При скорости самолета 1000 км/ч время облета составляет 40 ч и необходимая относительная точность равна $3 \cdot 10^{-12}$. Подобный эксперимент был осуществлен в 1972 г.

Другим распространенным типом мазеров являются твердотельные. В них в качестве активной среды применяется диэлектрик с примесью парамагнитных ионов (например, $Al_2O_3 \cdot 2$ + ионы Cr^{3+}), в которых и создается инверсная заселенность. В этих мазерах возможно некоторое изменение частоты с помощью внешнего магнитного поля. Используемый механизм накачки СВЧ-излучением требует охлаждения активного вещества до очень низких (гелиевых) температур.

Твердотельные мазеры получили наиболее широкое применение в качестве усилителей в антенных приемниках СВЧ-диапазона. Обычно они устанавливаются в фокусе антенного зеркала, а усиленный сигнал передается по волноводу или коаксиальному кабелю в регистрирующее устройство. Такие усилители — обязательный элемент для устройств дальней (особенно космической) связи, радиоинтерферометров, радиолокаторов с большой дальностью действия и высоким пространственно-временным разрешением.

§ 144. ЛАЗЕРЫ

Квантовые генераторы оптического диапазона называются лазерами. Существует огромное число различных типов лазеров, наиболее распространенные из которых приведены в табл. 4 вместе с их основными характеристиками.

Во всех лазерах используются так называемые открытые резонаторы в виде двух плоскопараллельных или вогнутых сферических зеркал (рис. XXIV.4). Продольные моды резонатора удовлетворяют обычному условию $k_z = q\pi$, где $q \neq 0$ — любое целое, в лазерах $q \gg 1$. Как правило, в пределах ширины линии спонтанного излучения уместается большое число мод (см. рис. XXIV.1), из-

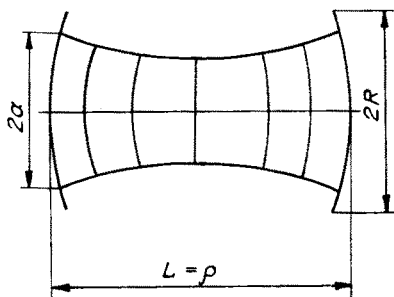


Рис. XXIV.4. Схема конфокально-го открытого резонатора. Показаны характерный размер поля и волновые поверхности.

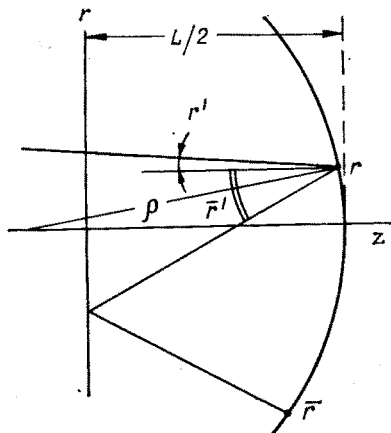


Рис. XXIV.5. Ход лучей в открытом резонаторе.

Активная среда	Способ возбуждения	Длина волны, мкм	Режим работы	Максимальная мощность, Вт	Максимальная энергия за импульс, Дж
<i>Газовые лазеры</i>					
He — Ne CO ₂	Электрический разряд То же	0,63; 4,45; 3,39 10,6	Непрерывный Непрерывный	10 ⁻³ —10 ⁻¹ 1—10 ⁶	— —
	Химический	2,6—3,5	Непрерывный Непрерывный	1—10 ² 10 ⁴	— —
Ar ⁺ (экимерные лазеры)					
<i>Лазеры на ионных кристаллах и стеклах</i>					
Рубин (Al ₂ O ₃ + Cr ³⁺) Неодим (CaWO ₄ + Nd ³⁺)	Оптический (ламповая накачка) То же	0,694 4,06	Непрерывный Импульсный	1 10 ¹⁰	— 20
<i>Жидкостные лазеры</i>					
Неорганические жидкости Органические красители	Оптический (ламповая и лазерная накачка) Оптический (лазерная накачка)	0,22—0,86 0,3—1,26 0,4—0,96	Импульсный Импульсный	10 ⁴ —10 ⁶ 10 ⁷	10 ⁻³ —10 10 ⁻² —10 ⁻¹
<i>Полупроводниковые лазеры</i>					
AlGaAs CdS	Электронный пучок или электрический ток То же	0,7—0,9 0,49—0,69	Непрерывный Импульсный	0,1—1 10—50	— 10 ⁻⁴ —10 ⁻³

за чего возникает важная и трудная техническая проблема их селекции (см. ниже).

