

ФИЗИКА В НГУ

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ
И ОЛИМПИАДНЫЕ ВАРИАНТЫ
ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

2012–2017 гг.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра общей физики

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
2012–2017 гг.**

Учебное пособие

Новосибирск
2017

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

Э 360

Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2012–2017 гг.: Учебное пособие/ В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Сеницкий и др. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2017. 291 с.

В учебном пособии содержатся задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на письменных курсовых контрольных и экзаменационных работах в 2012–2017 гг.

Предназначено для студентов-физиков и информатиков НГУ, а также преподавателей, ведущих семинарские занятия. Задачник соответствует годовому курсу электродинамики.

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

- © Новосибирский государственный университет, 2016
© В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Сеницкий,
А. В. Богомяков, Л. С. Брагинский, В. А. Володин,
Е. Ю. Жданов, А. В. Зайцев, М. И. Захаров,
В. И. Иванов, П. В. Калинин, М. С. Котельникова,
Д. А. Максимов, П. Л. Новиков, Д. А. Похабов,
А. А. Симонов, В. Д. Степанов, Б. И. Хазин,
В. С. Черкасский, О. А. Шушаков
2017

Оглавление

Предисловие	7
Условия задач	8
2012/2013 учебный год	8
Контрольная работа 1.1, вар. 1	8
Контрольная работа 1.1, вар. 2	9
Контрольная работа 1.2, вар. 1	10
Контрольная работа 1.2, вар. 2	11
Экзаменационная работа 1	12
Контрольная работа 2.1, вар. 1	14
Контрольная работа 2.1, вар. 2	15
Контрольная работа 2.2, вар. 1	16
Контрольная работа 2.2, вар. 2	18
Экзаменационная работа 2	19
2013/2014 учебный год	21
Контрольная работа 1.1, вар. 1	21
Контрольная работа 1.1, вар. 2	23
Контрольная работа 1.2, вар. 1	24
Контрольная работа 1.2, вар. 2	25
Экзаменационная работа 1	26
Контрольная работа 2.1, вар. 1	27
Контрольная работа 2.1, вар. 2	29
Контрольная работа 2.2, вар. 1	30
Контрольная работа 2.2, вар. 2	31
Экзаменационная работа 2	32
2014/2015 учебный год	34
Контрольная работа 1.1, вар. 1	34
Контрольная работа 1.1, вар. 2	35

Контрольная работа 1.2, вар. 1	36
Контрольная работа 1.2, вар. 2	37
Экзаменационная работа 1	38
Контрольная работа 2.1, вар. 1	40
Контрольная работа 2.1, вар. 2	41
Контрольная работа 2.2, вар. 1	42
Контрольная работа 2.2, вар. 2	43
Экзаменационная работа 2	44
2015/2016 учебный год	46
Контрольная работа 1.1, вар. 1	46
Контрольная работа 1.1, вар. 2	47
Контрольная работа 1.2, вар. 1	48
Контрольная работа 1.2, вар. 2	49
Экзаменационная работа 1	50
Контрольная работа 2.1, вар. 1	52
Контрольная работа 2.1, вар. 2	53
Контрольная работа 2.2, вар. 1	54
Контрольная работа 2.2, вар. 2	55
Экзаменационная работа 2	56
2016/2017 учебный год	58
Контрольная работа 1.1, вар. 1	58
Контрольная работа 1.1, вар. 2	59
Контрольная работа 1.2, вар. 1	60
Контрольная работа 1.2, вар. 2	61
Экзаменационная работа 1	62
Контрольная работа 2.1, вар. 1	64
Контрольная работа 2.1, вар. 2	65
Контрольная работа 2.2, вар. 1	66
Контрольная работа 2.2, вар. 2	67
Экзаменационная работа 2	69

Решения	71
2012/2013 учебный год	71
Контрольная работа 1.1, вар. 1	71
Контрольная работа 1.1, вар. 2	75
Контрольная работа 1.2, вар. 1	79
Контрольная работа 1.2, вар. 2	83
Экзаменационная работа 1	88
Контрольная работа 2.1, вар. 1	95
Контрольная работа 2.1, вар. 2	101
Контрольная работа 2.2, вар. 1	106
Контрольная работа 2.2, вар. 2	115
Экзаменационная работа 2	123
2013/2014 учебный год	131
Контрольная работа 1.1, вар. 1	131
Контрольная работа 1.1, вар. 2	136
Контрольная работа 1.2, вар. 1	138
Контрольная работа 1.2, вар. 2	141
Экзаменационная работа 1	144
Контрольная работа 2.1, вар. 1	151
Контрольная работа 2.1, вар. 2	155
Контрольная работа 2.2, вар. 1	159
Контрольная работа 2.2, вар. 2	162
Экзаменационная работа 2	164
2014/2015 учебный год	171
Контрольная работа 1.1, вар. 1	171
Контрольная работа 1.1, вар. 2	174
Контрольная работа 1.2, вар. 1	178
Контрольная работа 1.2, вар. 2	181
Экзаменационная работа 1	182
Контрольная работа 2.1, вар. 1	188
Контрольная работа 2.1, вар. 2	191
Контрольная работа 2.2, вар. 1	194

Контрольная работа 2.2, вар. 2	198
Экзаменационная работа 2	203
2015/2016 учебный год	209
Контрольная работа 1.1, вар. 1	209
Контрольная работа 1.1, вар. 2	213
Контрольная работа 1.2, вар. 1	216
Контрольная работа 1.2, вар. 2	219
Экзаменационная работа 1	221
Контрольная работа 2.1, вар. 1	232
Контрольная работа 2.1, вар. 2	235
Контрольная работа 2.2, вар. 1	237
Контрольная работа 2.2, вар. 2	241
Экзаменационная работа 2	243
2016/2017 учебный год	249
Контрольная работа 1.1, вар. 1	249
Контрольная работа 1.1, вар. 2	254
Контрольная работа 1.2, вар. 1	258
Контрольная работа 1.2, вар. 2	260
Экзаменационная работа 1	263
Контрольная работа 2.1, вар. 1	272
Контрольная работа 2.1, вар. 2	274
Контрольная работа 2.2, вар. 1	277
Контрольная работа 2.2, вар. 2	281
Экзаменационная работа 2	284
Список литературы	291

Предисловие

Потребность в данном издании возникла в связи с введением на физическом факультете НГУ письменного экзамена, ставшего позднее и теоретическим туром студенческой олимпиады. Задачи для вариантов отбирались всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6–7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 1–2 балла, очень трудные – 6–7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

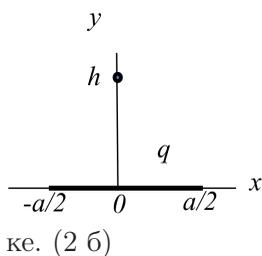
При решении разрешено пользоваться любой литературой, поскольку задачи, как правило, оригинальные, не встречающиеся в других задачниках, некоторые из них явно олимпиадного содержания.

При оценивании решения предусмотрена оценка-автомат “отлично”. Дело в том, что при сдаче устного экзамена учитываются результаты письменного. Получивший на письменном экзамене оценку-автомат “отлично” освобождается от устного экзамена, и ему выставляется итоговая оценка “отлично” в том случае, если студент написал работу на ступень выше “пятерки”. При этом обязательным условием является получение оценки “отлично” за работу в семестре. Студенты, набравшие наибольшее количество баллов, становятся призерами олимпиады. Их работы отмечаются деканатом физического факультета.

Условия задач

2012/2013 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

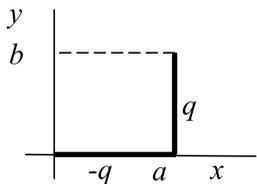


Задача 1

Найти электрическое поле в точке с координатами $x = 0$, $y = h$, создаваемое зарядом q , равномерно распределенным на стержне длины a , изображенном на рисунке. (2 б)

Задача 2

В шаре радиуса R заряд распределен так, что электрическое поле внутри шара $\mathbf{E} = E_0 \frac{r}{R} \mathbf{e}_r$ (имеет только радиальную компоненту). Поверхностных зарядов на сфере $r = R$ нет. Вне шара зарядов нет. Найти электрическое поле вне шара. (2 б)



Задача 3

Равномерно заряженные прямые стержни с зарядами q и $-q$ расположены в плоскости (x, y) , как показано на рисунке. Длины стержней равны a и b (смотри рисунок).

Найти первый неисчезающий член потенциала $\varphi(x, y, z)$ на больших расстояниях $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a, b$. (3 б)

Задача 4

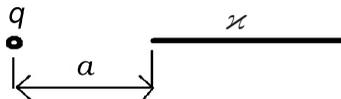
Сфера радиуса R заполнена диэлектриком проницаемостью ϵ . Потенциал на поверхности сферы задан: $\varphi(R, \theta) = \varphi_0 \sin^2(\theta/2)$. Зарядов внутри и вне сферы нет (заряды создающие потенциал расположены только на поверхности сферы). Найти потенциал и

электрическое поле во всем пространстве, а также поверхностную плотность связанного заряда на границе диэлектрика. (6 б)

Контрольная работа 1.1, вариант 2

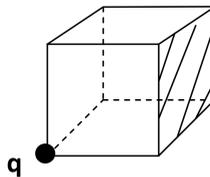
Задача 1

Найти силу, с которой точечный заряд q действует на полубесконечную проволочку, равномерно заряженную с линейной плотностью заряда κ . Заряд расположен на расстоянии a от конца проволочки на линии, которая является ее продолжением (как показано на рисунке). (2 б)



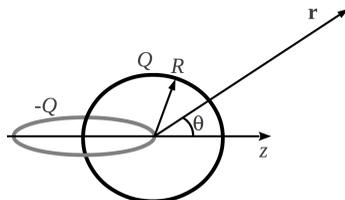
Задача 2

Заряд q расположен в вершине куба, как показано на рисунке. Найти поток вектора напряженности электрического поля через заштрихованную грань куба. (2 б)



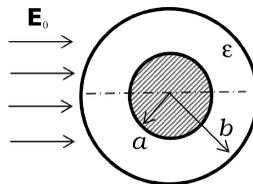
Задача 3

Два кольца одинакового радиуса R расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях так, что обод одного кольца проходит через центр другого (см. рисунок). Кольца заряжены однородно по длине равными по величине, но противоположными по знаку зарядами $+Q$ и $-Q$. Найти первый исчезающий член потенциала $\varphi(r, \theta)$ на больших расстояниях $r \gg R$. Угол θ отсчитывать от линии, соединяющей центры колец. (3 б)



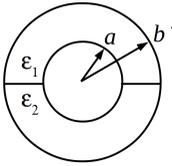
Задача 4

Незаряженный диэлектрический шар радиуса b , содержащий внутри себя проводящий шар радиуса $a < b$, находится в однородном внешнем электрическом поле \mathbf{E}_0 .



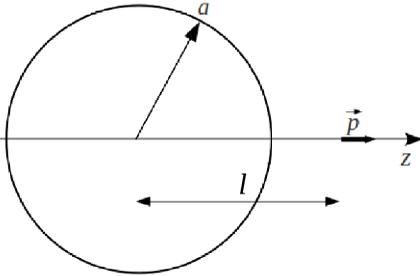
Найти распределение потенциала во внешнем пространстве $r > b$, в диэлектрическом слое $a < r < b$ и в металлическом шаре. (6 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 1

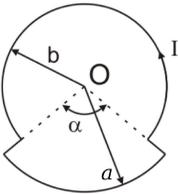


рисунке. (2 б)

Найти емкость сферического конденсатора, радиусы внутренней и внешней обкладок a и b . Конденсатор заполнен диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , как показано на



На расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиуса a ($a < l$) расположен точечный диполь $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ (см. рис.). Найти силу \mathbf{F} действующую на диполь. К отталкиванию или притяжению приводит эта сила? (5 б)

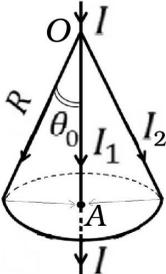


Задача 3

По витку, который представляет из себя две дуги окружностей с радиусами a и b , соединенных по радиусу (см. рис.) пустили ток I . Угловой размер дуг α и $2\pi - \alpha$ соответственно.

Найти магнитное поле в центре витка (в точке O). (2 б)

Задача 4



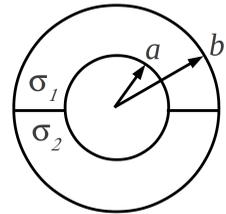
Ток I , текущий по прямому проводу, в точке O расщепляется на две части, а в точке A эти части соединяются вновь. Одна из частей (I_1) бежит по прямому проводу OA , вторая по конической “юбке” и замыкающей плоской крышке (точка A – центр

этой крышки). Найти магнитное поле, создаваемое этой системой, во всем пространстве. Распределение всех токов аксиально-симметричное. (3 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 2

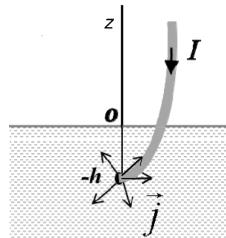
Задача 1

Найти сопротивление цилиндрического конденсатора. Радиусы внутренней и внешней обкладок a и b , длина $l \gg a, b$. Краевыми эффектами можно пренебречь. Конденсатор заполнен проводниками с проводимостями σ_1 и σ_2 , как показано на рисунке. (2 б)



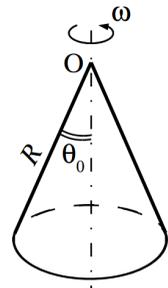
Задача 2

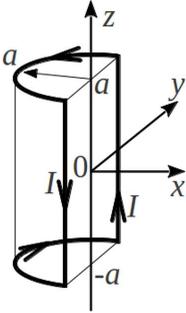
Оголенный конец изолированного провода оказался в морской воде (то есть проводящей среде) на глубине h от поверхности моря, как показано на рисунке. Проводимость верхнего полупространства (воздуха) считать равной нулю. Найти объемную плотность тока в воде вблизи поверхности, т.е. $\mathbf{j}(r)$ при $z = 0$, r – расстояние до оси z . (Подсказка - воспользуйтесь методом изображения). (4 б)



Задача 3

Однородно заряженная коническая поверхность без основания (заряд Q) вращается с частотой ω вокруг своей оси. Геометрические размеры показаны на рисунке. Найти магнитное поле $\mathbf{B}(0)$ у вершины конуса. (3 б)

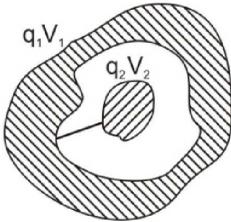




Задача 4

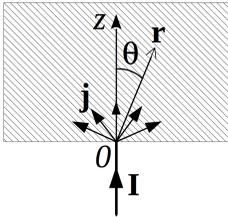
Замкнутый контур, по которому бежит ток I , образован двумя полукольцами радиуса a и двумя прямыми отрезками, как показано на рисунке. Центры полуколец расположены на оси z в точках $z = \pm a$. Найти создаваемое этим током магнитное поле в точке оси z с координатой $z = h \gg a$. (3 б)

Экзаменационная работа 1



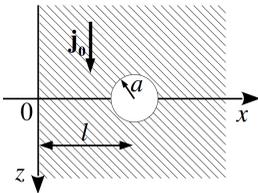
Задача 1

Два проводящих тела произвольной формы, одно из которых находится в полости другого, заряжены зарядами q_1 и q_2 , при этом их потенциалы равны V_1 и V_2 соответственно. Найти потенциал тел V после их соединения проводящим стержнем. (3 б)



Задача 2

Прямой полубесконечный провод с током I входит по нормали в проводящее полупространство $z > 0$, в котором $\sigma = \text{const}$, $\mu = 1$. Найти распределения потенциала $\varphi(r, \theta)$ и объемной плотности тока $\mathbf{j}(r, \theta)$ в данном полупространстве (2 б); магнитное поле \mathbf{B} во всем пространстве. (2 б)



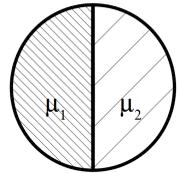
Задача 3

В проводящем полупространстве $x > 0$, на расстоянии l от его поверхности образовалась сферическая непроводящая полость радиуса a (см. рис.), полупространство $x < 0$ не проводящее. В проводнике протекает ток,

объемная плотность которого вдали от полости постоянна, направлена по оси z и равна j_0 . Считая полость малой $a \ll l$, найти плотность тока $j(z)$ на оси z с учетом первого ненулевого члена разложения по малому параметру a/l . (5 б)

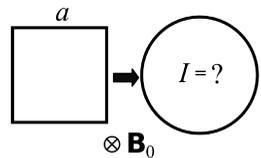
Задача 4

Бесконечный соленоид кругового сечения с током I в витке и числом витков на единицу длины n , заполнен составной намагничивающейся средой с магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 (на рисунке показано поперечное сечение соленооида). Найти поля $H_{1,2}, B_{1,2}$ внутри соленооида и распределение молекулярных токов. (3 б)



Задача 5

Квадратная сверхпроводящая тонкая рамка со стороной a находится во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 , направленном перпендикулярно ее поверхности. Рамке придали форму окружности. Определите величину тока, возникшего в рамке, если известно, что индуктивность кругового витка равна L , а начальный ток был равен нулю. (2 б)

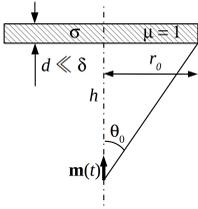


Задача 6

Непроводящее кольцо радиуса a однородно заряженное зарядом q вращается вокруг своей оси с равномерно возрастающей угловой скоростью $\omega = kt$. Найти магнитное поле в центре кольца и вихревое электрическое поле на малом расстоянии r от оси кольца ($r \ll a$) в плоскости кольца. (3 б)

Задача 7

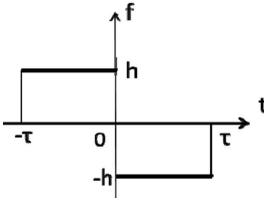
Над магнитным диполем $\mathbf{m}_0 e^{i\omega t}$ помещен тонкий проводящий круглый диск, расположение и размеры которого указаны на рисунке ($d \ll h$). Считая, что частота ω и проводимость материала



диска σ удовлетворяют сильному неравенству $\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \gg h \operatorname{tg} \theta_0$ (то есть скин-эффект слабый), определить интенсивность тепловыделения в диске. (5 б)

Контрольная работа 2.1, вариант 1

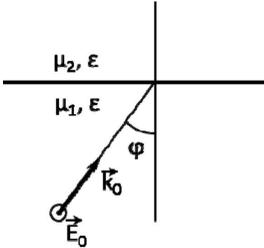
Задача 1



Для функции $f(t) = \begin{cases} h, & -\tau \leq t < 0 \\ -h, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases}$

представленной на рисунке, определить спектральную плотность $f(\omega)$ и ее модуль $|f(\omega)|$. (2 б)

Задача 2



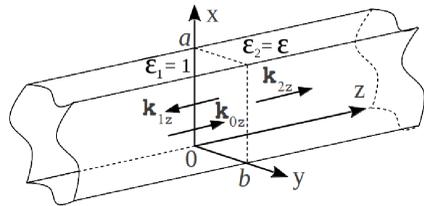
На плоскую границу раздела сред с вещественными магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 и диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ падает плоская монохроматическая ТЕ-волна, как показано на схеме. При каком значении угла падения ϕ отраженная волна отсутствует? (3 б)

Задача 3

Стоячая волна образована падающей и отраженной от идеально проводящей плоскости $z = 0$ волнами. Электрическое поле падающей волны $\mathbf{E}(z, t) = E_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) e^{i(-kz - \omega t)}$. Найти $z = z_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) - расстояния от идеально проводящей плоскости до плоскостей, в которых суммарные поля падающей и отраженной волн \mathbf{E} и \mathbf{B} в каждый момент времени равны по модулю и направлены в противоположные стороны. (3 б)

Задача 4

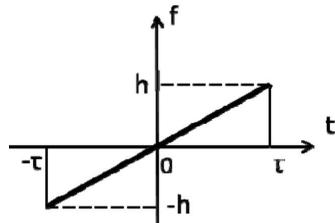
Волновод с идеально проводящими стенками прямоугольного сечения $a \times b$, при $z < 0$ пуст, при $z \geq 0$ заполнен диэлектриком с известным показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ (магнитная проницаемость $\mu=1$). В области $z < 0$ в направлении z по волноводу распространяется \mathbf{H}_{11} волна с известной амплитудой H_{z0} и частотой ω (большей, чем критическая частота). Найти все компоненты $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ падающей волны (1 б). Найти компоненты $\mathbf{H}_{\text{отр}}(x, y, z, t)$ отраженной волны и коэффициент отражения по амплитуде H (+еще 4 б).