В открытом резонаторе всегда имеются дополнительные потери из-за дифракции, которые можно оценить следующим образом. Рассмотрим вначале более простой случай резонатора с плоскопараллельными зеркалами радиуса R , заполненного активным веществом в цилиндрической области $a \leq R$. Поскольку из-за дифракции излучение распределено в угле $\theta_D \sim \lambda/a$, то оно полностью выйдет из резонатора за N пролетов, где

$$N \sim \frac{R}{\theta_D L} \sim \frac{Ra}{\lambda L} \gg 1. \quad (144.1)$$

Отсюда дифракционная добротность такого резонатора

$$Q_D = \left| \frac{\omega W}{\dot{W}} \right| = \omega N \frac{L}{c} \sim \frac{Ra}{\lambda^2}. \quad (144.2)$$

Отметим, что от угла θ_D зависит также необходимая точность юстировки параллельности зеркал (типичное значение $\theta_D \sim 10^{-4}$). Эта техническая трудность устраняется в резонаторе со сферическими зеркалами (см. рис. XXIV.4). Кроме того, его добротность оказывается намного выше, что объясняется фокусирующим действием зеркал. Равновесный поперечный размер поля определяется конкуренцией дифракционного рассеяния и фокусировки. Угол отклонения луча к оси системы $\theta_\phi \sim r/\rho$, где r — расстояние от оси в точке отклонения, ρ — радиус кривизны зеркала (см. задачу 1). Полагая $r \sim a$ и приравнивая $\theta_\phi \sim \theta_D$, получим $a \sim \sqrt{\rho\lambda}$. Если $a \ll R$, то дифракционные потери пренебрежимо малы, поскольку, как показывают вычисления, интенсивность поля убывает при $r \gg a$ по закону

$$j(r) \sim j(0) \cdot e^{-r^2/\lambda\rho}. \quad (144.3)$$

Спад поля тем быстрее, чем меньше радиус кривизны зеркала ρ . Однако значение ρ ограничено снизу ($\rho > L/2$) условием устойчивости колебаний поля в резонаторе (задача 1). Обычно выбирают $\rho = L$, и такой резонатор называется *конфокальным*, поскольку фокусы обоих зеркал совпадают и находятся в центре резонатора.

Задача 1. Найти условие устойчивости колебаний в открытом резонаторе со сферическими зеркалами в приближении геометрической оптики.

Достаточно рассмотреть половину резонатора, заменив второе зеркало плоским в центре резонатора. На рис. XXIV.5 показаны два последовательных отражения луча от зеркала, которые характеризуются координатами r, \bar{r} и углами наклона к оси резонатора r', \bar{r}' ($r' = dr/dz$). Из геометрии рисунка видно, что эти величины связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r - \bar{r}'L = r \left(1 - \frac{2L}{\rho}\right) - r'L; \\ \bar{r}' &= 2\frac{r}{\rho} + r'. \end{aligned} \quad (144.4)$$

Таким образом, матрица преобразования системы имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{\rho} - L & \\ \frac{2}{\rho} & 1 \end{pmatrix}. \quad (144.5)$$

Собственные векторы (r, r') этой матрицы определяются условиями

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r \left(1 - \frac{2L}{\rho} \right) - r' L = r; \\ \bar{r}' &= r \frac{2}{\rho} + r' = \Lambda r', \end{aligned} \quad (144.6)$$

где постоянные Λ — собственные значения матрицы M . Устойчивые колебания луча соответствуют комплексно-сопряженным Λ (поворот вектора (r, r')), а неустойчивые — действительным Λ . Из (144.6) получим уравнение для Λ в виде

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2L}{\rho} - \Lambda & -L \\ \frac{2}{\rho} & 1 - \Lambda \end{vmatrix} = \Lambda^2 - 2\Lambda \left(1 - \frac{L}{\rho} \right) + 1 = 0,$$

откуда

$$\Lambda = 1 - \frac{L}{\rho} \pm \sqrt{\frac{L}{\rho} \left(\frac{L}{\rho} - 2 \right)},$$

и условие устойчивости $\rho > L/2$.

Для селекции продольных мод в лазерах служат различные приемы. Мы ограничимся обсуждением одного из них, в котором применяется интерферометр Фабри — Перо (рис. XXIV.6). Длину интерферометра ФП выбирают так, чтобы он пропускал излучение основной частоты, а паразитные моды генерации лазера (в полосе $\Delta\omega_p$) не попадали в полосу пропускания интерферометра. В этом случае последний отразит обратно излучение на паразитных модах, которое погасится, пройдя дважды через четверть-волновую пластинку. Интерферометр должен быть также достаточно узкополосным: полоса пропускания $\Delta\omega_{\text{ФП}}$ в главном максимуме (см. § 105) должна быть уже расстояния между модами генерации лазера $\delta\omega_p$, т. е.

$$\Delta\omega_{\text{ФП}} = \frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}} \cdot \frac{c}{L_{\text{ФП}}} < \delta\omega_p = \frac{\pi c}{L}.$$

Для селекции поперечных мод обычно применяют метод диафрагмирования (см. рис. XXIV.6): в фокальной плоскости линз 5

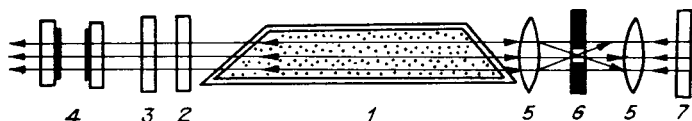


Рис. XXIV.6. Схема селекции мод.

1 — активное вещество; 2, 7 — зеркала лазера; 3 — четвертьволновая пластинка; 4 — интерферометр Фабри — Перо; 5, 6 — линзы и диафрагма селектора поперечных мод.

устанавливается диафрагма с отверстием порядка $\lambda F/a$, пропускающим основную моду резонатора и «срезающим» остальные поперечные моды.

Для выделения определенной линейной поляризации излучения торцевые поверхности активной среды располагают под углом Брюстера (см. § 73).

Выделение одномодового режима — одно из необходимых требований при использовании лазеров в качестве источников когерентного излучения. Существуют, к сожалению, и другие причины ухода частоты генерации: механические и температурные колебания длины резонатора, температурные колебания плотности активной среды и т. п. Поэтому приходится вводить стабилизацию частоты лазерного излучения. Система этой стабилизации состоит из следующих основных элементов: источник опорного сигнала, устройство сравнения эталонной и стабилизируемой величин, система обратной связи, передающая результат этого сравнения («сигнал ошибки») в устройство, «отрабатывающее» сигнал ошибки, т. е. изменяющее один из параметров системы так, чтобы сигнал ошибки уменьшился до минимального значения («шума»). В одной из принятых схем стабилизации частоты лазера в качестве эталона используется вещество, обладающее избирательным (по частоте) поглощением, так что максимум поглощения лежит на заданной частоте генерации ω_r . Если частота ω_r медленно «плавает» вблизи максимума линии поглощения, интенсивность излучения лазера будет промодулирована на частоте этих отклонений. Выделенный системой регистрации низкочастотный сигнал и является сигналом ошибки — через цепь обратной связи он управляет интерферометром и соответственно частотой лазера. Для этого одно из зеркал лазера укрепляют, например, на ферритовом стержне, поверх которого намотана катушка. Ток катушки, пропорциональный сигналу ошибки, изменяет длину стержня (явление магнестрикции — деформация ферромагнетика в магнитном поле), а с ней и размер резонатора. Таким способом удается получать высокую стабильность частоты лазерного излучения. Рекордный результат был достигнут группой Чеботаева (Новосибирск, 1983 г.): долговременная стабильность $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-13}$, кратковременная $\sim 10^{-15}$ (т. е. $\Delta\omega$ меньше 1 с^{-1}).