Контрольная работа 2.1, вариант 2

Задача 1

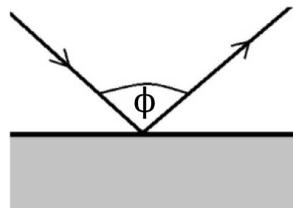
Для функции $f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau} \cdot t, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases}$



представленной на рисунке, определить спектральную плотность $f(\omega)$ и ее модуль $|f(\omega)|$. (2 б)

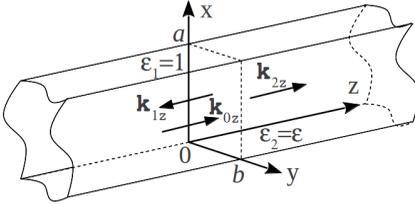
Задача 2

Пучок естественного (неполяризованного) света падает из жидкости на плоскую границу раздела жидкость/стекло (показатель преломления стекла равен $3/2$, магнитные проницаемости жидкости и стекла считать равными единице). Отраженный пучок света составляет угол ϕ с падающим пучком. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный свет поляризован линейно. (3 б)



Задача 3

Определить электрическое и магнитное поля, а также поляризацию и направление распространения волны, заданной с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (a\mathbf{e}_x + ib\mathbf{e}_y)e^{i(kz - \omega t)}$, $\varphi = 0$. (3 б)

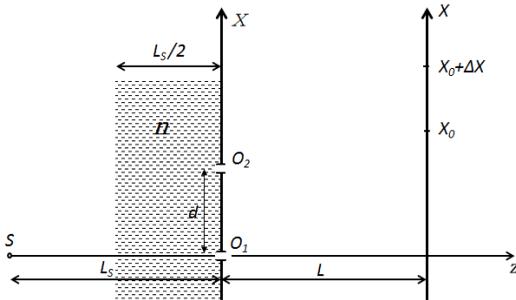


Задача 4

Волновод с идеально проводящими стенками прямоугольного сечения $a \times b$, при $z < 0$ пуст, при $z \geq 0$ заполнен ди-

электриком с известным показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ (магнитная проницаемость $\mu=1$). В области $z < 0$ в направлении z по волноводу распространяется \mathbf{E}_{11} волна с известной амплитудой E_{z0} и частотой ω (большей, чем критическая частота). Найти все компоненты $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ падающей волны (1 б). Найти компоненты $\mathbf{E}_{\text{отр}}(x, y, z, t)$ отраженной волны и коэффициент отражения по амплитуде E (+еще 4 б).

Контрольная работа 2.2, вариант 1



Задача 1

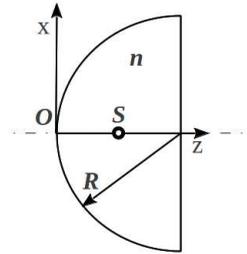
В схеме Юнга одинаковые узкие щели O_1 , O_2 и протяженный источник света S расположены, как показано на рисунке. Расстояния L_s , L велики по сравнению с d . Слой толщиной

$L_s/2$ перед экраном с отверстиями заполнен прозрачной средой с показателем преломления $n > 1$ (на рисунке обозначено штриховкой). Найти оптическую разность хода Δl_s от источника S до

O_2 , O_1 соответственно (2б). Источник излучает в полосе частот от ω_0 до $\omega_0 + \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$). Найти положение $X = X_0$ центра интерференционной картины, где видность полос $V = 1$, и оценить, на каком расстоянии ΔX от этой точки видность обращается в ноль (+2б).

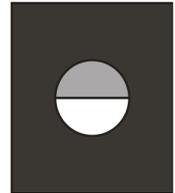
Задача 2

Внутри плосковыпуклой линзы радиуса R с показателем преломления $n = 2$ имеется дефект в виде маленького пузырька S . Расстояние $OS = R/2$ (см. рисунок). Найти положение изображения пузырька для наблюдателя, находящегося слева от линзы. (2 б) Чему равен коэффициент увеличения (2 б)?



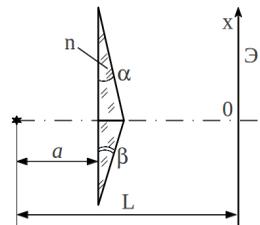
Задача 3

Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Размер отверстия для точки наблюдения, находящейся на оси, соответствует 1-й зоне Френеля. Какова будет интенсивность I в этой точке, когда половину отверстия по диаметру закроют бесконечно тонкой полупрозрачной (то есть пропускающей половину интенсивности) пленкой (3 б)?

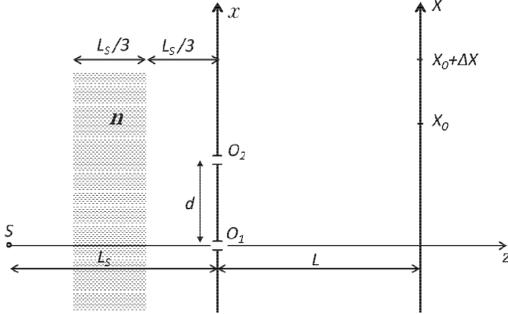


Задача 4

Бипризма Френеля с углами при вершинах $\alpha < \beta \ll 1$ и показателем преломления n освещается узким щелевым монохроматическим источником S с длиной волны λ . Расстояние от источника до бипризмы a , до экрана - L (см. рисунок). Определить положение x интерференционных полос максимальной интенсивности на экране для $x \ll a$. (4 б)



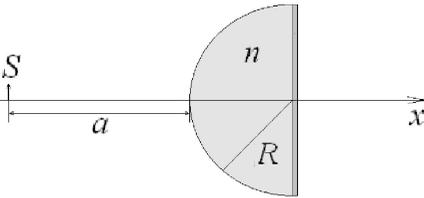
Контрольная работа 2.2, вариант 2



Задача 1

В схеме Юнга одинаковые узкие щели O_1 , O_2 и протяженный источник света S расположены, как показано на рисунке. Расстояния L_s , L велики по сравнению с d . Слой толщиной

$L_s/3$ перед экраном с отверстиями заполнен прозрачной средой с показателем преломления $n > 1$ (на рисунке обозначено штриховкой). Найти оптическую разность хода Δl_s от источника S до O_2 , O_1 соответственно (2б). Источник излучает в полосе частот от ω_0 до $\omega_0 + \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$). Найти положение $X = X_0$ центра интерференционной картины, где видность полос $V = 1$, и оценить, на каком расстоянии ΔX от этой точки видность обращается в ноль. (+2б).



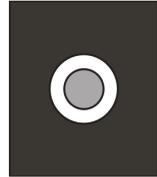
Задача 2

Источник света S находится на расстоянии $a = 6$ см от передней поверхности оптической системы, состоящей из стеклянного полушара радиусом $R = 4$ см и плоского зеркала в его основании. Показатель преломления стекла $n = 1.5$. Найти положение изображения (2 б) и увеличение (+2 б).

Задача 3

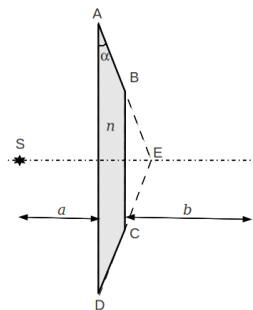
Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Раз-

мер отверстия для точки наблюдения, находящейся на оси, соответствует 2-й зоне Френеля. Какова будет интенсивность I в этой точке, когда в центр экрана поместят круглый диск из бесконечно тонкой полупрозрачной (то есть пропускающей половину интенсивности) пленки? Диск занимает 1-ю зону Френеля для точки наблюдения. (3 б)



Задача 4

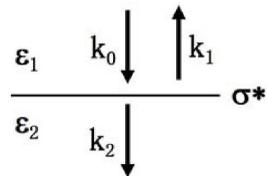
От призмы Френеля отсекали угол так, что ее поперечное сечение представляет собой равнобокую трапецию. Угол при основании трапеции $\alpha \ll 1$, а ее короткое основание BC является средней линией треугольника $\triangle AED$ (см. рис.). Показатель преломления материала призмы n . Призма освещается узким щелевым монохроматическим источником света с длиной волны λ , расположенным на расстоянии $a \gg AD$ от призмы. Определить интенсивность интерференционной картины, наблюдаемой на экране, расположенном на расстоянии b от призмы. (4 б)



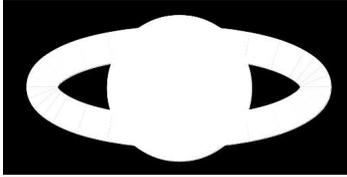
Экзаменационная работа 2

Задача 1

Плоская тонкая проводящая пластинка с удельной проводимостью σ^* ($\mathbf{i} = \sigma^* \mathbf{E}$, \mathbf{i} - ток на единицу длины) разделяет области с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Со стороны области 1 на пластинку по нормали падает плоская линейно поляризованная монохроматическая волна с амплитудой E_0 . Для случая $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ найти среднюю по времени поглощаемую в пластинке мощность w на единицу по-



верхности (1 б). При какой σ^* w максимальна (1 б)? Для случая $\epsilon_1 > \epsilon_2$ найти σ^* , при которой отраженная волна отсутствует. (2 б)

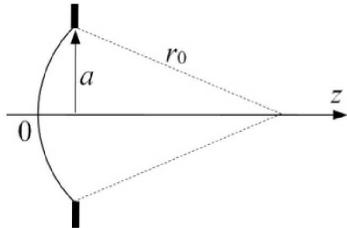


Задача 2

Известен исторический анекдот о том, что мать Галилея могла различать невооруженным глазом кольца Сатурна. Оценить минимальный диаметр d ее зрачка. Расстояние L между Землей и Сатурном 1 миллиард км, ширина w наиболее яркого кольца 20 тысяч км, что в период максимального раскрытия колец совпадает по угловому размеру с величиной темного внутреннего зазора (см. рисунок). Длину волны света считать равной 0.5 микрометра. (2 б)

Задача 3

Человеку вставили искусственный хрусталик с постоянной кривизной и оптической силой $D = 20$ диоптрий (оптическая сила – это величина, обратная фокусному расстоянию, выраженному в метрах, $D = 1/F$). Человек в результате стал “дальнозоркий”, т. е. видит резко предметы, находящиеся далеко. Найти оптическую силу очков, которые необходимо использовать для того, чтобы изображение на экране монитора, находящийся от глаз на расстоянии 40 см, было резким. Принять, что расстояние от линзы очков до хрусталика равно 1 см. (3 б)

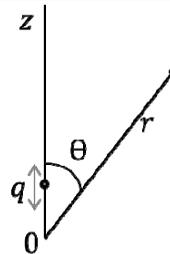


Задача 4

На круглое отверстие радиуса a падает монохроматическая сферическая волна, сходящаяся в точку на оси отверстия на расстоянии r_0 от его края. Интенсивность волны на сферической поверхности радиуса r_0 составляет I_0 . Найти интенсивность волны $I(z)$ на оси z в параксиальном приближении вблизи $z = r_0$. Исходя из результата, оценить “глубину” фокуса. (5 б)

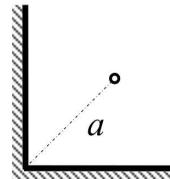
Задача 5

Точечный заряд q совершает нерелятивистское периодическое движение вдоль оси Z по закону $z = a \cdot \cos(\omega t)$. Найти векторный потенциал \mathbf{A} в дипольном приближении и соответствующий ему скалярный потенциал φ , совместно описывающие поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, создаваемые данным зарядом в пространстве при $r \gg a$. Функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ выразить в сферических координатах r и θ , привязанных к оси z (см. рисунок). (4 б)



Задача 6

Штыревая антенна находится на биссектрисе прямого двугранного угла, образованного двумя полубесконечными идеально проводящими плоскостями, на расстоянии a от вершины угла. Найти угловое распределение интенсивности $\frac{dI(\alpha)}{d\Omega}$ в плоскости, перпендикулярной штырю антенны и проводящим плоскостям (угол α отсчитывается от биссектрисы, в отсутствие стенок $\frac{dI}{d\Omega} = \text{const}$). При каком минимальном ненулевом расстоянии a будет наблюдаться максимум излучения в направлении биссектрисы? (5 б)

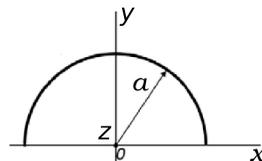


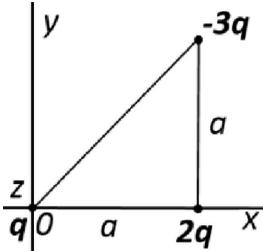
2013/2014 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Задача 1

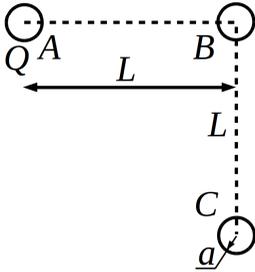
Полукольцо радиуса a , равномерно заряженное зарядом q , расположено в плоскости (x, y) , как показано на рисунке. Найти напряженность поля \mathbf{E} в точке с координатами $(0, 0, z_0)$. (2 б)





Задача 2

В плоскости $z = 0$, разделяющей два полупространства, заполненных диэлектриками с ϵ_1 ($z < 0$) и ϵ_2 ($z > 0$), расположены точечные заряды в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, как показано на рисунке. Найти дипольный член в разложении потенциала $\varphi_{1,2}(x, y, z)$ для обеих областей на расстояниях, много больших, чем a . (3 б)



Задача 3

Три одинаковых идеально проводящих шарика расположены в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , длина катета у которого $AB=BC=L$. Угол ABC прямой, радиусы шариков $a \ll L$. Вначале первому шарика, который находится в точке A , сообщили заряд Q . Затем этот шарик соединили идеальным проводником со вторым шариком, находящимся в точке B (в вершине прямого угла). После того, как заряд перераспределился между первым и вторым шариком, проводник, соединяющий эти шарики, убрали, а затем соединили проводником второй шарик и третий шарик, находящийся в точке C . Какие будут заряды на шариках после окончания переходных процессов (с точностью до членов a/L)? (3 б)

Задача 4

Найти энергию взаимодействия и силу, действующую на малое заряженное по объему тело с квадрупольным моментом Q_{ij} (полный заряд тела и его дипольный момент равны нулю) со стороны внешнего слабонеоднородного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. (5 б)

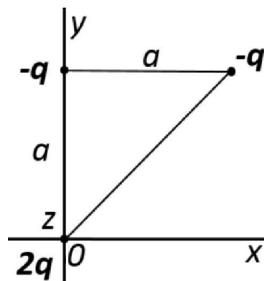
Контрольная работа 1.1, вариант 2

Задача 1

Заряд q равномерно распределен по боковой поверхности цилиндра радиуса a с высотой h . Найти потенциал в центре основания цилиндра. (2 б)

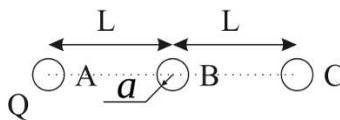
Задача 2

В плоскости $z = 0$, разделяющей два полупространства, заполненных диэлектриками с ϵ_1 ($z < 0$) и ϵ_2 ($z > 0$), расположены точечные заряды в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, как показано на рисунке. Найти дипольный член в разложении потенциала $\varphi_{1,2}(x, y, z)$ для обеих областей на расстояниях, много больших, чем a . (3 б)



Задача 3

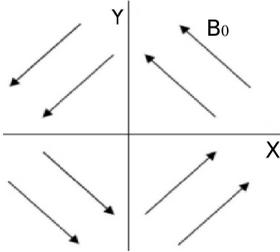
Три одинаковых идеально проводящих шарика расположены на прямой ABC в точках A и C . Расстояния $AB = BC = L$. Радиусы шариков $a \ll L$. Вначале первому шарiku, который находится в точке A , сообщили заряд Q . Затем этот шарик соединили идеальным проводником со вторым шариком, находящимся в точке B (в вершине прямого угла). После того, как заряд перераспределится между первым и вторым шариком, проводник, соединяющий эти шарики, убрали, а затем соединили проводником второй шарик и третий шарик, находящийся в точке C . Какие будут заряды на шариках после окончания переходных процессов (с точностью до членов a/L)? (3 б)



Задача 4

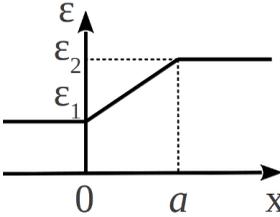
См. задачу 4 вар. 1 на стр. 22.

Контрольная работа 1.2, вариант 1



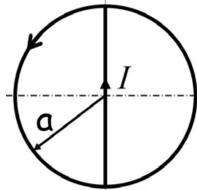
Задача 1

В пространстве, разделенном двумя перпендикулярными плоскостями на четыре части, создано магнитное поле, по модулю равное B_0 , направление указано на рисунке, угол между направлением поля и осями X и Y 45° . В каждой четверти пространства магнитное поле однородно. Определить систему токов, создающих данное магнитное поле. (2 б)



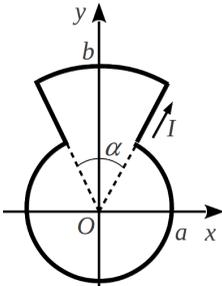
Задача 2

В среде с однородной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x)$, распределенной, как показано на рисунке, течет постоянный ток с плотностью $\mathbf{j} = j_0 \mathbf{e}_x$. Найти плотность свободных и связанных зарядов во всем пространстве. (4 б)



Задача 3

Тонкая однородно проводящая сфера соединена по диаметру прямым проводом с током I , как показано на рисунке. Сформулировать математическую постановку и построить решение для поля \mathbf{B} во всем пространстве. (3 б)



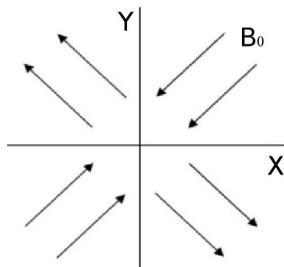
Задача 4

По замкнутому контуру, показанному на рисунке, течет постоянный ток I . Найти магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg b$ с точностью до членов $\sim \frac{1}{r^3}$. (5 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 2

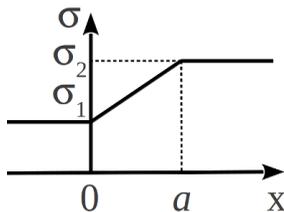
Задача 1

В пространстве, разделенном двумя перпендикулярными плоскостями на четыре части, создано магнитное поле, по модулю равное B_0 , направление указано на рисунке, угол между направлением поля и осями X и Y 45° . В каждой четверти пространства магнитное поле однородно. Определить систему токов, создающих данное магнитное поле. (2 б)



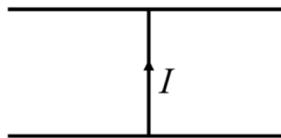
Задача 2

В среде с однородной диэлектрической проницаемостью ϵ и проводимостью $\sigma(x)$, распределенной, как показано на рисунке, течет постоянный ток с плотностью $\mathbf{j}_0 = j_0 \mathbf{e}_x$. Найти плотность свободных и связанных зарядов во всем пространстве. (4 б)



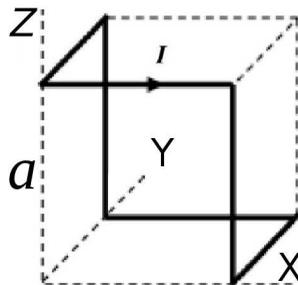
Задача 3

Две параллельные однородно проводящие плоскости соединены прямым проводом с током I , как показано на рисунке. Сформулировать математическую постановку и построить решение для поля \mathbf{V} во всем пространстве. (3 б)

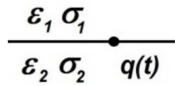


Задача 4

Тонкой проволоке придали форму, показанную на рисунке: проволока проходит вдоль ребер куба со стороной a . Затем соединили ее концы и пропустили по ней постоянный ток I . Найти магнитное поле, создаваемое этим током на большом расстоянии ($r \gg a$). (5 б)

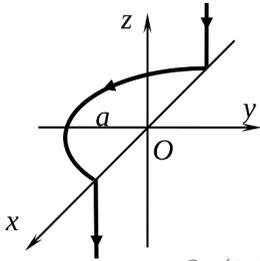


Экзаменационная работа 1



Задача 1

Точечный заряд q помещен на плоскую границу полупространств с диэлектрической проницаемостью ε_1 и ε_2 и проводимостью σ_1 и σ_2 соответственно. Пренебрегая влиянием магнитного поля, найти зависимость заряда от времени $q(t)$, если $q(0) = q_0$. (3 б)

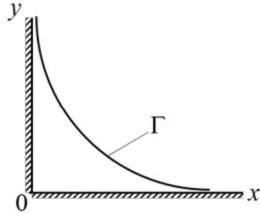


Задача 2

Полосное поле в точке O . (3 б)

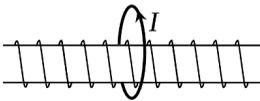
Ток I течет по тонкому проводу, протянутому вдоль двух параллельных полупрямых и соединяющей их полуокружности радиуса a , описанной вокруг точки O . Плоскость полуокружности перпендикулярна полупрямым (см. рис.). Найти магнитное

Задача 3



Бесконечная по оси z полость (см. рисунок) образована стенками прямого двухгранного угла и цилиндрической поверхностью Γ с сечением в виде гиперболы $x \cdot y = a_0^2$ ($a_0 = \text{const}$). Полость содержит магнитное поле $\mathbf{V}(x, y) = \text{rot } \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}(x, y) = A(x, y)\mathbf{e}_z$.