Лазер может работать и в импульсном режиме, например в режиме так называемого «гигантского импульса». В этом случае внутрь резонатора вносится управляющий элемент — оптический затвор, позволяющий резко повысить добротность резонатора и тем самым инициировать генерацию. В качестве затвора применяются ячейки Керра или Погкелса. Последняя позволяет модулировать интенсивность с частотами до 10^{13} Гц. Длительность гигантского импульса определяется временем развития лавины вынужденного излучения (см. (141.16)) и составляет $10^{-7} - 10^{-9}$ с при мощности до нескольких гига watt. Мощность излучения рубинового лазера в режиме гигантского импульса позволяет произвести в воздухе «све-

товой пробой» — так называют безэлектродный электрический разряд в электрическом поле световой волны, сфокусированной объективом. Напряженность поля достаточно велика для развития электронной лавины и вспышки «лазерной искры» (другое название эффе́кта).

Не менее интересный и важный режим импульсной генерации — так называемые сверхкороткие импульсы. Для получения этого режима внутрь резонатора помещают «пассивный затвор» — вещество, прозрачность которого резко увеличивается с ростом интенсивности излучения (эффект Вавилова, задача 2, § 141). Вследствие этого достаточно большая флуктуация спонтанного излучения активной среды вызывает преимущественное вынужденное излучение, что приводит к быстрому росту амплитуды этой флуктуации и сокращению ее длительности по времени. В многомодовом режиме минимальная длительность импульса $\tau_{\text{ск}} \sim 1/\Delta\omega_c$ определяется полной шириной линии спонтанного излучения и может достигать значения $\tau_{\text{ск}} \sim 10^{-11}$ с. Вследствие отражения спонтанно возникшего импульса от зеркал резонатора излучение лазера имеет вид последовательности импульсов с периодом $2L/c$. Мощность импульса может достигать величины порядка 10^{12} Вт. В соответствии с механизмом генерации сверхкоротких импульсов все продольные моды резонатора синхронизованы по фазе.

В заключение упомянем еще один вид источников когерентного излучения, получивший название «лазера на свободных электронах». Источником здесь являются пучки электронов, взаимодействующие с макроскопическими электромагнитными полями. Такую систему можно считать чисто классической (неквантовой).

Механизм когерентного излучения здесь связан с тем, что одна и та же электромагнитная волна взаимодействует с электронами пучка, скорость которых близка к ее фазовой скорости. Инверсная заселенность тогда соответствует такому распределению электронов по энергии $f(v^2)$, при котором $\partial f/\partial v^2 > 0$. В этом случае число быстрых электронов, отдающих энергию волне, превышает число более медленных электронов, отбирающих ее энергию, и волна усиливается. В термодинамическом равновесии $f(v^2) \propto \exp\{-mv^2/2T\}$ производная $\partial f/\partial v^2 < 0$ и волна затухает (так называемое затухание Ландау). Все эти процессы хорошо изучены в плазме. Еще раньше аналогичный механизм нашел применение в таких генераторах СВЧ излучения, как клистрон, лампа с бегущей волной и др.

Позднее этот принцип генерации был распространен на пучки релятивистских электронов, что позволяет получать излучение в широком диапазоне от СВЧ до рентгена. Именно эти генераторы и называют лазерами на свободных электронах (ЛСЭ). В одном из видов ЛСЭ используются магнитные змейки, механизм и характеристики излучения в которых рассмотрены в § 134. Единственное (важное) отличие состоит в том, что в ЛСЭ излучение является когерентным, поскольку все электроны взаимодействуют с одной и той же волной. ЛСЭ может работать как в режиме усилителя, когда такая волна впускается параллельно пучку электронов, так

и в режиме генератора (при наличии резонатора, например — зеркала), когда волна порождается некогерентным излучением.

Когерентное усиление (генерация) резко возрастает вследствие так называемой группировки электронов — модуляции пучка в поле волны по скорости и плотности.

§ 145. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЛАЗЕРОВ

Лазеры — прекрасный пример того, как крупные научные открытия могут порождать лавину научно-технических изобретений, охватывающих все (и в данном случае без исключения) области науки и техники.

Применения лазеров можно условно разделить на два вида. Первый — использование лазеров в качестве источников излучения высокой интенсивности, импульсного или непрерывного, которое может быть сфокусировано в пятно малого размера. В этом случае достигается высокая плотность мощности лазерного излучения на мишени, что делает возможными плавку и сварку металлов, резку и другую обработку различных материалов. Быстрый нагрев и обжиг лазерным излучением твердой дейтерий-тритиевой мишени рассматривается как один из возможных путей создания термоядерного реактора. Так, при мощности 100 ТВт (10^{14} Вт) в импульсе длительностью 35 нс (энергия 3,5 МДж в импульсе) вспышка излучения, сфокусированного на охлажденную до твердой фазы дейтерий-тритиевую мишень, нагреет ее до 100 млн. град (около 10 кэВ) и сожмет в 1000 раз по сравнению с исходной плотностью. К этому же виду относятся применение лазеров в медицине, где уже сегодня они заменяют скальпель в ряде операций микрохирургии, например в офтальмологии и даже в генной инженерии.

В применениях второго вида существенно используется монохроматичность, а в ряде случаев и пространственная когерентность лазерного излучения, в частности в различных интерферометрических схемах — для измерения расстояний, малых перемещений и скоростей тел.

Измеритель расстояний в принципе представляет собой двухлучевой интерферометр, одно из плеч которого и является измеряемым расстоянием. Регистрируется разность фаз «рабочей», т. е. отраженной объектом, и опорной волн и по ней определяется расстояние до объекта. Достигается относительная точность $\sim 10^{-6}$ для расстояний от метров до километров.

Измерение малых линейных скоростей основано на эффекте Доплера и выделении низкочастотного разностного сигнала при регистрации двух интерферирующих волн (гетеродинирование).

Примеры таких измерений приведены в § 75. Другим интересным приложением является лазерный гравиметр — прибор, измеряющий абсолютное значение ускорения свободного падения тела.

Для измерения угловых скоростей вращения служит лазерный

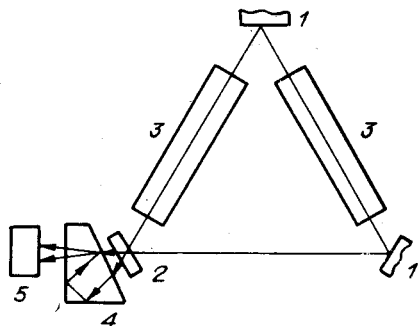


Рис. XXIV.7. Схема лазерного гироскопа.

1, 2 — непрозрачные и полупрозрачное зеркала; 3 — активная среда; 4 — призма сведения пучков; 5 — фотоприемник.

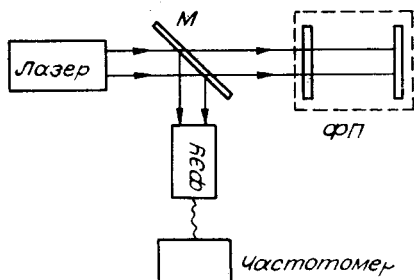


Рис. XXIV.8. Схема опыта Ивенсона.

М — полупрозрачное зеркало; ФП — интерферометр Фабри — Перо в вакууме с базой 30 м.

гироскоп — «кольцевой» лазер, один из его вариантов показан на рис. XXIV.7. В таком лазере возбуждаются две встречные световые волны, движущиеся по замкнутому пути. Специальное устройство позволяет сравнивать их частоты, разность которых зависит от скорости вращения лазера (по отношению к инерциальной системе отсчета). Работу этого устройства удобно рассмотреть на более простом примере лазера в виде тонкого кольца радиуса R . Тогда независимо от вращения кольца длина волны излучения в нем определяется условием $2\pi R = n\lambda$, n — целое, т. е. обе волны имеют одинаковую длину, а в инерциальной системе отсчета, где $\omega = c/\lambda$, и одинаковую частоту. Однако если регистрирующее устройство вращается вместе с лазером, то частоты поступающих в него волн сдвинуты вследствие доплер-эффекта на величину

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{v}{c} = \pm \frac{\Omega_{\perp} R}{c}, \quad (145.1)$$

где Ω_{\perp} — компонента угловой скорости вращения, ортогональная плоскости лазера.

Если перейти во вращающуюся вместе с лазером (неинерциальную) систему отсчета, то условие $2\pi R = n\lambda$ по-прежнему сохраняется для обеих волн в первом порядке по $v/c \ll 1$. Поскольку частоты волн, согласно (145.1), оказываются разными, то это означает, что скорость распространения света изменяется в неинерциальной системе и в данном случае равна $c \pm \Omega_{\perp} R$.