На границах полости $\mathbf{A}(x, y)$ имеет постоянные значения: $A|_{x=0} = A|_{y=0} = 0$, $A|_{\Gamma} = A_0$. Найти: а) распределение поля $\mathbf{V}(x, y)$ в полости (2 б); б) распределение тока на границе Γ в виде $\mathbf{i} = i_z(x, y)\mathbf{e}_z$, считая, что магнитное поле вне полости равно нулю. (2 б)



Задача 4

На длинный короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид, состоящий из N вит-

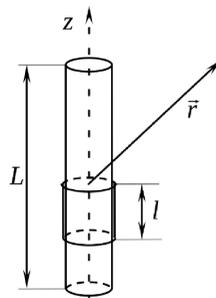
ков, надет проволочный виток. Размер витка много меньше расстояний до торцов соленоида. По витку пустили постоянный ток I . Какой ток потечет по обмотке соленоида? Изначально в соленоиде и в витке токов не было. (3 б)

Задача 5

Найти взаимную индуктивность (коэффициент взаимоиндукции) двух плоских витков произвольной формы, помещенных на плоскую границу раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 , если в вакууме она была равна L_{12} . (3 б)

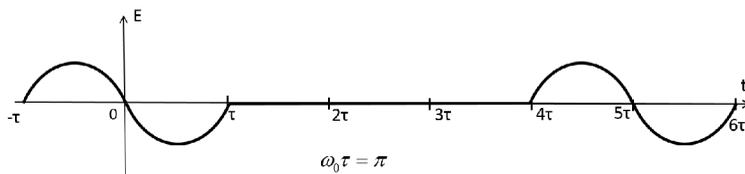
Задача 6

На соленоид с плотностью намотки n длиной L и сечением S плотно намотан короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид длиной l ($L > l \gg \sqrt{S}$). По внутреннему соленоиду (длиной L) пустили ток I . Найти магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от соленоида ($r \gg L$). (4 б)



Контрольная работа 2.1, вариант 1

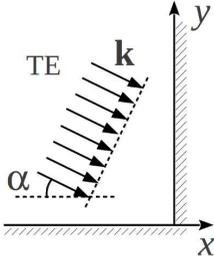
Задача 1



Сигнал представляет собой наложение двух периодов синусоиды $E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$, раздвинутых по времени, как показано на

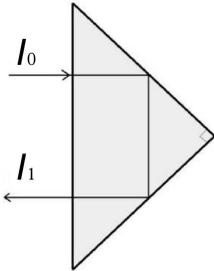
рисунке. (Здесь $\tau = \frac{\pi}{\omega_0}$). Какое количество локальных максимумов модуля $|E(\omega)|$ приходится на интервал $0 < \frac{\omega}{\omega_0} < 2$ (3 б)?

Задача 2



Плоская монохроматическая электромагнитная ТЕ-волна с длиной волны λ и амплитудой электрического поля E_0 падает на угловой отражатель с идеально проводящими стенками, под углом α к одной из граней. Найти распределение электрического поля $E(x, y, t)$ в области $x \leq 0, y \geq 0$. (3 б)

Задача 3



пренебречь. (3 б)

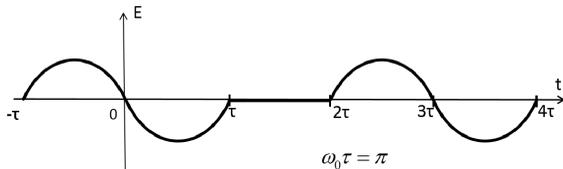
Луч света интенсивностью I_0 падает на поворотную призму из стекла с показателем преломления $n = 3/2$, по нормали к ее большой грани, как показано на рисунке. Основанием призмы является прямоугольный равнобедренный треугольник. Найти отношение интенсивностей лучей I_1/I_0 . Переотраженными лучами пренебречь. (3 б)

Задача 4

Плоская монохроматическая электромагнитная волна с частотой ω_0 , с круговой поляризацией, распространяющаяся вдоль оси z , падает на систему из трех поляроидов. Ось первого поляроида ориентирована вдоль оси x , ось второго поляроида вращается относительно оси z (в плоскости $z = \text{const}$) с частотой $\Omega \ll \omega_0$, ось третьего поляроида ориентирована по оси y . Расстояние между поляроидами много меньше длины волны. Найти спектр амплитуды $|E(\omega)|$ прошедшего сигнала. (4 б)

Контрольная работа 2.1, вариант 2

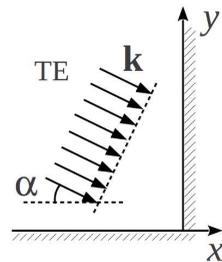
Задача 1



Сигнал представляет собой наложение двух периодов синусоиды $E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$, раздвинутых по времени, как показано на рисунке. (Здесь $\tau = \frac{\pi}{\omega_0}$). Какое количество локальных максимумов модуля $|E(\omega)|$ приходится на интервал $0 < \frac{\omega}{\omega_0} < 2$ (3 б)?

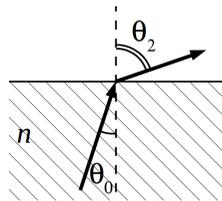
Задача 2

Плоская монохроматическая электромагнитная ТМ-волна с длиной волны λ и амплитудой электрического поля E_0 падает на уголкового отражателя с идеально проводящими стенками, под углом α к одной из граней. Найти распределение электрического поля $E(x, y, t)$ в области $x \leq 0, y \geq 0$. (3 б)

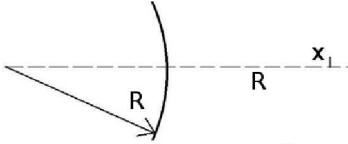


Задача 3

Свет падает из воды (показатель преломления $4/3$) в воздух (показатель преломления считать единицей) под таким углом падения θ_0 , при котором ТМ-волна полностью проходит. Найти $\cos(\theta_0)$ и $\cos(\theta_2)$ (см. рис.). Найти отношение интенсивности прошедшего света к интенсивности падающего света для ТЕ-волны при данном угле падения. (3 б)

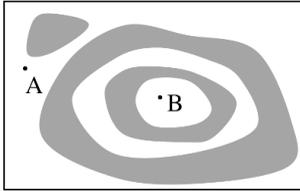


Контрольная работа 2.2, вариант 1



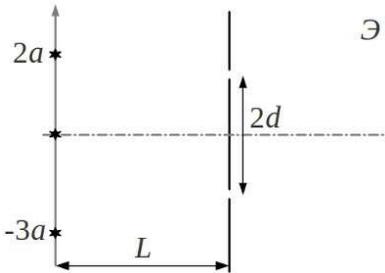
Задача 1

Предмет с размером x расположен на расстоянии R от выпуклого зеркала с радиусом R , как показано на рисунке ($R \gg x$). Найти размер его изображения x' . (2 б)



Задача 2

На рисунке схематически изображена картина интерференционных полос равной толщины на тонкой пленке с показателем преломления $n = 2$, наблюдаемая по нормали к ней в свете с длиной волны $\lambda = 0.5$ мкм. Оцените перепад толщины Δh между точками A и B, считая, что на отрезке AB толщина пленки меняется монотонно. (3 б)

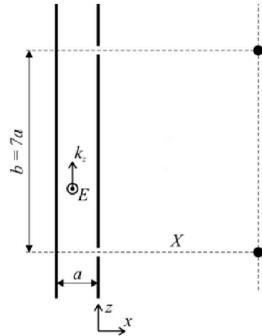


Задача 3

В схеме Юнга экран с двумя узкими щелями освещается тремя монохроматическими узкими вытянутыми в линии источниками одинаковой интенсивности с длиной волны λ . Источники расположены на расстоянии $L \gg d$ от экрана со щелями, расстояние между щелями $2d$. Источники расположены по вертикали следующим образом: один в центре, второй выше центральной линии на расстоянии $3a$, третий ниже центральной линии на расстоянии $2a$ (см. рис., $L \gg a$). Найти, при каком минимальном d интерференционные картины от всех источников совпадут в точности. (4 б)

Задача 4

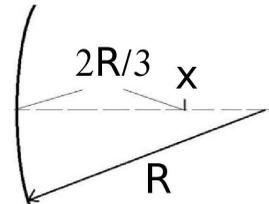
По волноводу, образованному двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями, бежит H -волна вида $\mathbf{E} = E_0(x) \times \times e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_y$. Расстояние между плоскостями $a = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}$, где λ_0 – длина волны в свободном пространстве. В правой стенке волновода параллельно оси y прорезаны две бесконечные узкие щели на расстоянии $b = 7a$ друг от друга. Найти расстояние X от правой стенки волновода до экрана, на котором соседние интерференционные максимумы наблюдаются строго напротив щелей. (5 б)



Контрольная работа 2.2, вариант 2

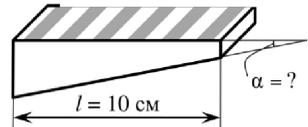
Задача 1

Предмет с размером x расположен на расстоянии $2R/3$ от вогнутого зеркала с радиусом R , как показано на рисунке ($R \gg x$). Найти размер его изображения x' . (2 б)



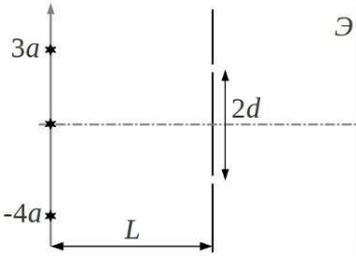
Задача 2

На тонком стеклянном клине с показателем преломления $n = 1.5$ длиной $l = 10$ см при наблюдении под прямым углом в свете с длиной волны $\lambda = 0.5$ мкм уместается 6 интерференционных полос равной толщины. Оценить угол α клина. (3 б)

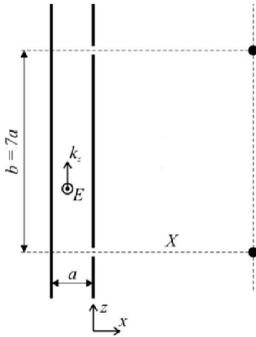


Задача 3

В схеме Юнга экран с двумя узкими щелями освещается тремя монохроматическими узкими вытянутыми в линии источниками одинаковой интенсивности с длиной волны λ . Источники расположены на расстоянии $L \gg d$ от экрана со щелями, расстояние



Э между щелями $2d$. Источники расположены по вертикали следующим образом: один в центре, второй выше центральной линии на расстоянии $3a$, третий ниже центральной линии на расстоянии $4a$ (см. рис., $L \gg a$). Найти, при каком минимальном d интерференционные картины от всех источников совпадут в точности. (4 б)



Задача 4

По волноводу, образованному двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями, бежит H -волна вида $\mathbf{E} = E_0(x) \times e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_y$. Расстояние между плоскостями $a = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}$, где λ_0 – длина волны в свободном пространстве. В правой стенке волновода параллельно оси y прорезаны две бесконечные узкие щели на расстоянии $b = 7a$

друг от друга. Найти максимальное расстояние X от правой стенки волновода до экрана, на котором интерференционные минимумы наблюдаются строго напротив щелей. (5 б)

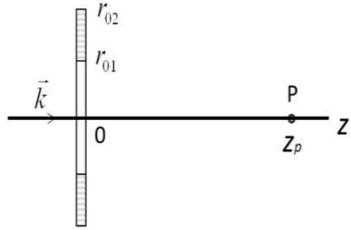
Экзаменационная работа 2

Задача 1

Плоская тонкая проводящая пластинка разделяет области с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_2 < n_1$). Со стороны области 1 на пластинку под углом полного внутреннего отражения падает TE -волна. Найти удельную проводимость пластинки σ^* (ток на единицу длины $\mathbf{i} = \sigma^* \mathbf{E}$), при которой отраженная волна отсутствует. (4 б)

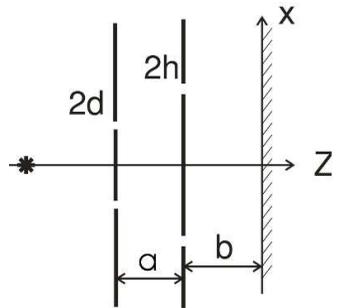
Задача 2

Плоское прозрачное кольцо с толщиной Δ и показателем преломления n , установленное в свободном пространстве, занимает вторую зону Френеля для точки наблюдения P , находящейся на оси симметрии кольца, при его освещении плоской монохроматической волной $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ (см. рис.). Найти внутренний и внешний радиус кольца, если от центра кольца до точки наблюдения 2 метра, $\lambda = 0.5$ мкм (1 б). При какой минимальной толщине Δ_{min} комплексная амплитуда \hat{E}_p максимальна по модулю? Чему она равна? (Отражением от поверхностей кольца пренебречь) (+4 б).



Задача 3

Нитевидный монохроматический источник с длиной волны λ расположен перпендикулярно оси z (см. рис.). Перед источником установили два экрана. Каждый экран имеет две узкие щели, которые расположены симметрично относительно оси z . Расстояния между щелями у первого экрана $2d$, у второго $2h$. Расстояние между экранами a . Расстояние от второго экрана до плоскости наблюдения $-b$, $2d$ и $2h \ll a$ и b . Найти, при каком минимальном расстоянии d между щелями первого экрана интенсивность сигнала на плоскости наблюдения обратится в ноль. (3 б) Найти интенсивность $I(x)$ для произвольных d и h . Считать, что амплитуда волны, прошедшей через любые щели на экранах и достигшей плоскости xy , равна E_0 (+2 б).



Задача 4

Релятивистская частица массы m и зарядом q со скоростью $\beta \sim 1$ пролетает промежуток, на котором задано: 1) однородное магнитное поле \mathbf{B} , перпендикулярное \mathbf{v} ; 2) однородное электрическое поле \mathbf{E} , параллельное \mathbf{v} . Значения полей заданы в лабораторной системе отсчета. Найти потери энергии частицы на излучение $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ в лабораторной системе отсчета в обоих случаях. (2 б)

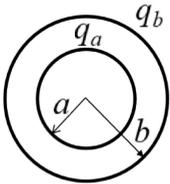
Задача 5

Линейно поляризованная (вдоль оси x) плоская монохроматическая волна с волновым вектором k вдоль оси z рассеивается на трех одинаковых свободных зарядах с координатами $(0, 0, 0)$, $(0, 0, d)$, $(0, 0, 2d)$. Найти дифференциальное сечение рассеяния $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ в плоскости zy в зависимости от угла α , который отсчитывается от оси z . (2 б) Нарисовать качественно диаграмму направленности рассеянного излучения в плоскости zy для $d = \lambda/4$ (+1 б).

Задача 6

Найти в лабораторной системе отсчета скалярный и векторный потенциалы релятивистской нейтральной частицы с магнитным моментом \mathbf{m}_0 (в собственной системе отсчета), которая движется вдоль направления \mathbf{m}_0 со скоростью $v \sim c$. (3 б)

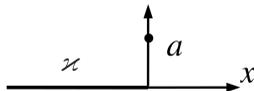
2014/2015 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1**Задача 1**

Концентрические сферы радиусов a и b заряжены равномерно по поверхности суммарными зарядами q_a и q_b соответственно. Найти поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ во всем пространстве. (2 б)

Задача 2

Полубесконечная нить, однородно заряженная с линейной плотностью \varkappa , расположена на оси x в области $x \leq 0$ (см. рис.). Найти напряженность электрического поля в точке с координатами $(0, a, 0)$. (3 б)

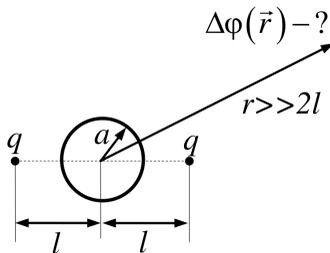


Задача 3

Пространство с $x < 0, y < 0, z < 0$ заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_1 . Остальное пространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_2 . В начало координат поместили точечный заряд q . Найти потенциал и напряженность электрического поля во всем пространстве. (4 б)

Задача 4

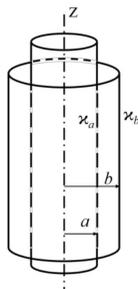
Два одинаковых точечных заряда q закреплены на расстоянии $2l$ друг от друга. Между ними помещают незаряженный проводящий шарик радиуса $a < l$, так что центр шарика оказывается посередине между зарядами (см. рисунок). Найти первый неисчезающий член в разложении изменения потенциала $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях $r \gg 2l$, возникшего за счет шарика. (5 б)

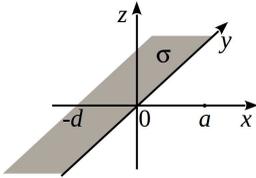


Контрольная работа 1.1, вариант 2

Задача 1

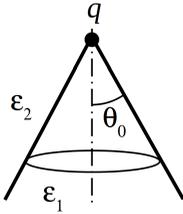
Два соосных цилиндра с радиусами a и b заряжены равномерно по поверхности с погонной плотностью заряда \varkappa_a и \varkappa_b соответственно. Считая длины цилиндров бесконечными, найти распределение поля \mathbf{E} и потенциала φ во всем пространстве. Потенциал поверхности $r = b$ принять равным нулю. (2 б)





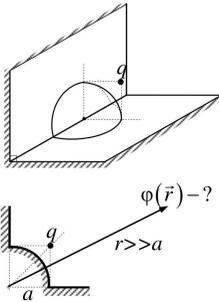
Задача 2

Бесконечная вдоль оси y полоса шириной d ($-d \leq x \leq 0$) (см. рис.) однородно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ . Найти напряженность электрического поля в точке с координатами $(a, 0, 0)$. (3 б)



Задача 3

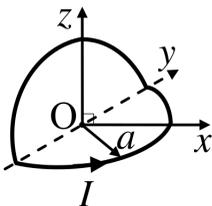
В вершине бесконечного конуса с углом раствора $2\theta_0$ расположен заряд q . Внутренняя часть конуса заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , остальная часть пространства заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Найти потенциал и электрическое поле во всем пространстве. (4 б)



Задача 4

На бесконечно протяженном проводнике, поверхность которого образует прямой двугранный угол, имеется сферический выступ радиуса a с центром на ребре. Заряд q помещили в плоскости, перпендикулярной граням двугрannого угла, проходящей через центр сферического выступа, на расстоянии a от каждой из граней. Найти первый исчезающий член в разложении потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях $r \gg a$. (5 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 1



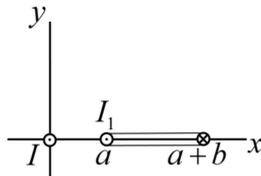
Задача 1

Круглый проволочный виток радиуса a с центром в точке O согнули вдоль его диаметра

так, что его грани стали образовывать прямой двугранный угол, и пустили по нему ток I . Найти магнитное поле в точке O . (2 б)

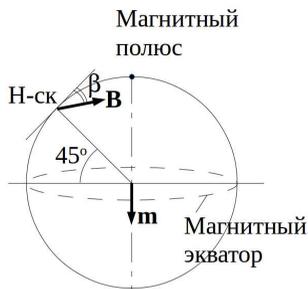
Задача 2

В поле \mathbf{B} , создаваемом бесконечным проводом с током I , совпадающим с осью z , находится прямоугольный контур с током I_1 с размерами $b \times h$ (h – размер в направлении z , см. рис.). Найти силу \mathbf{F} , действующую на контур. (3 б)



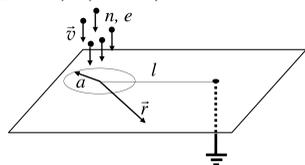
Задача 3

Модуль вектора магнитной индукции магнитного поля Земли в Новосибирске составляет величину 0,6 Гс, “магнитная широта” – 45° (см. рис.). Полагая, что магнитное поле создается диполем в центре Земли, найти угол между вектором \mathbf{B} и горизонтом в Новосибирске (1 б), рассчитать поле на магнитном экваторе (форму Земли принять за шар, приплюсностью у полюсов пренебречь) (+2 б).