Чувствительность современных лазерных гироскопов вполне достаточна, чтобы измерять угловую скорость вращения Земли Ω_3 . На широте θ скорость вращения горизонтально расположенного гироскопа (и местности) есть $\Omega_3 \sin \theta$, и из (145.1) по известному значению $\Delta\omega$ можно найти широту местности. В этом и состоит одно из основных назначений лазерных гироскопов как навигационных и геодезических приборов. Современные лазерные гироскопы

Таблица 5.

Результаты измерений скорости света

Год	Авторы (страна)	Метод	Результат
1607	Галилей (Италия)	Метод прерываний — два наблюдателя с фонарями	«Скорость очень велика»
1676	Ремер (Франция)	Метод прерываний — затмение спутников Юпитера	225 000 км/с
1728	Брадлей (Англия)	Аберрация света звезд	308 000 км/с
1849	Физо (Франция)	Метод прерываний — зубчатое колесо	315 000 км/с
1857	Вебер и Кольрауш (Германия)	Отношение электро-статической и магнитной единиц	310 800 км/с
1862	Фуко (Франция)	Метод прерываний — вращающееся зеркало	298 000 ± 500 км/с
1880	Столетов (Россия)	—	299 000 ± 1000 км/с
1898	Фабри и Перо (Франция)	—	299 870 км/с
1926	Майкельсон (США)	Усовершенствованный метод Фуко	299 796 ± 4 км/с
1941	Андерсон и Хюттель	Метод прерываний — ячейка Керра	299 793,1 ± 0,25 км/с
1958	Фрум (Англия)	$c = \lambda v$, СВЧ-интерферометрия ($\lambda = 4$ мм)	299 792,5 ± 0,1 км/с
1967	Симкин, Лукин, Сякора, Стрелин (СССР)	То же ($\lambda = 8$ мм)	299 792,56 ± 0,11 км/с
1972	Ивенсон (США)	$c = \lambda v$, CH_4 -лазер	299 792,458 ± 0,2 м/с

Международный стандарт (1973 г.): $c = 299\,792,458 \pm 1,2$ м/с.

позволяют регистрировать разностную частоту с точностью лучше 10 Гц, что и определяет их точность и чувствительность.

В заключение упомянем некоторые интерференционные измерения скорости света в вакууме — одной из фундаментальных постоянных физики. В табл. 5 приведены в хронологическом порядке наиболее известные и важные эксперименты по измерению c . Кратко опишем лишь последний из них. В экспериментах Ивенсона (рис. XXIV.8) лазер работал в режиме генерации двух близких мод. Излучение регистрировалось ФЭУ, на выходе которого возникали биения с разностной частотой $\Delta\nu \approx 5 \cdot 10^{-7} \nu = 250$ МГц. Эта частота регистрировалась измерителем частоты. Разность длин волн мод измерялась 30-метровым интерферометром Фабри — Перо, помещенным в вакуум. Абсолютные значения $\Delta\nu$ калибровались по цезиевому стандарту частоты, а абсолютные значения длин волн — по криптоновому эталону длины. Скорость света определялась по формуле $c = \Delta\nu \cdot \lambda_1 \lambda_2 / |\lambda_2 - \lambda_1|$.

Высокая точность, с которой сейчас известно абсолютное значение c , имеет большое практическое значение для абсолютных измерений расстояний в различных приложениях (локация, геодезия, навигация, в том числе космическая).

1. *Iskoldsky A. M., Kruglyakov E. P., Malinovsky V. K. e. a.* // Proc. 8-th Intern. Congr. High Speed Photography, Stockholm 1968.— New York — London — Sidney: Willey & Son Inc., 1968.— P. 370—373.
2. *Королев А. Н.* // Успехи физ. наук.— 1968.— Т. 96.— № 2.— С. 269—273.
3. *Градштейн И., Рыжик И.* Таблицы интегралов, сумм рядов, произведений.— М.— Л.: Физматгиз, 1962.
4. *Василов С. И.* О возможных причинах синего γ -свечения жидкостей // Успехи физ. наук.— 1967.— Т. 93.— № 2.— С. 383—385. *Черенков П. А.* Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ -радиации // Там же.— С. 385—388. *Тамм И. Е., Франк И. М.* Когерентное излучение быстрого электрона в среде // Там же.— С. 388—393.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
6. *Карлов Н. В.* Лекции по квантовой электронике.— М.: Наука, 1983.
7. *Pohl D. W., Denk W., Lanz M.* // Appl. Phys. Lett.— 1984.— V. 44.— N 7.— P. 651—653.

- Аббе — Портера опыт 82
 Аберрация сферическая 153, 154, 156
 Аберрация хроматическая 71
 Активная среда 231
 Антенна акустического типа 159
 — антифединговая 148
 — волновой канал (директорная) 144
 — нагруженный вибратор 146, 148
 — оптического типа 152
 — петлевой вибратор 144
 — полуволновой вибратор 142
 — рамочная (магнитная) 151
 — рупорная 159
 — с бегущей волной 150
 — с верхним питанием 148
 — точечный диполь 141
 — штыревая 146
 — щелевая 160
 — фазированная решетка 170
 Апертурный синтез 172

 Бабине теорема 51
 «Близнецов эффект» 240
 Брэгга — Вульфа условие 217, 223

 Вектор энергии-импульса электромагнитного поля 110
 Видимость интерференционной картины 24, 25, 27, 29, 30, 166
 Волновая зона 124
 Вульфа — Брэгга условие 217, 223

 Главные плоскости линзы 16
 Гигантский импульс лазера 245
 Глубина резкости объектива 14
 Голограмма 78
 Голограммы восстановление 79, 81, 85, 87, 89, 90
 — разрешение 92, 93
 — уравнение 79, 85, 86, 89
 Голография в радиодиапазоне 176
 Голография акустическая 100

 Давление света 111, 112
 Дипольное приближение 125
 Дихроизм 211
 Длина формирования излучения 139, 194, 198
 Добротность открытого резонатора 243
 Дополнительные экраны 51
 Дублет тонких линз 19

 Закон сохранения импульса частиц и поля 113
 «Змейка» — генератор синхротронного излучения 198, 199
 Зонная пластинка 50, 51
 Зоны Френеля 49, 50

 Ивенсона эксперимент 249
 Импульс электромагнитного поля 110, 113
 Инварианты электромагнитного поля 105
 Интенсивность электромагнитной волны 23
 Интерферометр Майкельсона 33
 — Рэля 32
 — Рождественского — Маха — Цандера 37
 Интерферометрия голографическая 98
 Инфракрасная катастрофа 191
 Искра лазерная 246

- Калибровка Лоренца 102
 Квадрупольное излучение 129
 Квантового генератора мощность излучения 234, 235
 — — плотность потока излучения 238
 — — спектр излучения 236
 — — ширина линии излучения 237
 Классический радиус частицы 137, 183, 208
 Когерентность двух источников 23
 Кома 156

 Лагранжа — Гельмгольца — Смита инвариант 20
 Лазер газовый и другие 242
 — на свободных электронах 246
 Лазерный гироскоп 248
 Лебедева опыты 141, 142
 Линза тонкая аксиальная 11
 — цилиндрическая 15
 Локализация интерференционной картины 35
 Луча уравнение 7

 Магнитодипольное излучение 129
 Мазер 167, 238
 Мазер аммиачный 238
 — водородный 240
 — твердотельный 241
 — цезиевый 240
 Матрица преобразования для тонкой линзы 12, 13
 — — для толстой линзы 15
 Микроскоп голографический 98
 — Цернике 95
 Микроскопа разрешение 64
 Мод лазера селекция 244
 Монополь магнитный (Дирака) 106

 Насыщения эффект 232

 Одночастотный режим лазера 245
 Оператор Д'Аламбера 102
 Оптическая сила линзы 13

 Параксиальное приближение 10
 Планка постоянная 65
 Плотность импульса электромагнитного поля 109

 Поворот волны 6
 Покрытия Луной метод 173
 Полосы равного наклона 36
 — равной толщины 34
 Порядок интерференции 26
 Потенциала 4-вектор 102
 Почернения кривая 79
 Преломления электромагнитной волны закон 8
 Преобразования Лоренца для электромагнитного поля 103
 Призма 62
 Призмный спектрограф 70