Задача 4

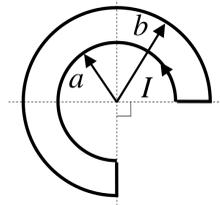
Поток частиц зарядом e с концентрацией n падает со скоростью v перпендикулярно бесконечной проводящей плоскости, покрывая круг радиуса a . Ток отводится по тонкому проводу, присоединенному на расстоянии l от центра круга. Найти распределение поверхностных токов $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ на плоскости. (5 б)



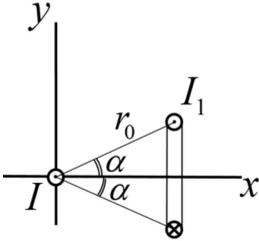
Контрольная работа 1.2, вариант 2

Задача 1

Ток I течет по плоскому проволочному контуру, представляющему собой две дуги радиусов a и b с общим центром. Дуги имеют угловой



размер $3\pi/2$, а их концы соединены радиальными участками проволоки. Найти магнитное поле в центре. (2 б)

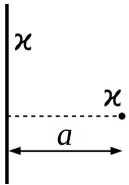


Задача 2

В поле \mathbf{B} , создаваемом бесконечным проводом с током I , совпадающим с осью z , находится прямоугольный контур с током I_1 с размерами $2r_0 \sin \alpha \times h$ (h – размер в направлении z , см. рис.). Найти суммарную силу \mathbf{F} , действующую на контур. (3 б)

Экзаменационная работа 1

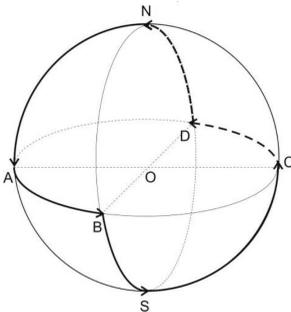
Задача 1



Две взаимно перпендикулярные нити расположены на расстоянии a друг от друга (см. рис.) и заряжены равномерно с линейной плотностью χ . Определить силу кулоновского взаимодействия между ними. (2 б)

Задача 2

Ток течет по плоскости $z = 0$, компоненты линейной плотности в цилиндрических координатах $i_\alpha = i_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2$, $i_r = i_z = 0$. Найти магнитное поле $\mathbf{B}(z)$ на оси z . (3 б)



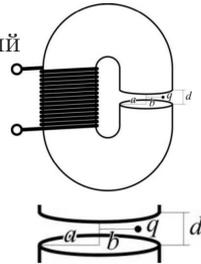
Задача 3

Замкнутый контур $ABSCDNA$, по которому течет ток I , натянута на шар радиуса a (см. рис.). Найти магнитное поле в центре шара (т. O) (2 б), а также на больших расстояниях $R \gg a$ (+2 б). Описание контура: дуга AB проходит по экватору на четверть его длины (90°); дуга BS спускается с экватора на южный полюс; дуга SC соединяет полюс с экватором и отстоит на 90° от

меридиана BS ; дуга CD проходит по экватору на четверть его длины в том же направлении, что и AB , а дуга DN соединяет точку D с северным полюсом N ; дуга NA соединяет полюс с точкой A и отстоит на 90° от меридиана DN .

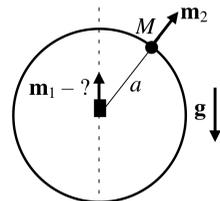
Задача 4

Электромагнит представляет собой С-образный магнитопровод ($\mu \gg 1$) постоянного кругового сечения с радиусом a , на который намотан соленоид из N витков. Длина магнитопровода l , зазор между полюсами $d \ll a \ll l$. На расстоянии $b < a$ от оси, соединяющей центры полюсов, находится неподвижный точечный заряд q . В соленоиде течет переменный ток $I = I_0 \cos(\omega t)$. Найти силу $\mathbf{F}(t)$, действующую на заряд. (4 б)



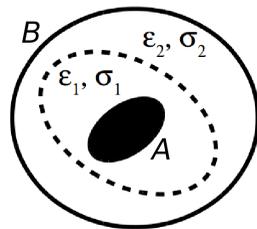
Задача 5

На тонкое кольцо радиуса a , выполненное из немагнитного материала, нанизана маленькая магнитная бусинка, которая может без трения перемещаться по кольцу. Бусинка обладает массой M и магнитным моментом \mathbf{m}_2 , который при ее движении по кольцу остается направленным радиально. Определите магнитный момент m_1 маленького магнита, который нужно закрепить в центре кольца, чтобы бусинка, находясь в любом положении на кольце, оставалась в покое. Ускорение свободного падения g . (5 б)



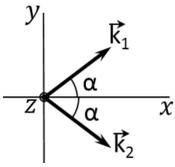
Задача 6

Проводник A находится внутри замкнутой проводящей оболочки B . Прослойка такого конденсатора состоит из двух областей с границей раздела, образующей замкнутую поверхность (показана на рисунке пункти-



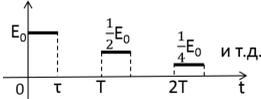
ром). Форма электродов и границы раздела произвольные. Диэлектрическая проницаемость и проводимость областей равны ϵ_1, σ_1 и ϵ_2, σ_2 соответственно. К электродам подано напряжение, такое, что от A к B течет постоянный ток I . Какой свободный заряд Q накапливается при этом на границе раздела (5 б)?

Контрольная работа 2.1, вариант 1



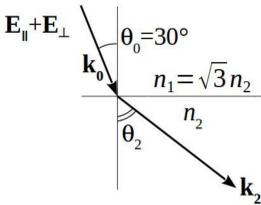
Задача 1

Волновое поле представляет собой суперпозицию двух ТЕ-волн с одинаковыми амплитудами $E = E_0 \mathbf{e}_z$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_1 = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y)$ и $\mathbf{k}_2 = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_y)$. Определить поверхности с нулевым электрическим полем. (2 б)



Задача 2

Поле $E(t)$ представляет собой бесконечную последовательность уменьшающихся по амплитуде прямоугольных импульсов одинаковой протяженности τ с периодом T , показанную на рисунке. Найти спектральную плотность $E(\omega)$ и квадрат ее модуля $|E(\omega)|^2$. (3 б)



Задача 3

На границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 = \sqrt{3}n_2, \mu_{1,2} = 1$) падает под углом падения $\theta_0 = 30^\circ$ эллиптически поляризованная волна с компонентами электрического поля, перпендикулярного плоскости падения $E_\perp = E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ и лежащего в плоскости падения $E_\parallel = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \pi/2)}$. Определить поляризацию преломленной волны и отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей волны. (4 б)

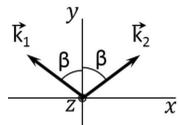
Задача 4

Одномерный волновой пакет распространяется в среде с законом дисперсии $\omega(k) = \omega_0 + v \cdot (k - k_0) + \frac{\alpha}{2}(k - k_0)^2$. Оценить, при какой начальной ширине пакета Δx_0 его ширина через время t будет минимальной. (4 б)

Контрольная работа 2.1, вариант 2

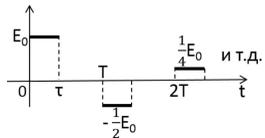
Задача 1

Волновое поле представляет собой суперпозицию двух ТЕ-волн с одинаковыми амплитудами $E = E_0 \mathbf{e}_z$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_1 = k(-\sin \beta \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y)$ и $\mathbf{k}_2 = k(\sin \beta \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y)$. Определить поверхности с нулевым электрическим полем. (2 б)



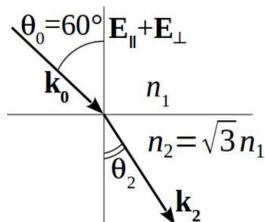
Задача 2

Поле $E(t)$ представляет собой бесконечную последовательность уменьшающихся по амплитуде прямоугольных импульсов одинаковой протяженности τ с периодом T , показанную на рисунке. Найти спектральную плотность $E(\omega)$ и квадрат ее модуля $|E(\omega)|^2$. (3 б)

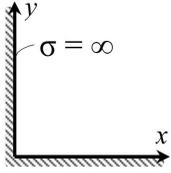


Задача 3

На границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 = \sqrt{3}n_2$, $\mu_{1,2} = 1$) падает под углом падения $\theta_0 = 30^\circ$ эллиптически поляризованная волна с компонентами электрического поля, перпендикулярного плоскости падения $E_\perp = E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ и лежащего в плоскости падения $E_\parallel = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \pi/2)}$. Определить поляризацию преломленной волны и отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей волны. (4 б)

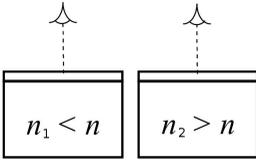


Контрольная работа 2.2, вариант 1



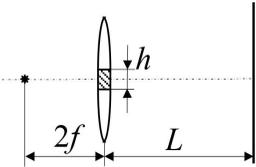
Задача 1

В стоячей волне частоты ω , возбужденной в прямом двугранном угле (см. рисунок) с идеально проводящими стенками, электрическое поле имеет вид $\mathbf{E}(x, y, t) = E(x, y) e^{i\omega t} \mathbf{e}_z$, где $E(x, y) = E_0 f(y) \sin \frac{\omega x}{2c}$. Требуется найти множитель $f(y)$. (2 б)



Задача 2

Две тонкие диэлектрические прозрачные пленки одинаковой субмикронной толщины с одинаковым показателем преломления нанесены на разные подложки. У первой подложки показатель преломления меньше, чем у пленки, а у второй – больше. Определите, какой цвет λ имеет пленка, лежащая на первой подложке, если пленка, лежащая на второй подложке, имеет красный цвет ($\lambda_0 = 700$ нм), соответствующий первому порядку интерференционного максимума. На пленки смотрят под прямым углом к поверхности (3 б).



Задача 3

Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f разрезали пополам, половинки раздвинули, а получившуюся щель шириной h заполнили непрозрачным материалом. Линза освещается точечным монохроматическим источником света с длиной волны λ , расположенным на оси симметрии системы на расстоянии $2f$ от линзы. На экране, параллельном линзе и отстоящем от нее на расстоянии L ($L > 2f$), наблюдается интерференционная картина. Найти расстояние между максимумами вблизи ее центра (4 б).

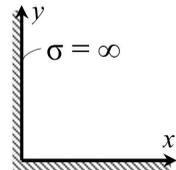
Задача 4

В длинном волноводе квадратного сечения $a \times a$ с идеально проводящими стенками вдоль оси z в области $z < 0$ распространяется E_{11} -волна. Область $z < 0$ волновода заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ ($\mu = 1$), а область $z > 0$ – пуста. Определите максимальную частоту волны, при которой она полностью отражится от границы раздела $z = 0$. (5 б)

Контрольная работа 2.2, вариант 2

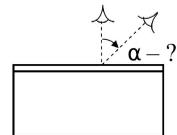
Задача 1

В стоячей волне частоты ω , возбужденной в прямом двугранном угле (см. рисунок) с идеально проводящими стенками, магнитное поле имеет вид $\mathbf{B}(x, y, t) = B(x, y) e^{i\omega t} \mathbf{e}_z$, где $B(x, y) = B_0 f(y) \cos \frac{\omega x}{2c}$. Требуется найти множитель $f(y)$. (2 б)



Задача 2

На поверхности воды тонким слоем разлит бензин. Если посмотреть на однородный по толщине участок пленки бензина сверху, то он кажется красным ($\lambda_0 = 760$ нм). Определите, на какой минимальный угол α нужно изменить угол зрения, чтобы пленка стала казаться фиолетовой ($\lambda = 380$ нм). Показатели преломления бензина и воды равны $n_б = 1.4$ и $n_в = 1.3$ соответственно (3 б).



Задача 3

Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f разрезали пополам, половинки раздвинули, а получившуюся щель шириной h заполнили непрозрачным материалом. Линза освещается плоской монохроматической волной с длиной волны λ , падающей по нормали. На экране, параллельном линзе и отстоящем от нее на расстоянии L ($L > 2f$), наблюдается интерференци-

онная картина. Найти расстояние между максимумами вблизи ее центра (4 б).

Задача 4

В длинном волноводе квадратного сечения $a \times a$ с идеально проводящими стенками вдоль оси z в области $z < 0$ распространяется E_{11} -волна. Область $z < 0$ волновода заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ ($\mu = 1$), а область $z > 0$ – пуста. Определите частоту волны, при которой не будет волны, отраженной от границы раздела $z = 0$. (5 б)

Экзаменационная работа 2

Задача 1

Линза Френеля (фазовая зонная пластинка Френеля) фокусирует свет от фонарика, находящегося на расстоянии $a_1 = 36$ см, на стенку на расстоянии $a_2 = 36$ см. Найти радиусы первого и четвертого колец линзы Френеля (считать длину волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). (2 б)

Задача 2

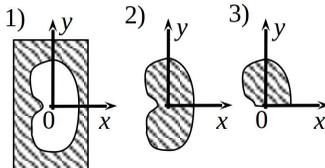
Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает по нормали на экран с круглым отверстием радиуса $R = 30\lambda$. Сколько максимумов будет наблюдаться на зависимости $I(z)$ интенсивности прошедшей волны на оси отверстия от расстояния z до экрана в диапазоне $5R < z < \infty$. (2 б)

Задача 3

Зонная пластинка Френеля с радиусом первой зоны a и N открытыми нечетными зонами облучается плоской монохроматической волной, создаваемой источником, движущимся к пластинке вдоль ее оси со скоростью $V \sim c$. Найти наибольшее фокусное расстояние и поле волны в фокусе, если в собственной системе отсчета источника длина волны излучения равна λ_0 , а электрическое поле E_0 (4 б).

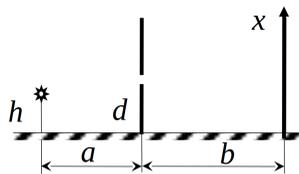
Задача 4

Вдоль оси z распространяется плоская электромагнитная волна, интенсивность которой, регистрируемая в некоторой точке P , лежащей на оси z (при $z > 0$), равна I_0 . Если в плоскости xy поместить экран 1) с отверстием, симметричным относительно x , то интенсивность в точке P станет равна I_1 . Если же вместо экрана 1) поместить дополнительный к нему экран 2), то интенсивность станет равна I_2 . Чему будет равна интенсивность I_3 в точке P , если вместо экрана 2) поставить его половину (экран 3)? (5 б)



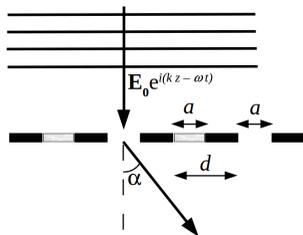
Задача 5

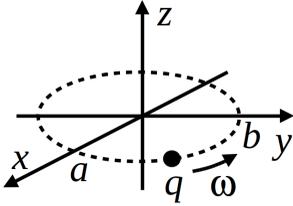
Нитевидный монохроматический источник света с длиной волны λ , излучение которого линейно поляризовано (\mathbf{E} перпендикулярно плоскости рисунка), расположен на высоте h над зеркалом и на расстоянии a от непрозрачного экрана со щелью, которая находится на высоте d от зеркала. Найти распределение интенсивности $I(x)$ на экране, отстоящем на расстояние b от экрана со щелью. Поперечные размеры малы по сравнению с продольными ($d, h \ll a, b$). (5 б)



Задача 6

В щелевой дифракционной решетке, состоящей из $2N$ щелей ширины $a \gg \lambda$ и с периодом $d = 2a$, каждую вторую щель закрыли прозрачной пластинкой толщины $\Delta = \frac{\lambda}{2(n-1)}$, где n – показатель преломления стекла. Падающая волна $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ нормальна к плоскости решетки. Найти распределение интенсивности прошедшей волны $I(\alpha)$ по углу α . (2 б) Найти $I(\alpha)$ в случае, если нет стеклянных пластинок (+1 б).





Задача 7

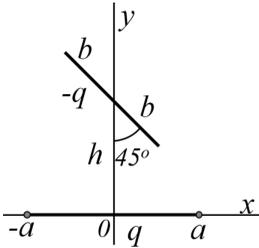
Нерелятивистская частица с зарядом q движется по эллиптической траектории согласно $x(t)=a \cos \omega t$, $y(t)=b \sin \omega t$. Определить среднюю по времени мощность, излучаемую частицей в полный телесный угол.

2015/2016 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

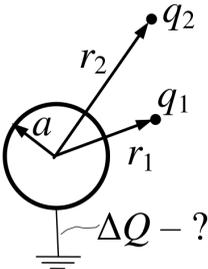
Задача 1

В центр диэлектрического шара радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ поместили точечный заряд q . Найти электрическое поле во всем пространстве и связанный заряд на границе шара (2 б).



Задача 2

Два равномерно заряженных прямых отрезка с зарядами q , $-q$ и с длинами $2a$, $2b$ расположены в плоскости (x, y) , как показано на рисунке. Найти дипольный момент \mathbf{d} и первый ненулевой член в разложении потенциала $\varphi(x, y, z)$, вдали от системы зарядов $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a, b$. (3 б)



Задача 3

Точечные заряды q_1 и q_2 находятся на расстояниях r_1 и r_2 от центра заземленного металлического шара радиуса a . Какой заряд ΔQ стечет через заземление с шара, если точечные заряды поменять местами? (3 б)

Задача 4

В пространство с однородным электрическим полем E_0 поместили диэлектрический цилиндр длиной l и сечением S ($l \ll S$) с диэлектрической проницаемостью ϵ . Ось цилиндра и направление электрического поля E_0 совпадают. Оценить вклад в электрическое поле от цилиндра в его центре, в точке, находящейся посередине между его торцами. (3 б)

Задача 5

Сферический конденсатор с обкладками радиуса a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого меняется по закону $\epsilon(\theta) = \epsilon_0(1 + \sin^2 \theta)$. Найти емкость конденсатора. (4 б)

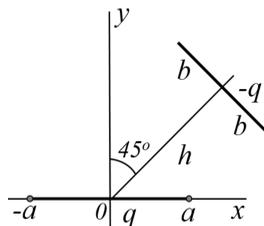
Контрольная работа 1.1, вариант 2

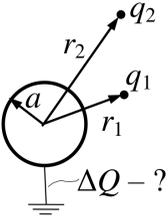
Задача 1

В центр бесконечного диэлектрического цилиндра радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ поместили бесконечную однородно заряженную нить с линейной плотностью заряда κ . Найти электрическое поле во всем пространстве и связанный заряд на единицу длины на границе цилиндра. (2 б).