 Радиолография 176
 Радиоинтерферометр аддитивный 163
 — двумерная решетка 170
 — интенсивностей (Брауна — Твисса) 168
 — линейная решетка 169
 Радиолокатор бокового обзора 173
 корреляционный 169
 Радиолокация планет 174
 Разрешение спектральное 69
 — — дифракционной решетки 69
 — — интерферометра Фабри — Перо 75
 — — призмного спектрографа 70
 — — схемы Юнга 31, 75
 — — эшелона Майкельсона 76
 Рассеяние электромагнитного излучения интерференционное 216
 — — — когерентное 216
 — — — комбинационное 214
 — — — некогерентное 216
 — — — резонансное 213
 — — — релеевское 213
 Резонатор конфокальный 243

 Свободной дисперсии спектрометра область 76
 Сопротивление излучения 141
 Сортировки метод 238
 Спектрограф призмный 70

 Телескоп оптический 154
 — двухзеркальный 157
 Тензор натяжений Максвелла 108
 — электромагнитного поля 102
 — — — дуальный 104

Температуры электронного газа измерение 220

Торможение заряженной частицы в магнитном поле 186

Увеличение линзы 13

Узловые точки линзы 17

Уширение линии излучения 229

Фильтр интерференционный 74

Фокальная плоскость 13

Фокус сферической границы 10

Фокусировка электромагнитной волны 9

Фраунгофера дифракция 42, 47

Частоты стандарт 240

Эйконал 5

Эшелет 59

Эшелон Майкельсона 60

Игорь Николаевич Мешков
Борис Валерианович Чириков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ
ПОЛЕ

Часть 2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ОПТИКА

Утверждено к печати
Институтом ядерной физики СО АН СССР

Редакторы издательства Л. А. Боярский, Т. Д. Семченко
Художественный редактор Т. Ф. Каминина
Художник А. И. Смирнов
Технический редактор Г. Я. Герасимчук
Корректоры Т. Ф. Погиблова, Т. В. Куркчианц

ИБ № 30197

Сдано в набор 30.09.86. Подписано в печать 07.04.87. МП-02623. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага книжно-журнальная. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 16. Усл. кр.-отт. 16. Уч.-изд. л. 17,4. Тираж 3350 экз. Заказ № 383. Цена 3 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

Книги можно предварительно заказать в магазинах Центральной конторы «Академкнига», в местных магазинах книготоргов или потребительской кооперации.

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресам: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

- 480091 Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»)
370005 Баку, ул. Коммунистическая, 51 («Книга — почтой»)
232600 Вильнюс, ул. Университето, 4
690088 Владивосток, Океанский проспект, 140 («Книга — почтой»)
320093 Днепропетровск, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»)
734001 Душанбе, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»)
375002 Ереван, ул. Туманяна, 31
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»)
420043 Казань, ул. Достоевского, 53 («Книга — почтой»)
252030 Киев, ул. Ленина, 42
252142 Киев, проспект Вернадского, 79
252030 Киев, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»)
252030 Киев, ул. Пирогова, 2
277012 Кишинев, проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»)
343900 Краматорск Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»)
660049 Красноярск, проспект Мира, 84
443002 Куйбышев, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»)
191104 Ленинград, Литейный проспект, 57
199164 Ленинград, Таможенный пер., 2
196034 Ленинград, В/О, 9 линия, 16
220012 Минск, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»)
103009 Москва, ул. Горького, 19-а
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7
630076 Новосибирск, Красный проспект, 51
630090 Новосибирск, Морской проспект, 22 («Книга — почтой»)

- 142284 Протвино Московской обл., ул. Победы, 8
142292 Пущино Московской обл., МР, «В», 1
620161 Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»)
700000 Ташкент, ул. Ю. Фучика, 1
700029 Ташкент, ул. Ленина, 73
700070 Ташкент, ул. Ш. Руставели, 43
700185 Ташкент, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»)
634050 Томск, наб. реки Ушайки, 18
634050 Томск, Академический проспект, 5
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»)
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49
720000 Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»)
310078 Харьков, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»)