Задача 2

Два равномерно заряженных прямых отрезка с зарядами q , $-q$ и с длинами $2a$, $2b$ расположены в плоскости (x, y) , как показано на рисунке. Найти дипольный момент d и первый ненулевой член в разложении потенциала $\varphi(x, y, z)$, вдали от системы зарядов $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a, b$. (3 б)





Задача 3

Точечные заряды q_1 и q_2 находятся на расстояниях r_1 и r_2 от центра заземленного металлического шара радиуса a . Какой заряд ΔQ протечет через заземление на шар, если точечные заряды поменять местами? (3 б)

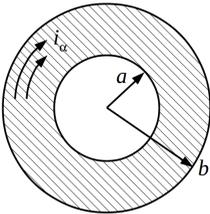
Задача 4

В пространство с однородным электрическим полем E_0 поместили диэлектрический цилиндр длиной l и сечением S ($l \ll S$) с диэлектрической проницаемостью ϵ . Ось цилиндра и направление электрического поля E_0 совпадают. Оценить электрическое поле, создаваемое цилиндром на расстояниях $r \gg l$. (3 б)

Задача 5

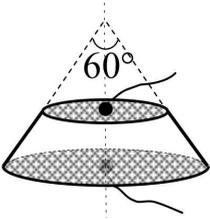
Цилиндрический конденсатор с обкладками радиуса a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого меняется по закону $\epsilon(\alpha) = \epsilon_0(1 + \sin^2 \alpha)$. Найти емкость на единицу длины конденсатора. (4 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 1



Задача 1

В тонком диске радиуса b сделано круглое концентрическое отверстие радиуса a . По оставшейся части диска текут поверхностные азимутальные токи $i_\alpha = I_0 \frac{r}{b^2}$. Найти магнитное поле в центре диска. (3 б)



Задача 2

Непроводящий конус с углом 60° при вершине, усеченный до половины высоты, покрыт тонкой пленкой с поверхностной проводимостью σ^* . Кроме того на основания конуса напылены металлические контактные площадки,

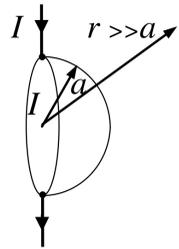
проводимость которых можно считать бесконечно большой (см. рис.). Найти сопротивление R между контактными площадками. (4 б)

Задача 3

В плоском электронном диоде ток определяется законом «3/2». Найти время пролета электроном диодного промежутка размером d при напряжении на диоде U ($eU \ll mc^2$). Заряд электрона e . Тепловой скоростью электрона пренебречь. (3 б)

Задача 4

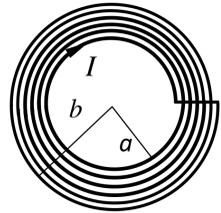
Участок длины $2a$ прямолинейного провода с током I заменили на проводящую полусферу радиуса a . Найти первый и второй не исчезающий член разложения магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от центра полусферы ($r \gg a$). (4 б)



Контрольная работа 1.2, вариант 2

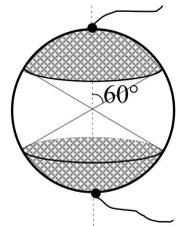
Задача 1

Из цельного провода с диаметром d намотано целое число витков спирали так, что витки плотно прилегают друг к другу. Концы спирали замкнуты прямым проводом, по проводу течет ток I . Внутренний радиус спирали a , а внешний – b ($b - a \gg d$). Найти магнитное поле в центре спирали. (3 б)

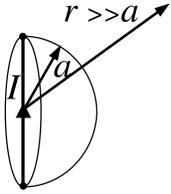


Задача 2

На непроводящий шар напылена тонкая пленка с поверхностной проводимостью σ^* , а также металлические контактные площадки, проводимость которых можно считать бесконечно большой, покрывающие противоположные полюсы с угловым



размером 60° : покрытая контактами площадь сферы соответствует $\theta < 60^\circ$ и $\theta > 120^\circ$ (см. рис.). Найти сопротивление R между контактными площадками. (4 б)



Задача 3

Две диаметрально противоположные точки проводящей полусферы радиуса a соединили тонким прямолинейным отрезком проволоки и пустили по нему ток I . Найти магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от центра полусферы ($r \gg a$). (4 б)

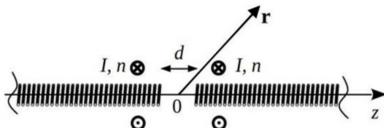
Экзаменационная работа 1

Задача 1

Из бесконечности с нулевой начальной скоростью на изолированную проводящую сферу с радиусом R падает частица с зарядом q и массой m . Найти, какую скорость v будет иметь частица на расстоянии $l > R$ от центра сферы. (2 б)

Задача 2

Найти внутреннюю часть самоиндукции на единицу длины проводника в форме бесконечного полого цилиндра (трубы) с внутренним радиусом a и внешним – b , ток бежит однородно по сечению трубы. (3 б)

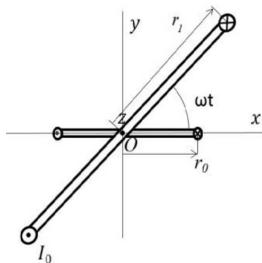


Задача 3

По двум полубесконечным соленоидам с площадью сечения S и плотностью намотки n текут в одном направлении одинаковые токи I . Ось z является общей для обоих соленоидов, а расстояние между концами равно d (см. рисунок). Найти магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg d, \sqrt{S}$. (2 б)

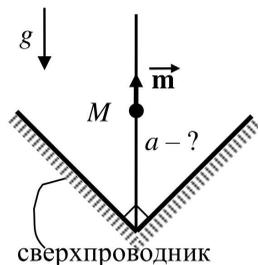
Задача 4

Неподвижный круговой виток радиуса r_0 , обладающий сопротивлением R и индуктивностью L , и большое кольцо с радиусом $r_1 \gg r_0$ с постоянным током I_0 , вращающееся вокруг оси z с частотой ω , имеют общий центр O , при $t = 0$ нормали витков совпадают (см. рисунок). Найти ток $I(t)$ в неподвижном витке. (3 б)



Задача 5

На непроводящую спицу нанизана маленькая бусинка с массой M и магнитным моментом \mathbf{m} , направленным вдоль спицы. Бусинка может без трения перемещаться вдоль спицы. Концы спицы закрепили в вершине прямого двугранного угла, образованного двумя полубесконечными сверхпроводниками, и направили ее вертикально вверх, вдоль биссектрисы угла. На какое расстояние a от вершины двугранного угла нужно поместить бусинку, чтобы она оставалась в покое? Ускорение свободного падения g . (5 б)

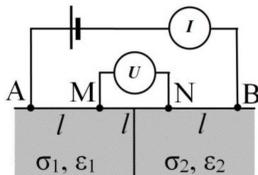


Задача 6

В однородное поле $\mathbf{B}_0 e^{i\omega t}$ поместили непроводящий шар с магнитной проницаемостью μ с радиусом b . В его центр поместили шар с радиусом $a \ll b$ и проводимостью σ . Найти, какая средняя мощность выделяется в виде тепла в малом шаре в случае сильного скин-эффекта ($\delta \ll a$). (4 б)

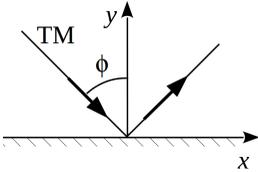
Задача 7

Четыре электрода помещены в проводящее полупространство с горизонтальной границей, разделенное вертикальной границей на две области удельной проводимостью



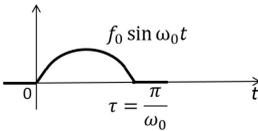
σ_1 и σ_2 , диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 . В симметричных относительно вертикальной границы точках А и В подключен источник тока, а в точках М и N измеряется напряжение. Найти «кажущееся» сопротивление $R^* = \frac{U_{MN}}{I_{AB}}$, если $AM=MN=NB=l$ и лежат на одной прямой (схема Веннера). Проверить ответ при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. (5 б)

Контрольная работа 2.1, вариант 1



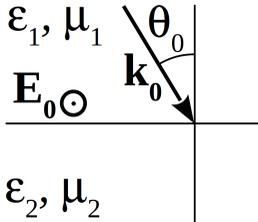
Задача 1

TM-волна $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0m} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ падает под углом $\phi = 45^\circ$ на плоское идеально проводящее зеркало. Найти плотности поверхностных зарядов и токов, наведенных в зеркале. (3 б)



Задача 2

Найти спектральную плотность $f(\omega)$ функции $f(t)$, изображенной на рисунке. Результат представить в виде $\frac{f_0 \tau}{2\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega\tau}{2}} F(\omega, \omega_0)$, где $F(\omega, \omega_0)$ – искомая функция. Вычислить ее значения в точках $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = 2\omega_0$. (3 б)



Задача 3

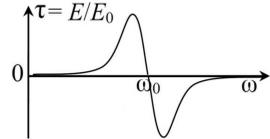
На плоскую границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1, ϵ_2 и магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 падает ТЕ волна. Определить коэффициент отражения по амплитуде, если известно, что $\epsilon_1 \mu_1 = \epsilon_2 \mu_2$, при этом $\epsilon_1 = 4\mu_1$, а $\epsilon_2 = \mu_2$. (3 б)

Задача 4

Волновой пакет, форма и закон движения которого заданы функцией $E(r, t) = E_0 \cos(k_0 z - \omega_0 t) \cos(\Delta k z - \Delta \omega t)$, проходит че-

рез фильтр, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ описывает зависимость коэффициента прохождения по амплитуде от частоты) которого представлена на рисунке.

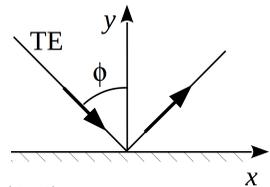
Определите форму и закон движения волнового пакета после прохождения фильтра, если известно, что отношение интенсивности света на выходе и на входе в фильтр равно T . Считать, что $\Delta\omega \ll \omega_0$. (4 б)



Контрольная работа 2.1, вариант 2

Задача 1

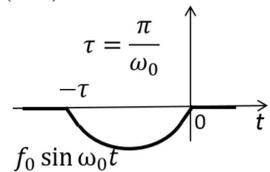
ТЕ-волна $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0m} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ падает под углом $\phi = 45^\circ$ на плоское идеально проводящее зеркало. Найти плотности поверхностных зарядов и токов, наведенных в зеркале. (3 б)



Задача 2

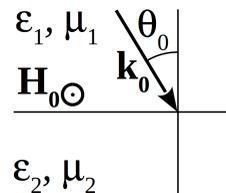
Найти спектральную плотность $f(\omega)$ функции $f(t)$, изображенной на рисунке.

Результат представить в виде $\frac{f_0\tau}{2\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega\tau}{2}} \times F(\omega, \omega_0)$, где $F(\omega, \omega_0)$ – искомая функция. Вычислить ее значения в точках $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = 2\omega_0$. (3 б)

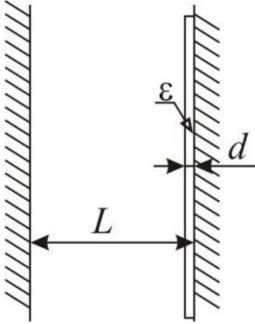


Задача 3

На плоскую границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1, ϵ_2 и магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 падает ТМ волна. Определить коэффициент отражения по амплитуде, если известно, что $\epsilon_1\mu_1 = \epsilon_2\mu_2$, при этом $\epsilon_1 = \mu_1$, а $\epsilon_2 = 4\mu_2$. (3 б)

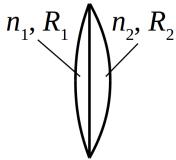


Контрольная работа 2.2, вариант 1



Задача 1

В резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими пластинами, расположенными на расстоянии L , возбуждали стоячую электромагнитную волну с m пучностями. Найти частоту колебаний ω_0 такой волны (1 б) и изменение частоты $\Delta\omega$ вследствие напыления на одну из пластин тонкого диэлектрического слоя с проницаемостью ε и толщиной d , $d \ll L/m$ (+2 б).

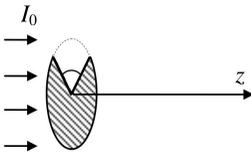


Задача 2

Двояковыпуклая тонкая линза составлена из двух плосковыпуклых линз с радиусами кривизны R_1 , R_2 и коэффициентами преломления n_1 , n_2 соответственно. Найти фокусное расстояние линзы. (3 б)

Задача 3

Гладкая поверхность кремниевой пластины покрыта тонким однородным слоем окисла с показателем преломления $n = 1.46$. При наблюдении перпендикулярно поверхности в отраженном белом свете она имеет красноватый оттенок, максимально отражая свет с длиной волны λ_1 . Пластину поместили на некоторое время в печь. Теперь она максимально отражает свет с длиной волны λ_2 . Насколько увеличилась при этом толщина слоя окисла, если $\lambda_2 - \lambda_1 = 90$ нм? Конечная толщина окисла не превышает 300 нм. Показатель преломления кремния больше n . (3 б)



Задача 4

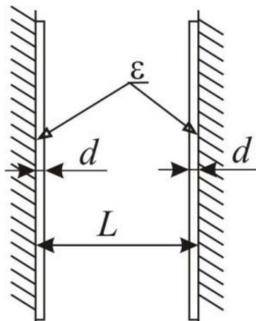
От круглого непрозрачного диска отрезали сектор углового размера $\alpha = 45^\circ$. Определите максимальную и минимальную

интенсивность света $I(z)$ на оси за диском на расстояниях, много больших по сравнению с размером диска при освещении его плоской волной интенсивности I_0 , падающей по нормали. (4 б)

Контрольная работа 2.2, вариант 2

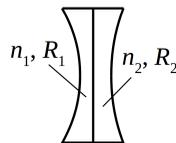
Задача 1

В резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими пластинами, расположенными на расстоянии L , возбудили стоячую электромагнитную волну с m узлами. Найти частоту колебаний ω_0 такой волны (1 б) и изменение частоты $\Delta\omega$ вследствие напыления на обе пластины тонких диэлектрических слоев с проницаемостью ϵ и толщиной d , $d \ll L/m$ (+2 б).



Задача 2

Двояковогнутая тонкая линза составлена из двух плосковогнутых линз с радиусами кривизны R_1 , R_2 и коэффициентами преломления n_1 , n_2 соответственно. Найти фокусное расстояние линзы. (3 б)



Задача 3

Тонкая (не толще 200 нм) мыльная пленка с показателем преломления $n = 1.33$, натянутая на вертикальную раму, за счет силы тяжести внизу несколько толще, чем сверху. При наблюдении перпендикулярно поверхности в белом отраженном свете пленка имеет зеленоватый оттенок, максимально отражая свет с длиной волны λ_1 сверху и λ_2 внизу. На сколько толщина пленки внизу больше, чем сверху, если $\lambda_2 - \lambda_1 = 50$ нм? (3 б)

Экзаменационная работа 2

Задача 1

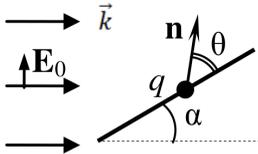
Разрешение матрицы фотоаппарата 6000×4000 пикселей. Длина волны: $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 600 \text{ nm}$, а относительная диафрагма объектива (отношение диаметра открытого отверстия к фокусному расстоянию объектива) изменяется в пределах $\frac{1}{22} \leq \frac{d}{f} \leq \frac{1}{4}$. Оценить минимальные геометрические размеры матрицы, при которых возможно такое разрешение. (3 б)

Задача 2

По нормали к плоскому экрану с круглым отверстием падает плоская монохроматическая волна. При этом интенсивность света в точке P , находящейся на оси отверстия, равна I . Чему будет равна интенсивность I' в этой точке, если расстояние от нее до экрана, а вместе с ним и радиус отверстия увеличить в 2 раза? Без экрана интенсивность в точке P равна I_0 . (5 б)

Задача 3

Плоская монохроматическая волна падает по нормали на дифракционную решетку из N щелей с периодом d . Под некоторым углом наблюдается максимум порядка m интенсивностью I . Чему будет равна интенсивность I' в этом же направлении, если в дифракционной решетке вырезать еще одну такую же щель на расстоянии x от первой? Расстояние измеряется между центрами щелей, щели не перекрываются. (4 б)



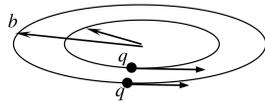
Задача 4

Плоская линейно поляризованная волна падает под углом α к непроводящей спице, закрепленной в плоскости поляризации волны. Вдоль спицы может без трения перемещаться заряд q . Найти дифференциальное сечение рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

волны этим зарядом под углом θ к спице. Скорость заряда $v \ll c$. (4 б)

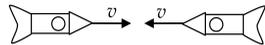
Задача 5

Два одинаковых заряда q движутся в одной плоскости по круговым орбитам вокруг общего центра в одном направлении. Радиус орбиты первого заряда равен a , второго – b ($a, b \ll \lambda$). Первый заряд движется с угловой скоростью ω . Расположение зарядов в начальный момент времени показано на рисунке. Во сколько раз усредненная по времени мощность излучения данной системы вращающихся зарядов в случае, если второй заряд имеет такую же угловую скорость, больше, чем в случае, если второй заряд имеет такую же линейную скорость? (4 б)



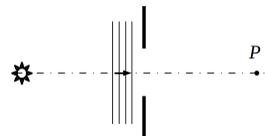
Задача 6

Два релятивистских космических корабля движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v . Свет какой частоты видит космонавт первого корабля, если прожектор второго корабля испускает свет частоты ω_0 ? (3 б)



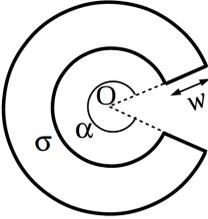
Задача 7

Неподвижный монохроматический источник света расположен вдали от непрозрачного экрана с круглым отверстием на оси симметрии. При этом для точки наблюдения P отверстие занимает первую зону Френеля. Какую минимальную скорость нужно придать источнику, и в каком направлении, чтобы интенсивность в точке P стала равной нулю? (4 б)



2016/2017 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

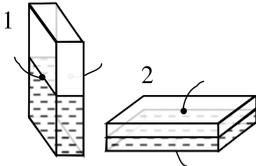


Задача 1

Сектор кольца углового размера α и толщины w (см. рисунок) равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ . Найти потенциал в точке O . Константу в выражении потенциала выбрать из условия $\varphi(\infty) = 0$. (2 б)

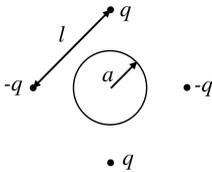
Задача 2

Два заряда q_1 и q_2 расположены в точках с декартовыми координатами $(0, y_1, 0)$ и $(x_2, 0, 0)$ соответственно. Найти величину заряда q и декартовы координаты точки, в которую его нужно поместить, чтобы величина электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов была как можно меньше. (2 б)



Задача 3

Тонкостенный замкнутый прямоугольный сосуд наполовину заполнен жидким диэлектриком. На две противоположные (наибольшие по площади) грани напылены металлические электроды, и к ним подключен измеритель емкости. В двух положениях, показанных на рисунке, проводятся измерения емкости. Отношения показаний равно $C_I/C_{II} = 4/3$. Найдите диэлектрическую проницаемость ϵ жидкости. Поперечные размеры двух металлизированных граней много больше расстояния между ними. (3 б)



Задача 4

В углах квадрата со стороной l находятся четыре заряда $q, -q, q$ и $-q$. В центр квадрата на одинаковом удалении от каждого из зарядов помещена незаряженная металлическая сфера

радиуса a . Найти потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от этой системы ($r \gg l > a\sqrt{2}$). (4 б)

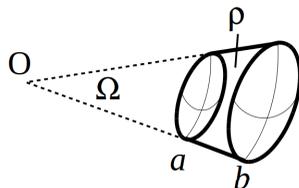
Задача 5

Найти изменение дипольного момента однородного диэлектрического шара с проницаемостью ϵ и радиусом R , помещенного в однородное электрическое поле \mathbf{E} , при поднесении к нему такого же шара на расстояние a ($a \gg R$). Рассмотреть случай, когда электрическое поле параллельно линии, соединяющей центры шаров. (4 б)

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Задача 1

Область шара, ограниченная телесным углом Ω и радиусами a и b (см. рисунок), равномерно заряжена с объемной плотностью ρ . Найти потенциал в точке O . Константу в выражении потенциала выбрать из условия $\varphi(\infty) = 0$. (2 б)

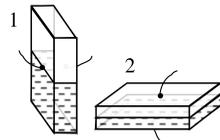


Задача 2

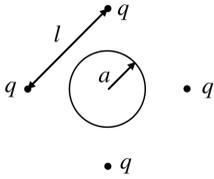
Два заряда q_1 и q_2 расположены в точках с декартовыми координатами $(x_1, 0, 0)$ и $(0, y_2, 0)$ соответственно. Найти величину заряда q и декартовы координаты точки, в которую его нужно поместить, чтобы величина электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов была как можно меньше. (2 б)

Задача 3

Тонкостенный замкнутый прямоугольный сосуд наполовину заполнен жидким диэлектриком. На две противоположные (наибольшие по площади) грани напылены металлические электроды, и к ним подключен измеритель емкости. В двух положениях, показанных



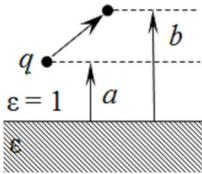
на рисунке, проводятся измерения емкости. Отношения показаний равно $C_I/C_{II} = 9/8$. Найдите диэлектрическую проницаемость ϵ жидкости. Поперечные размеры двух металлизированных граней много больше расстояния между ними. (3 б)



Задача 4

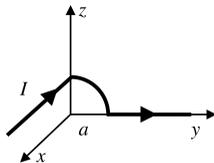
Четыре одинаковых заряда q размещены в углах квадрата со стороной l . Найти изменение потенциала $\delta\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях, если в центр квадрата на одинаковом удалении от каждого из зарядов поместить незаряженную металлическую сферу радиуса a ($r \gg l > a\sqrt{2}$). (4 б)

Контрольная работа 1.2, вариант 1



Задача 1

Верхнее полупространство заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ , нижнее – вакуум. Найти работу, которую надо совершить, чтобы переместить точечный заряд q из точки, отстоящей от границы раздела на расстояние b , в точку на расстоянии a . (3 б)

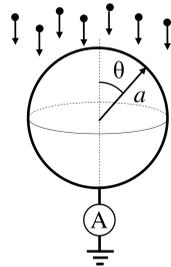


Задача 2

Провод состоит из двух полубесконечных отрезков, соединенных половиной дуги кольца радиуса a , как показано на рисунке. Первый полубесконечный отрезок находится в плоскости XU и параллелен оси x , половина кольца находится в плоскости YZ , а второй отрезок направлен непосредственно против оси y . По проводу течет ток I . Найдите магнитное поле \mathbf{H} в начале координат. (3 б)

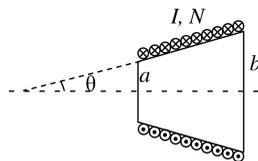
Задача 3

Однородный поток заряженных частиц падает сверху на полый сферический проводник радиуса a . Ток отводится на землю через амперметр по тонкому проводу, присоединенному к сфере снизу. Найти распределение поверхностных токов $i(\theta)$ на сфере, если показания амперметра равны I . (4 б)



Задача 4

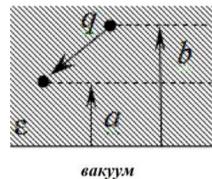
На усеченный конус (радиус меньшего основания a , а большего – b , угол между образующей и осью конуса θ) плотно намотаны $N \gg 1$ витков с током I . Найти магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от системы ($r \gg b$). (5 б)



Контрольная работа 1.2, вариант 2

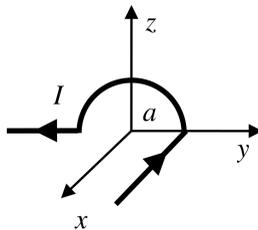
Задача 1

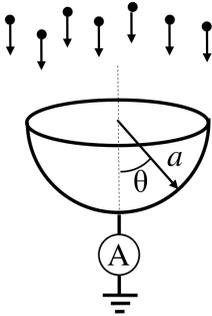
Верхнее полупространство заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ , нижнее – вакуум. Найти работу, которую надо совершить, чтобы переместить точечный заряд q из точки, отстоящей от границы раздела на расстояние b , в точку на расстоянии a . (3 б)



Задача 2

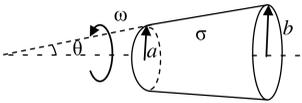
Провод состоит из двух полубесконечных отрезков, соединенных половиной дуги кольца радиуса a , как показано на рисунке. Первый полубесконечный отрезок находится в плоскости XU и параллелен оси x , половина кольца находится в плоскости YZ , а второй отрезок направлен непосредственно против оси y . По проводу течет ток I . Найдите магнитное поле \mathbf{H} в начале координат. (3 б)





Задача 3

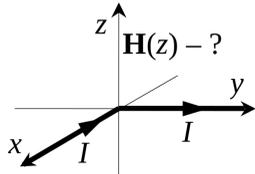
Однородный поток заряженных частиц падает сверху на полую полусферическую проводящую поверхность радиуса a (верхней грани нет). Ток отводится на землю через амперметр по тонкому проводу, присоединенному к полусфере снизу. Найти распределение поверхностных токов $\mathbf{i}(\theta)$ на полусфере, если показания амперметра равны I . (4 б)



Задача 4

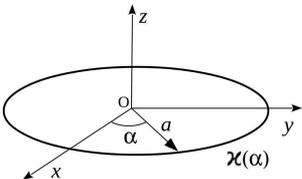
Боковая поверхность усеченного конуса (радиус меньшего основания a , а большего – b , угол между образующей и осью конуса θ) равномерно заряжена поверхностной плотностью заряда σ . Поверхность вращается с угловой частотой ω вокруг своей оси симметрии. Найти магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от системы ($r \gg b$). (5 б)

Экзаменационная работа 1



Задача 1

Тонкий провод протянут вдоль сторон прямого угла, образованного осями x и y . Ток I течет по проводу в направлении против оси x и вдоль оси y (см. рис.). Найти магнитное поле $\mathbf{H}(z)$ на оси z . (2 б)



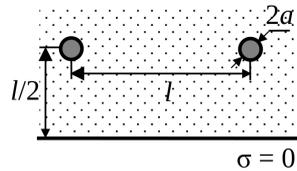
Задача 2

Тонкое круговое кольцо радиуса a расположено в плоскости xy и заряжено с линейной плотностью заряда $\chi(\alpha) = \chi_0 + \chi_1 \cos \alpha$ (см. рис.). Найти первые два неисчезающих члена разложения потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ вблизи начала

координат ($r \ll a$). Константу в выражении потенциала выбрать из условия $\varphi(\infty) = 0$. (4 б)

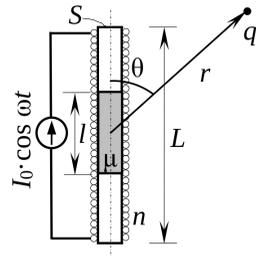
Задача 3

В верхнем полупространстве, заполненном проводимостью σ , на расстоянии $l/2$ от границы находятся два идеально проводящих шарика радиуса a . Расстояние между шариками l ($l \gg a$). Нижнее полупространство непроводящее. Найти сопротивление между шариками. (5 б)



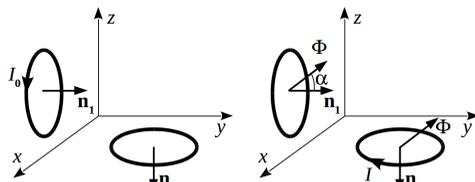
Задача 4

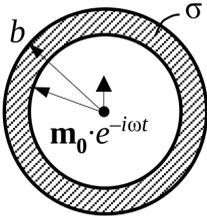
По цилиндрической катушке сечением S и длиной L с плотностью намотки n , в которую вставлен сердечник того же сечения длиной l с $\mu = 2$ ($\sqrt{S} \ll l < L$), течет переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. На большом расстоянии r от катушки ($r \gg L$) расположен точечный заряд q . Радиус-вектор заряда образует угол θ с осью катушки. Найти: а) магнитный дипольный момент системы, б) вектор-потенциал магнитного поля в точке нахождения заряда и в) силу, действующую на заряд. (5 б)



Задача 5

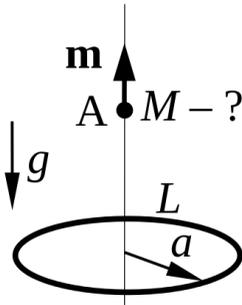
Два одинаковых сверхпроводящих плоских витка с индуктивностью L закреплены во взаимно перпендикулярных плоскостях, первый – в плоскости xz , второй – в плоскости xy . Вначале по первому витку течет ток I_0 , во втором тока нет. Затем, включают медленно увеличивающееся однородное магнитное поле, направленное параллельно плоскости yz под углом α к оси y . В некоторый момент ток в первом витке исчез, а ток во втором витке стал равным I . Определите коэффициент взаимной индукции двух витков. (4 б)





Задача 6

В центре проводящей сферической оболочки с внутренним радиусом a , внешним — b и проводимостью σ расположен точечный переменный магнитный диполь, магнитный момент которого изменяется по закону $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 e^{-i\omega t}$, где \mathbf{m}_0 — постоянный вектор. Найдите среднюю за период мощность тепловыделения в оболочке. Рассмотреть случай слабого скин-эффекта. (4 б)



Задача 7

Маленькая бусинка с магнитным моментом m может перемещаться вертикально без трения по спице, проходящей через центр горизонтально расположенного сверхпроводящего контура, представляющего собой окружность радиуса a с самоиндукцией L . В начальный момент бусинка расположена далеко от контура, а ток в контуре отсутствует. Затем бусинка перемещается в случайную точку A и отпускается без начальной скорости в поле тяжести g . В зависимости от положения точки бусинка может либо повиснуть над контуром либо упасть, пройдя через его центр. Считая магнитный момент бусинки направленным вдоль спицы, определить минимальную массу M , при которой бусинка пройдет сквозь кольцо независимо от положения точки A . (6 б)

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Задача 1

На плоскую границу раздела двух сред со стороны оптически более плотной среды под углом, меньшим угла полного внутреннего отражения, падает плоская электромагнитная ТЕ-волна. Най-

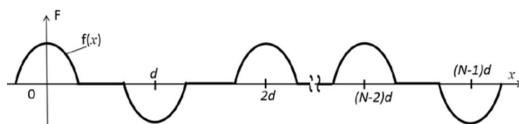
ти коэффициент пропускания по амплитуде, если коэффициент отражения по мощности равен R . (3 б)

Задача 2

Электромагнитная волна, поляризованная по кругу, падает из воздуха на плоскую границу диэлектрика под углом Брюстера, при этом коэффициент ее отражения по мощности равен $1/8$. Найти коэффициент отражения по мощности при нормальном падении. (5 б)

Задача 3

Найти фурье-образ $\tilde{F}(k)$ пространственной



функции $F(x) = \sum_0^{N-1} (-1)^n f(x - nd)$, где $f(x)$ – одиночный импульс (см. рисунок). Фурье-образ функции $f(x)$ считать известным и равным $\tilde{f}(k)$. (3 б)

Задача 4

В пустом прямоугольном волноводе сечением $a \times b$ и идеально проводящими стенками возбуждают электромагнитные волны на частоте ω_{11} , соответствующей минимальной частоте возбуждения E_{11} (H_{11}) волны. Найти отношение групповых скоростей распространения волн E_{10} и E_{01} на этой частоте. (4 б)

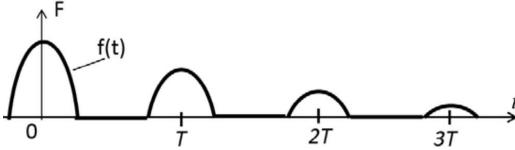
Контрольная работа 2.1, вариант 2

Задача 1

На плоскую границу раздела двух сред со стороны оптически менее плотной среды падает под некоторым углом плоская электромагнитная ТЕ-волна. Найти коэффициент пропускания по мощности, если коэффициент пропускания по амплитуде равен d . (3 б)

Задача 2

Электромагнитная волна, поляризованная по кругу, падает из оптически более плотной среды на плоскую границу диэлектрика под углом Брюстера, при этом коэффициент ее отражения по мощности равен $1/8$. Определить угол полного внутреннего отражения. (5 б)



$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - nd)$, где $f(x)$ – одиночный импульс (см. рисунок).

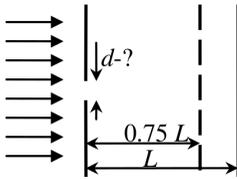
Фурье-образ функции $f(x)$ известен и равен $\tilde{f}(k)$. (3 б)

Задача 3

Найти фурье-образ $\tilde{F}(k)$ пространственной функции $F(x) =$

Задача 4

В пустом прямоугольном волноводе сечением $a \times b$ и идеально проводящими стенками возбуждают электромагнитные волны на частоте ω_{11} , соответствующей минимальной частоте возбуждения E_{11} (H_{11}) волны. Найти отношение фазовых скоростей распространения волн E_{10} и E_{01} на этой частоте. (4 б)

Контрольная работа 2.2, вариант 1**Задача 1**

На экран с круглым отверстием падает плоская монохроматическая ЭМ волна (длина волны λ). На расстоянии L от отверстия помещен экран, на котором напротив отверстия наблюдается максимум интенсивности света ($\lambda \ll d \ll L$). Когда расстояние между экранами уменьшают до $0.75L$, максимум монотонно сменяется минимумом. Найти диаметр отверстия d . (3 б)

Задача 2

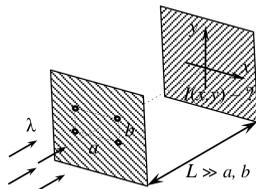
Одна поверхность тонкой двояковыпуклой линзы погружена в воду (показатель преломления линзы $n_L = 2$, воды $n = \frac{4}{3}$), другая находится в воздухе. На глубине $h = 20$ см вблизи оси линзы находится мелкий светящийся предмет. С какой стороны и на каком расстоянии от линзы находится его изображение, если радиус кривизны линзы $R = 40$ см? (4 б)

Задача 3

Тонкий прозрачный слой толщиной d с показателем преломления n_2 разделяет прозрачные среды с показателем преломления n_1 и n_3 ($n_1 > n_2 > n_3 > 1$). На этот слой из области с n_1 падает нормально к его поверхности ЭМ волна. При этом коэффициент отражения точно равен 0. Найти n_2 и n_3 , если известно, что $n_1 = 4/3$, $d = 600$ нм, $\lambda = 400$ нм, где λ – длина волны той же частоты в вакууме. (4 б)

Задача 4

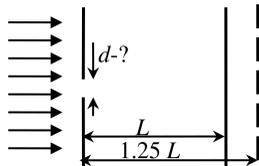
Плоская ЭМ волна длиной λ падает по нормали на непрозрачный экран-ширму, в котором проделаны четыре точечных отверстия, расположенных в вершинах прямоугольника со сторонами $a \times b$ (см. рисунок). На проекционном экране, расположенном на расстоянии $L \gg a, b$ от экрана-ширмы, наблюдается интерференционная картина. Найти распределение интенсивности $I(x, y)$ на проекционном экране, если интенсивность, создаваемая одним отверстием равна I_0 . (4 б)



Контрольная работа 2.2, вариант 2

Задача 1

На экран с круглым отверстием падает плоская монохроматическая ЭМ волна



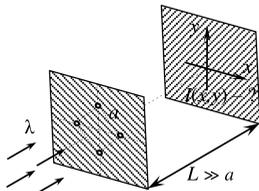
(длина волны λ). На расстоянии L от центра отверстия помещен экран, на котором напротив отверстия наблюдается максимум интенсивности света ($\lambda \ll d \ll L$). Когда расстояние между отверстием и экраном увеличивают до $1.25L$, максимум монотонно сменяется минимумом. Найдите диаметр отверстия d . (3 б)

Задача 2

Одна поверхность тонкой двояковыпуклой линзы погружена в воду (показатель преломления линзы $n_L = 2$, воды $n = \frac{4}{3}$), другая находится в воздухе. На высоте $h = 20$ см над линзой на ее оси находится мелкий светящийся предмет. С какой стороны и на каком расстоянии от линзы находится его изображение, если радиус кривизны линзы $R = 40$ см? Найти увеличение. (4 б)

Задача 3

Тонкий прозрачный слой толщиной d с показателем преломления n_2 разделяет прозрачные среды с показателем преломления n_1 и n_3 ($n_1 > n_2 > n_3 > 1$). На этот слой из области с n_1 падает нормально к его поверхности ЭМ волна. При этом коэффициент отражения точно равен 0. Найти n_2 и n_3 , если известно, что $n_1 = 6/5$, $d = 800$ нм, $\lambda = 400$ нм, где λ – длина волны той же частоты в вакууме. (4 б)



Задача 4

Плоская ЭМ волна длиной λ падает по нормали на непрозрачный экран-ширму, в котором проделаны четыре точечных отверстия, расположенных в вершинах прямоугольника со сторонами $a \times b$ (см. рисунок). На проекционном экране, расположенном на расстоянии $L \gg a, b$ от экрана-ширмы, наблюдается интерференционная картина. Найти распределение интенсивности $I(x, y)$ на проекционном экране, если интенсивность, создаваемая одним отверстием равна I_0 . (4 б)

Экзаменационная работа 2

Задача 1

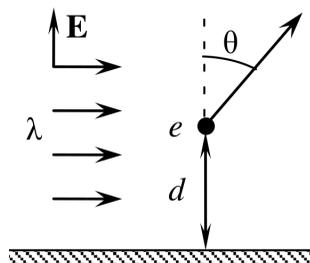
Капитан космического корабля “Звёздный разрушитель”, подлетая к жидкометаллической планете, заметил, что навстречу ему движется в точности такой же корабль. Решив атаковать врага, капитан выпускает в него мощный лазерный импульс красного цвета ($\lambda_{\text{к}}=650$ нм). “Вражеский” корабль ответил мощным лазерным импульсом зелёного цвета ($\lambda_{\text{з}}=550$ нм). Лишь тогда капитан сообразил, что воюет с собственным отражением. Оцените скорость, с которой двигался “Звёздный разрушитель”. Радиус планеты считать большим по сравнению с расстоянием от корабля до поверхности, гравитационными эффектами пренебречь. (3 б)

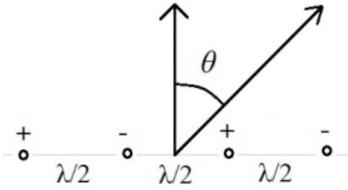
Задача 2

На периодическую дифракционную решетку из N щелей (ширина щелей много меньше периода) падает плоская ЭМ волна. Интенсивность дифрагированного света в главном максимуме равна I . Под некоторым углом наблюдается ближайший к нему минимум нулевой интенсивности. Чему будет равна интенсивность I' света под этим углом, если закрыть одну из щелей? (4 б)

Задача 3

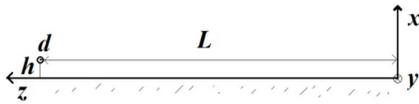
Заряд e располагается на расстоянии d от плоской границы проводника и находится в поле плоской монохроматической линейно поляризованной ЭМ волны длины λ . Волна распространяется вдоль границы проводника, а ее плоскость поляризации перпендикулярна границе. Найти дифференциальное сечение рассеяния волны на заряде $d\sigma/d\Omega$. Изобразите диаграмму направленности рассеянного излучения при $d = \lambda/2$. (4 б)





Задача 4

Антенна состоит из четырех параллельных друг другу полуволновых вибраторов, расположенных в одной плоскости. Токи в соседних вибраторах в противофазе, а расстояние между ними равно $\lambda/2$. Найти при каких значениях угла θ в плоскости рисунка излучение отсутствует, $I(\theta) = 0$? (3 б)



Задача 5

Линейный диполь

$\mathbf{d} = qa \cdot \cos(\omega t)\mathbf{e}_y$ находится на

высоте h от идеально ровной поверхности воды на расстоянии L от экрана, $L \gg h \gg c/\omega \gg a$. Найти $I(x)$ – распределение интенсивности ЭМ волны на экране ($x_{max} \ll L$) (3 б). Найти $I(x)$ для случая, если диполь повернули: $\mathbf{d} = qa \cdot \cos(\omega t)\mathbf{e}_x$ (+1 б).

Задача 6

На систему из трех проводящих бесконечно тонких параллельных поверхностей, для каждой из которых выполняется закон Ома $i = \sigma^* E$, где i – ток через единицу длины, а σ^* – соответствующая проводимость, по нормали к поверхностям падает плоская монохроматическая линейно поляризованная ЭМ волна. Расстояние между соседними поверхностями равно длине волны; вне их – вакуум. Найти отношение интенсивности волны, прошедшей через эту систему, к интенсивности падающей волны. (5 б)

Задача 7

Релятивистский электрон пролетает отрезок длиной L по оси прямоугольного волновода с сечением $a \times b$ ($a > b$), в котором возбуждена попутная электрону H_{01} -волна с частотой ω ($L \gg \frac{v}{\omega - kv}$, v – скорость электрона) и амплитудой продольного магнитного поля B_0 . Найти потери энергии электрона на излучение на этом участке и направление максимума интенсивности. (5 б)

Решения

2012/2013 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Из симметрии задачи ясно, что искомое поле направлено по y . Тогда выделим на отрезке элемент длины dx , содержащий элементарный заряд $dq = \frac{q}{a} dx$. Поле в точке $(x, y) = (0, h)$ от элементарного заряда в проекции на ось y равно

$$dE_y = \frac{dq}{r^2} \cos \alpha' = \frac{q}{ar^2} \cos \alpha' dx,$$

а поле от всего отрезка

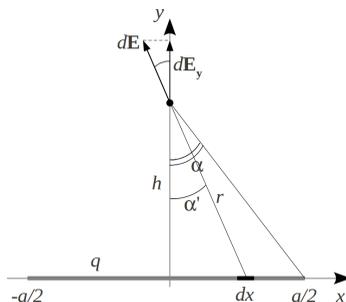
$$E = E_y = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{q}{ar^2} \cos \alpha' dx.$$

С учетом $x = h \operatorname{tg} \alpha'$, $r = \frac{h}{\cos \alpha'}$ удобно перейти к интегрированию по углу:

$$E = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{qh \cos^2 \alpha'}{a \cos^2 \alpha' h^2} \cos \alpha' d\alpha' = \frac{q}{ah} \int_{-\alpha}^{\alpha} d \sin \alpha' = 2 \frac{q}{ah} \sin \alpha.$$

Учтем, что $\sin \alpha = \frac{a}{2\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{2h}{a})^2}}$, откуда

$$E = \frac{2q}{ah\sqrt{(1 + \frac{2h}{a})^2}}.$$



Примечание. При $a \rightarrow 0$ получаем $E \rightarrow \frac{q}{h^2}$ – поле точечного заряда, а при $a \rightarrow \infty$ $E \rightarrow \frac{2q}{ah} = \frac{2\kappa}{h}$ – поле прямой бесконечной заряженной нити.

Решение задачи 2

Запишем теорему Гаусса для сферы радиуса R с центром в начале системы координат:

$$\oiint_{R=\text{const}} \mathbf{E}(R) d\mathbf{S} = 4\pi R^2 E_0 = 4\pi Q,$$

где Q - полный заряд шара. Отсюда

$$Q = E_0 R^2.$$

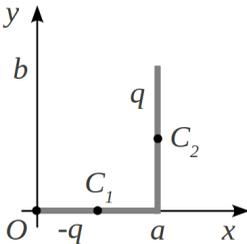
Задача обладает сферической симметрией, поэтому электрическое поле и вне шара имеет только радиальную компоненту. Тогда теорема Гаусса для сферы $r > R$ принимает вид:

$$\oiint_{r=\text{const}} \mathbf{E}(r) d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q,$$

откуда искомое поле

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{R^2}{r^2} E_0 \mathbf{e}_r.$$

Решение задачи 3



Поскольку система зарядов в целом нейтральна, то кулоновский член разложения потенциала равен нулю. Следующий, дипольный, член разложения равен

$$\varphi_d(x, y, z) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_x \cdot x + d_y \cdot y}{r^3},$$

где d_x, d_y - компоненты полного дипольного момента системы.

Если C_1, C_2 – середины соответствующих отрезков, то дипольные моменты этих отрезков относительно C_1 и C_2 соответственно равны нулю. С другой стороны формула преобразования дипольного момента при сдвиге системы отсчета

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}') = \mathbf{d}(\mathbf{r}) + Q \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

Поэтому дипольные моменты каждого отрезка и всей системы относительно начала координат равны соответственно

$$\mathbf{d}_1 = -q\frac{a}{2}\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{d}_2 = qa\mathbf{e}_x + q\frac{b}{2}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = q\left(a - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + q\frac{b}{2}\mathbf{e}_y = q\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + q\frac{b}{2}\mathbf{e}_y.$$

Подставляя найденные компоненты в выражение для потенциала, получим

$$\varphi(x, y, z) \approx q\frac{\frac{a}{2} \cdot x + \frac{b}{2} \cdot y}{r^3} = q\frac{a \cdot x + b \cdot y}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

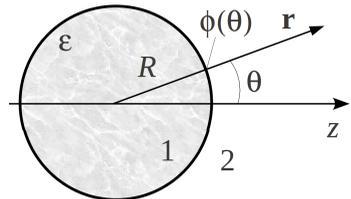
Решение задачи 4

Перепишем выражение для потенциала на сфере в виде:

$$\varphi(\theta) = \varphi_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \varphi_0 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \cos \theta. \quad (1)$$

Наша система обладает аксиальной симметрией, поэтому искомый потенциал является разложением по полиномам Лежандра P_ℓ :

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta). \quad (2)$$



Вид угловой зависимости потенциала на сфере указывает, полиномы каких степеней ℓ в этом разложении отличны от нуля. Первому и второму слагаемому в (1) отвечают $\ell = 0$ и $\ell = 1$ соответственно. В свою очередь степени полиномов Лежандра определяют вид зависимости потенциала от радиуса

$$\varphi(r, \theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) P_0(\cos \theta) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1(\cos \theta). \quad (3)$$

В области 1 ($r < R$) $\varphi_1(r = 0) \neq \infty$, поэтому в формуле (3) для φ_1 коэффициенты $B_0 = 0$ и $B_1 = 0$. А в области 2 ($r > R$) $\varphi_2(r \rightarrow \infty) \neq \infty$, поэтому в формуле (3) для φ_2 коэффициент $A_1 = 0$.

Итак, ищем решение для потенциала в виде:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta, \quad r < R;$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\mathbf{r}) &= \left(A_{02} + \frac{B_0}{r} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{B_1}{r^2} P_1(\cos \theta) = \\ &= A_{02} + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta, \quad r > R. \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая первое выражение в (4) с потенциалом на сфере, находим:

$$A_0 = \frac{\varphi_0}{2}, \quad A_1 = -\frac{\varphi_0}{2R}. \quad (5)$$

Кроме того, из условия непрерывности потенциала на границе вакуум-диэлектрик (которое эквивалентно равенству там тангенциальных полей) имеем

$$\begin{aligned} A_{02} + \frac{B_0}{R} &= A_0 = \frac{\varphi_0}{2}, \\ \frac{B_1}{R^2} &= A_1 R = -\frac{\varphi_0}{2} \rightarrow B_1 = -\frac{\varphi_0 R^2}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь перейдем от (4) к выражениям для поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= -A_1 \mathbf{e}_z, \quad r < R; \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \frac{B_0}{r^2} \mathbf{e}_r - \frac{B_1}{r^3} \mathbf{e}_z + 3 \frac{B_1 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r, \quad r > R. \end{aligned} \quad (7)$$

На этом этапе уже можно найти поверхностную плотность связанных зарядов на сфере:

$$\sigma_{св} = P_{1n} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_{1n} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} A_1 \cos \theta = \frac{\varphi_0(\varepsilon - 1)}{8\pi R} \cos \theta. \quad (8)$$

Далее, для обеспечения единственности решения недостает еще условия для потенциала на бесконечности. Если наложить наиболее естественное условие $A_{02} = 0$, то $B_0 = \frac{\varphi_0 R}{2}$, и ответ для потенциала и поля принимает однозначный вид*:

При $r < R$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta\right), \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2R} \mathbf{e}_z;$$

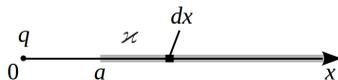
при $r > R$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2} \cos \theta\right), \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2} \left(\frac{R}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^3} \mathbf{e}_z - 3 \frac{R^2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r\right). \quad (9)$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1

Выделим на проволочке элементарный отрезок длиной dx в точке x . Заряд элементарного отрезка можно



рассматривать как точечный с величиной $\varkappa dx$. Поэтому сила на точечный заряд q со стороны элементарного отрезка направлена влево и равна

$$dF(x) = \frac{q \varkappa dx}{x^2}.$$

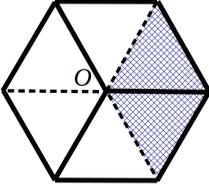
*Математическая постановка данной задачи такова, что выбор аддитивной постоянной в выражении для φ_2 не сводится к дополнительному слагаемому в решении, а меняет функциональную его часть. Так, если выбрать $A_{02} = \frac{\varphi_0}{2}$, то $B_0 = \left(\frac{\varphi_0}{2} - A_{02}\right)R = 0$ и кулоновский член в $\varphi_2(r, \theta)$ и $\mathbf{E}_2(r, \theta)$ вообще исчезает.

Сила со стороны всей полубесконечной проволоки получается интегрированием $dF(x)$ по длине проволоки:

$$F = \int_{x=a}^{\infty} dF(x) = q\kappa \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{q\kappa}{a}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, сила со стороны заряда q на проволоку направлена вправо и равна F по абсолютной величине.

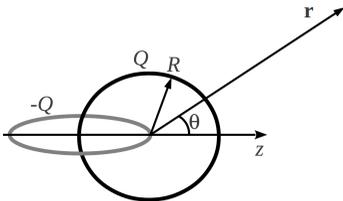
Решение задачи 2



Изобразим куб со стороны вершины (точки O) с точечным зарядом в плоскости с нормалью вдоль главной диагонали куба. Видно, что телесный угол Ω с вершиной в точке O , стягиваемый заштрихованной гранью, занимает треть угла, ограниченного гранями куба с общей вершиной O . С другой стороны последний составляет $1/8$ часть от полного телесного угла 4π стерадиана. Соответственно, телесный угол Ω равен $\frac{4\pi}{3 \cdot 8} = \frac{1}{24} \cdot 4\pi$.

Согласно теореме Гаусса, поток поля через замкнутую поверхность, окружающую точечный заряд q , равен $4\pi q$. Тогда искомый поток поля составляет

$$\Phi = \frac{4\pi q}{24} = \frac{\pi}{6} q.$$



Поскольку система зарядов в целом нейтральна, то кулоновский член разложения потенциала равен нулю (ср. с задачей 2 КР1.1 вар.1, стр. 72).

Следующий, дипольный, член разложения равен

$$\varphi_d(r, \theta) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_z \cos \theta}{r^2}.$$

Дипольные моменты каждого кольца относительно их центров равны нулю. Начало системы координат в нашей задаче помещено в центр правого кольца. Поэтому дипольный момент системы относительно начала системы координат равен

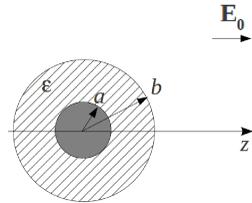
$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = -Q \cdot (-R)\mathbf{e}_z + 0 = QR\mathbf{e}_z.$$

Тогда для искомого потенциала получаем следующее выражение:

$$\varphi_d(r, \theta) \approx \varphi(r, \theta) = \frac{QR \cos \theta}{r^2}.$$

Решение задачи 4

Ищем решение для поля в диэлектрике и в вакууме в виде суперпозиции поля диполя и однородного поля:



$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\frac{d_1}{r^3}\mathbf{e}_z + 3\frac{d_1 \cos \theta}{r^3}\mathbf{e}_r + E_1\mathbf{e}_z, \quad a < r < b; \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -\frac{d_2}{r^3}\mathbf{e}_z + 3\frac{d_2 \cos \theta}{r^3}\mathbf{e}_r + E_0\mathbf{e}_z, \quad r > b.$$

Для трех неизвестных коэффициентов d_1, d_2, E_1 имеем три граничных условия:

$$E_{1\tau}(r = a) = 0;$$

$$E_{1\tau}(r = b) = E_{2\tau}(r = b); \tag{2}$$

$$D_{1n}(r = b) = D_{2n}(r = b).$$

Подставляя в (2) слагаемые из (1), спроецированные на направления \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ , получим:

$$-\frac{d_1}{a^3} \sin \theta + E_1 \sin \theta = 0;$$

$$-\frac{d_1}{b^3} \sin \theta + E_1 \sin \theta = -\frac{d_2}{b^3} \sin \theta + E_0 \sin \theta;$$

$$\left(-\frac{d_1}{b^3} \cos \theta + 3\frac{d_1}{b^3} \cos \theta + E_1 \cos \theta\right) \varepsilon = -\frac{d_2}{b^3} \cos \theta + 3\frac{d_2}{b^3} \cos \theta + E_0 \cos \theta, \quad (3)$$

или после упрощений

$$-\frac{d_1}{a^3} + E_1 = 0;$$

$$-\frac{d_1}{b^3} + E_1 = -\frac{d_2}{b^3} + E_0; \quad (4)$$

$$\left(2\frac{d_1}{b^3} + E_1\right) \varepsilon = 2\frac{d_2}{b^3} + E_0.$$

Решение системы (4) относительно неизвестных d_1 , d_2 , E_1 :

$$E_1 = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2 + 2(\varepsilon - 1)\frac{a^3}{b^3}};$$

$$d_1 = \frac{3E_0 a^3}{\varepsilon + 2 + 2(\varepsilon - 1)\frac{a^3}{b^3}}; \quad (5)$$

$$d_2 = \frac{3E_0(a^3 - b^3)}{\varepsilon + 2 + 2(\varepsilon - 1)\frac{a^3}{b^3}} + E_0 b^3.$$

Используя выражения из (5), можно записать решение для потенциала в компактном виде:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \varphi(a < r < b) = \frac{d_1 \cos \theta}{r^2} - E_1 r \cos \theta;$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \varphi(r > b) = \frac{d_2 \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta; \quad (6)$$

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi(r < a) = 0.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1

Пусть на внутреннем электроде содержится заряд Q . Тогда потенциал и напряженность электрического поля между двумя электродами будут иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} + \varphi_0 \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{A}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1)$$

Действительно, решение (1) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi(r)=0$ в объеме диэлектрика и гран. условиям $\Delta E_\tau = 0$ и $\Delta D_n = 4\pi\sigma$ на всех границах, следовательно, оно верно.

Для определения постоянной A запишем теорему Гаусса для вектора электрической индукции на сфере радиуса r , $a < r < b$:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} D_1(r) dS + \iint_{S_2} D_2(r) dS &= 2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(r) = \\ &= 2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{A}{r^2} = 4\pi Q, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда $A = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$.

Разность потенциалов между электродами составит

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{A}{a} - \frac{A}{b} = \frac{2Q(b-a)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ab},$$

а емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ab}{2(b-a)}.$$

Решение задачи 2

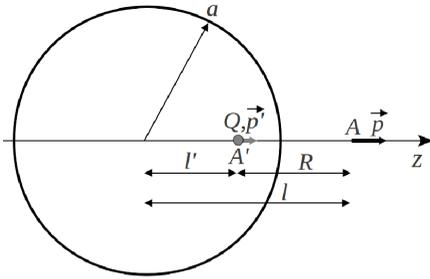
Представим точечный диполь как пару разноименных точечных зарядов $q_1 = -q$ и $q_2 = q$ с радиус-векторами $\mathbf{r}_1 = l\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{r}_2 = (l + \delta)\mathbf{e}_z$ соответственно, где $\delta = \frac{p}{q} \rightarrow 0$. Применим метод изображений. Величины и радиус-векторы соответствующих

зарядов-изображений выражаются как

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{a}{l}q, & \mathbf{r}'_1 &= \frac{a^2}{l}\mathbf{e}_z; \\ q'_2 &= -\frac{a}{l+\delta}q, & \mathbf{r}'_2 &= \frac{a^2}{l+\delta}\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Заряды-изображения разделены расстоянием

$$\delta' = r'_1 - r'_2 = \frac{a^2}{l} - \frac{a^2}{l+\delta} \approx \frac{a^2}{l^2}\delta.$$



Система изображений состоит из фиктивного точечного диполя \mathbf{p}' и фиктивного точечного заряда Q . И заряд и диполь локализованы в точке A' с радиусом-вектором $\frac{a^2}{l}\mathbf{e}_z$. Дипольный момент относительно точки A' равен

$$\mathbf{p}' = q'_2 \cdot (-\delta')\mathbf{e}_z = q \frac{a}{l+\delta} \frac{a^2}{l^2} \delta \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{a^3}{l^3} p \mathbf{e}_z.$$

Величина фиктивного заряда равна

$$Q = q'_1 + q'_2 = \frac{a}{l}q - \frac{a}{l+\delta}q \rightarrow \frac{a\delta}{l^2}q = \frac{ap}{l^2}.$$

Тогда диполь \mathbf{p} находится во внешнем поле точечного заряда и нейтрального точечного диполя (оба расположены в одной точке). Это поле удобно выражать в системе координат с началом в точке A' :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^2}\mathbf{e}_R - \frac{p'}{R^3}\mathbf{e}_z + 3\frac{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5},$$

где \mathbf{R} - радиус-вектор с началом в точке A' . В точках, лежащих на оси z , поле принимает вид

$$\mathbf{E} = \left(\frac{Q}{Z^2} + 2\frac{p'}{Z^3} \right) \mathbf{e}_z$$

(Z , как и R , отсчитывается от точки A').

Сила, действующая на диполь \mathbf{p} , с учетом геометрии нашей задачи равна

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = p \frac{\partial E}{\partial Z} \mathbf{e}_z = -2 \frac{Qp}{Z^3} \mathbf{e}_z - 6 \frac{pp'}{Z^4} \mathbf{e}_z = \left(-2 \frac{ap^2}{l^2 Z^3} - 6 \frac{a^3 p^2}{l^3 \cdot Z^4} \right) \mathbf{e}_z.$$

Подставляя $Z = l - l' = l - \frac{a^2}{l} = \frac{l^2 - a^2}{l}$, после несложных преобразований получим:

$$\mathbf{F} = -2 \frac{al(l^2 + 2a^2)p^2}{(l^2 - a^2)^4} \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Сила на диполь направлена влево, следовательно, возникает притяжение.

Энергия взаимодействия между диполем и сферой равна

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{Z^2} + 2 \frac{p'}{Z^3} \right) p = -\frac{1}{2} \left(\frac{QZ + 2p'}{Z^3} \right) p = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{ap}{l^2} \frac{l^2 - a^2}{l} + 2 \frac{a^3}{l^3} p}{\left(\frac{l^2 - a^2}{l} \right)^3} p = -\frac{a(l^2 + a^2)}{2(l^2 - a^2)^3} p^2. \end{aligned}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ поставлен, так как $E \sim p$, а следовательно, мы имеем дело с другим диполем.

Рассмотрим предельный случай $l = a + h$, $a \rightarrow \infty$ (\mathbf{p} на расстоянии h от проводящей плоскости):

$$\mathbf{F} = -2 \frac{a(a+h)((a+h)^2 + 2a^2)p^2}{((a+h)^2 - a^2)^4} \mathbf{e}_z \rightarrow -2 \frac{a \cdot a(3a^2)p^2}{(2ah)^4} \mathbf{e}_z = -\frac{6p^2}{16h^4} \mathbf{e}_z. \quad (2)$$

Получим независимое решение для силы на диполь вблизи проводящей плоскости. В этом случае система зарядов-образований - нейтральный диполь с моментом $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, расположенный симметрично оригиналу относительно проводящей плоскости. Тогда

внешнее поле:

$$\mathbf{E} = 2 \frac{p'}{Z^3} \mathbf{e}_z.$$

Сила на диполь \mathbf{p}

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = p \frac{\partial E}{\partial Z} \mathbf{e}_z = -6 \frac{pp'}{Z^4} \mathbf{e}_z = -6 \frac{p^2}{(2h)^4} \mathbf{e}_z = -\frac{6p^2}{16h^4} \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

что совпадает с результатом (2).

Заметим, что формула $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$ верна как для упругого, так и для жесткого диполя (в отличие от формулы $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$, дающей завышенную вдвое силу, если дипольный момент $\mathbf{p} \propto \mathbf{E}(\mathbf{r})$ формируется во внешнем неоднородном поле). Поэтому результат (3) можно сравнить с ответом к задаче 2.50 из задачника [1] (стр. 113) для силы между двумя (жесткими) произвольно ориентированными диполями*. Эта сила достигает максимума по модулю, как раз когда один диполь “смотрит в хвост” другому, и равна

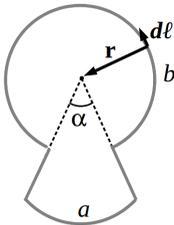
$$F_{max} = -\frac{6p_1 p_2}{r^4},$$

что с учетом $p_1 = p_2 = p$ и $r = 2h$ совпадает с результатом (2,3).

Решение задачи 3

Согласно закону Био-Савара магнитное поле в точке O, индуцируемое элементом проводника $d\ell$ с током I , равно

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\ell \times \mathbf{r}]}{r^3}.$$



Поле $d\mathbf{B}$, наводимое любым элементарным отрезком $d\ell$ дуги с током, направлено по нормали к плоскости рисунка, а радиально ориентированные отрезки не дают вклада в \mathbf{B} . Тогда величина полного поля выражается интегралом

$$B = \frac{I}{c} \left(\int_{r=a} \frac{d\ell}{r^2} + \int_{r=b} \frac{d\ell}{r^2} \right) = \frac{I}{c} \left(\int_{\alpha}^{2\pi} \frac{bd\alpha'}{b^2} + \int_0^{\alpha} \frac{ad\alpha'}{a^2} \right) = \frac{I}{c} \left(\frac{2\pi - \alpha}{b} + \frac{\alpha}{a} \right).$$

*См. также задачу 164 из задачника Батыгина, Топтыгина [3].

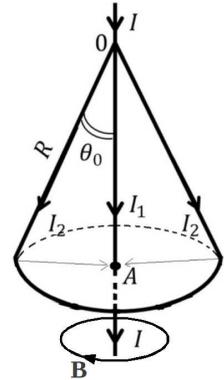
Решение задачи 4

Аксиально-симметричные токи с нулевой азимутальной компонентой создают магнитное поле, имеющее только α -компоненту (в цилиндрических координатах). Это следует из того, что вектор-потенциал такой системы также обладает аксиальной симметрией, причем $A_\alpha = 0$. Действительно, тогда компоненты вектора $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ в цилиндрических переменных выражаются как

$$B_R = \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} = 0$$

$$B_z = \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} = 0$$

$$B_\alpha = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}.$$



Тогда применим теорему Стокса. Взяв контур в виде окружности радиуса R вокруг оси z , получим

$$\text{под "юбкой" } (R < z \text{ tg } \theta_0) : 2\pi R B(R) = \frac{4\pi}{c} I_1 \rightarrow B(R) = \frac{2I_1}{cR},$$

$$\text{снаружи } 2\pi R B(R) = \frac{4\pi}{c} I \rightarrow B(R) = \frac{2I}{cR}.$$

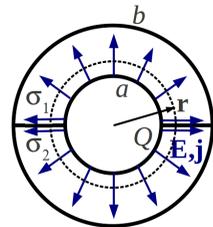
Направление поля показано на рисунке.

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1

Пусть на внутреннем электроде содержится заряд Q . Тогда потенциал и напряженность электрического поля между двумя электродами будут иметь вид

$$\varphi(r) = \varphi_0 - A \ln r \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r, \quad (1)$$



где r – радиальная переменная в цилиндрических координатах.

Действительно, решение (1) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi(r) = 0$ в объеме диэлектрика и граничным условиям $\Delta E_\tau=0$ и $\Delta D_n = 4\pi\sigma$ на всех границах раздела, следовательно, оно верно.

Для определения постоянной A применим теорему Гаусса, взяв в качестве области интегрирования цилиндр длиной l и радиуса r , $a < r < b$ (рассматриваем общий случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$):

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} D_1(r) dS + \iint_{S_2} D_2(r) dS &= \pi r l (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(r) = \\ &= \pi r l (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{A}{r} = 4\pi Q, \end{aligned}$$

откуда $A = \frac{4Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l}$.

Разность потенциалов между электродами составит

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = A \ln \frac{b}{a} = \frac{4Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l} \ln \frac{b}{a}.$$

Ток между электродами находим как интеграл от объемной плотности тока по площади боковой поверхности цилиндра радиуса r ,

$a \leq r < b$:

$$\begin{aligned} I &= \iint_r (\mathbf{j}(r) \cdot d\mathbf{S}) = \sigma_1 \iint_{S_1} E(r) dS + \sigma_2 \iint_{S_2} E(r) dS = \frac{4Q(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)lr} \pi r l = \\ &= \frac{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned}$$

Тогда сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)l} \ln \frac{b}{a}.$$

Решение задачи 2

Выясним, где в нашей системе имеются объемные или поверхностные заряды. В проводящей среде их нет, поскольку в стационарных условиях

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \rightarrow 4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

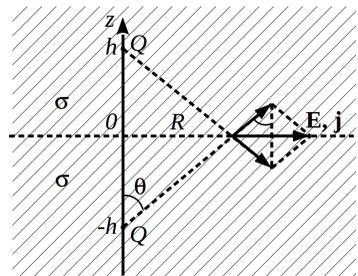
Поэтому заряд может быть сосредоточен только на оголенном конце и на поверхности воды. Окружив оголенный конец замкнутой поверхностью и записав для нее теорему Гаусса, получим

$$\oiint_{\text{без провода}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \approx \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma} \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\sigma} = 4\pi Q.$$

Таким образом, на оголенном конце сосредоточен заряд $Q = \frac{I}{4\pi\sigma}$. Заряд на поверхности воды распределен так, что выполняется граничное условие $\Delta j_n = 0 \rightarrow j_n = 0 \rightarrow E_n = 0$.

Для определения $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ при $z \leq 0$ не обязательно находить само распределение поверхностной плотности заряда. Вместо этого применим метод изображений. Рассмотрим систему из двух точечных зарядов $+Q$ в точках $(0, 0, -h)$ и $(0, 0, h)$ среды, проводимость которой равна σ во всем пространстве. В области $z \leq 0$ эта система создает точно такое же распределение потенциала, что и в нашей задаче. Действительно, при $z \leq 0$ потенциал удовлетворяет тому же уравнению Пуассона

$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi Q \cdot \delta(x, y, z + h)$ и так же выполняются условия $E_n|_{z=0}=0$, $\varphi(\infty)=0$. Тогда, с учетом теоремы единственности решения, поле в проводящем полупространстве реальной системы выражается суперпозицией полей от двух точечных зарядов. В



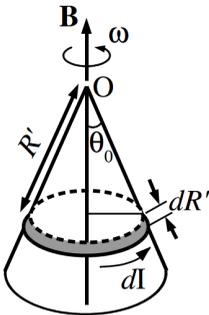
частности, при $z = 0$ это поле удобно выразить в цилиндрических переменных (см. рисунок):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= 2 \frac{Q}{h^2 + R^2} \sin \theta \cdot \mathbf{e}_R = 2 \frac{Q}{(h^2 + R^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \mathbf{e}_R = \\ &= \frac{2QR}{(h^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_R. \end{aligned}$$

Тогда плотность тока при $z = 0$ равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{2\sigma QR}{(h^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_R = \frac{IR}{2\pi(h^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_R.$$

Решение задачи 3



Выделим на конусе элементарную площадку в виде пояска шириной dR' на расстоянии R' от вершины. Элементарная площадка содержит заряд, равный

$$dQ = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R' \sin \theta_0 dR'.$$

Вращающийся заряженный поясок эквивалентен кольцевому току величиной

$$dI = \frac{\omega dQ}{2\pi} = \frac{2\pi\omega\sigma R' \sin \theta_0 dR'}{2\pi} = \omega\sigma R' \sin \theta_0 dR'.$$

Кольцевой ток наводит в точке O элемент магнитной индукции, направленный по оси конуса и равный

$$dB = \frac{2\pi R' \sin \theta_0 dI}{c R'^2} \sin \theta_0 = \frac{2\pi\omega\sigma}{c} \sin^3 \theta_0 dR'.$$

Полное магнитное поле в точке O находим, интегрируя по длине образующей конуса:

$$B = \frac{2\pi R\omega\sigma}{c} \sin^3 \theta_0.$$

Наконец, учтем, что площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi R^2 \sin \theta_0$. Тогда

$$B = \frac{2\pi R \omega Q}{cS} \sin^3 \theta_0 = \frac{2\omega Q}{cR} \sin^2 \theta_0.$$

Решение задачи 4

На больших расстояниях $\mathbf{B}(z)$ представляет собой поле магнитного диполя

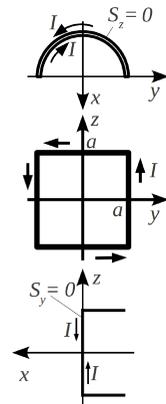
$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mathbf{m}}{z^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{z})}{z^5} \mathbf{z}. \quad (1)$$

Для определения i -й компоненты вектора \mathbf{m} будем проецировать рамку на плоскость с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$ и пользоваться формулой $m_i = \frac{IS_i}{c}$:

$$m_z = \frac{IS_z}{c} = 0 \text{ (см. рисунок).}$$

$$m_x = \frac{IS_x}{c} = \frac{4Ia^2}{c} \text{ (см. рисунок).}$$

$$m_y = \frac{IS_y}{c} = 0 \text{ (см. рисунок).}$$



Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{4Ia^2}{cz^3} \mathbf{e}_x.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Пусть до соединения проводников потенциал во внешнем пространстве описывается функцией $\varphi_1(\mathbf{r})$. Эта функция является решением уравнения Лапласа $\Delta\varphi_1(\mathbf{r}) = 0$ с граничными условиями $\varphi_1(\infty) = 0$ и $\varphi_1|_{\Gamma} = V_1$. Представим потенциал тел после их соединения как $V = k \cdot V_1$. Условию на внешней границе $\varphi|_{\Gamma} = k \cdot V_1$ отвечает распределение потенциала вне проводника $\varphi(\mathbf{r}) = k\varphi_1(\mathbf{r})$. Оно удовлетворяет уравнению Лапласа и условию $\varphi(\infty) = 0$, поэтому является единственным. Тогда и напряженности поля в любой точке \mathbf{r} до и после соединения проводников связаны пропорцией

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}).$$

По теореме Гаусса для произвольной замкнутой области, ограниченной поверхностью S и включающей наш проводник, имеем

$$\oiint \mathbf{E}_1(\mathbf{r})d\mathbf{S} = 4\pi(q_1 + q_2),$$

$$\oiint \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{S} = \oiint k \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r})d\mathbf{S} = k \cdot \oiint \mathbf{E}_1(\mathbf{r})d\mathbf{S} = 4\pi(q_1 + q_2).$$

Сравнивая два равенства, получаем, что $k = 1$ и $V = V_1$.

Решение задачи 2

Из условия непрерывности стационарного тока в области проводника следует отсутствие там объемных зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \rightarrow \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0,$$

поэтому потенциал при $z > 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, из непрерывности тока следует равенство нулю нормальных компонент векторов плотности тока и поля на границе $z = 0$.

Предположим, что в области $z \geq 0$ потенциал и электрическое поле описываются функциями вида

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{A}{r} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{A}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r.\end{aligned}\tag{1}$$

Заметим, что решению в виде (1) соответствует ситуация, когда весь заряд в системе сосредоточен в точке $\mathbf{r} = 0$. Это невозможно, если провод с током не изолирован, поскольку тогда с одной стороны поле вдоль провода равно $-\frac{I}{4\pi\sigma z^2} \mathbf{e}_z$, а с другой оно там обязано быть равным нулю как тангенциальное на границе с металлом. Поэтому будем полагать, что провод с током изолирован и экранирован. Тогда вектор $\mathbf{E}|_{z=0}$ удовлетворяет граничным условиям

$$D_{n1} = D_{n2} = 0, \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Кроме того функция $\varphi(r)$ равна нулю на бесконечности и удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому по теореме единственности решение в виде (1) является единственно верным.

Для определения постоянной A запишем интеграл от плотности тока по полусфере радиуса r :

$$\iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \sigma \iint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = 2\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2} = 2\pi\sigma A = I \tag{2}$$

Отсюда $A = \frac{I}{2\pi\sigma}$ и тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{I}{2\pi\sigma r}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r.\end{aligned}\tag{3}$$

Поскольку распределение тока аксиально симметрично и $j_\alpha = 0$, то магнитное поле имеет только азимутальную компоненту (ср. с

задачей 4 КР1.2 на стр. 83). Тогда находим его по теореме Стокса. В области $z < 0$:

$$2\pi r B(R) = \frac{4\pi I}{c} \rightarrow B(R) = \frac{2I}{cR},$$

где R – расстояние до оси z .

В области $z > 0$ (ток через сечение круга радиуса $r \sin \theta$ вычисляем, интегрируя \mathbf{j} по сферическому сегменту радиуса r):

$$\begin{aligned} 2\pi r \sin \theta B(r, \theta) &= \frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j}(r) d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\theta \frac{I}{2\pi r^2} 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' = \\ &= \frac{4\pi I(1 - \cos \theta)}{c}, \end{aligned}$$

откуда

$$B(r, \theta) = 2 \frac{1 - \cos \theta}{cr \sin \theta} I = \frac{2I}{cr} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Решение задачи 3

Без учета границы в плоскости $x = 0$ распределение тока в пространстве вне полости описывается функцией (см. задачу 3.24 из [1])

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \frac{a^3}{2r^3} \mathbf{j}_0 - 3 \frac{a^3 (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{2r^5}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} - радиус-вектор с началом в центре полости.

Наличие границы $x = 0$ с непроводящим полупространством накладывает гран. условие $j_n = 0$. Решение, удовлетворяющее в области $x > 0$ уравнению Лапласа, гран. условиям $j_n|_{x=0} = 0$ и $\mathbf{j}(\infty) = \mathbf{j}_0$, формально является верным (а по теореме о единственности - единственно верным) в бесконечной проводящей среде, в которую, наряду с исходной полостью, симметрично ей относительно плоскости $x = 0$, вводится еще одна такая же полость. При этом нарушится условие $j_n = 0$ на поверхности полости-оригинала, но вносимая погрешность составляет уже следующий

за первым член разложения по малому параметру a/l и поэтому здесь ее можно не учитывать. Влияние двух полостей на ток в области $x > 0$ сводится к суперпозиции решений типа (1), где в качестве \mathbf{r} выступают радиус-векторы - каждый с началом в центре соответствующей полости (при этом r - расстояние от любого из центров до точки границы, в которой ищется \mathbf{j}). На границе $x = 0$ такая суперпозиция оставит только тангенциальную компоненту вектора плотности тока:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r})|_{x=0} &= \mathbf{j}_0 + 2 \frac{a^3}{2r^3} \mathbf{j}_0 - 2 \cdot 3 \frac{a^3 \cdot r \cos \theta \cdot r \cos \theta}{2r^5} \mathbf{j}_0 = \\ &= \mathbf{j}_0 \cdot \left(1 + \frac{a^3}{l^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin^3 \theta \right). \end{aligned}$$

Решение задачи 4

Угадываем решение для магнитного поля в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \frac{4\pi In}{c} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi\mu_1 In}{c} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{4\pi\mu_2 In}{c} \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \text{внутри соленоида.}$$

$\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$ снаружи.

Такое решение в объеме удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

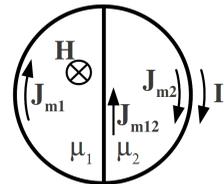
а на границах раздела - гран. условиям

$$H_{1t} = H_{2t},$$

$$H_{t \text{ in}} - H_{t \text{ out}} = \frac{4\pi}{c} nI,$$

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$B_{n \text{ in}} = B_{n \text{ out}}.$$



Векторы намагниченности в двух областях равны

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mu_1 - 1}{4\pi} \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1 - 1}{4\pi} \frac{4\pi I n}{c} \mathbf{e}_z = \frac{(\mu_1 - 1) I n}{c} \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mu_2 - 1}{4\pi} \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_2 - 1}{4\pi} \frac{4\pi I n}{c} \mathbf{e}_z = \frac{(\mu_2 - 1) I n}{c} \mathbf{e}_z.$$

Поверхностную плотность молекулярных токов на боковой поверхности цилиндра находим по формуле

$$J_{m1} = c M_{1t} = (\mu_1 - 1) I n,$$

$$J_{m2} = c M_{2t} = (\mu_2 - 1) I n.$$

Поверхностная плотность молекулярных токов на границе раздела двух магнетиков равна

$$J_{m12} = J_{m2} - J_{m1} = (\mu_2 - \mu_1) I n.$$

Направления молекулярных токов для случая $1 < \mu_1 < \mu_2$ показаны на рисунке.

Решение задачи 5

При изменении формы сверхпроводящей рамки сохраняется поток магнитного поля через ее сечение. Изменение потока внешнего поля компенсируется полем, возникающим вследствие тока самоиндукции:

$$B_0 \cdot (\pi r^2 - a^2) = \frac{L I}{c}.$$

Периметр контура равен

$$4a = 2\pi r,$$

тогда

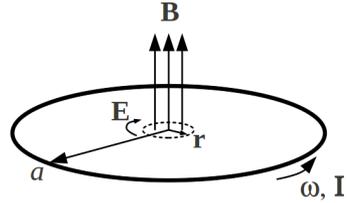
$$r = \frac{2a}{\pi}$$

и искомый ток

$$I = \frac{c}{L} B_0 \cdot (\pi r^2 - a^2) = \frac{c}{L} B_0 \cdot a^2 \left(\pi \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - 1 \right) = \frac{ca^2 B_0}{L} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

Решение задачи 6

Через фиксированное поперечное сечение проводника за время dt проходит заряд $dq = q \frac{\omega a}{2\pi a} dt$, что эквивалентно току $I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{q\omega(t)}{2\pi} = \frac{qk}{2\pi} t$, протекающему по неподвижному кольцу.



Мгновенное магнитное поле в центре кольца радиуса a с током I равно

$$\mathbf{B}(t) = \frac{2\pi I(t)}{ca} \mathbf{e}_z = \frac{qk}{ca} t \mathbf{e}_z.$$

Внутри круга радиуса $r \ll a$ поле можно считать однородным. Тогда поток вектора $\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ через сечение круга радиуса r составит

$$\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{c} \frac{qk}{ca} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi qkr^2}{c^2 a}.$$

Согласно закону Фарадея циркуляция электрического поля по окружности радиуса r равна

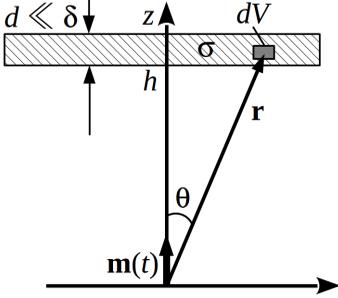
$$2\pi r E(r) = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\pi qkr^2}{c^2 a},$$

откуда

$$E(r) = - \frac{\pi qkr^2}{c^2 a \cdot 2\pi r} = - \frac{qkr}{2c^2 a}$$

(направление показано на рисунке).

Решение задачи 7



диска имеем *

Поле магнитного диполя аксиально симметрично, причем $B_\alpha = 0$, поэтому индуцируемое им электрическое поле имеет только азимутальную (α -) компоненту. Скин-эффект слабый, поэтому считаем, что токи, индуцируемые внутри диска, не меняют распределение магнитного поля. Тогда по закону Фарадея внутри

$$\begin{aligned} E_\alpha(r, \theta, t) \cdot 2\pi r \sin \theta &= -\frac{1}{c} \int \frac{dB_r(r, \theta', t)}{dt} dS = \\ &= -\frac{im_0 \omega e^{i\omega t}}{c} \int_0^\theta 2 \frac{\cos \theta'}{r^3} 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' = -2\pi \frac{i\omega m_0}{cr} \sin^2 \theta e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

* Поток вектора $(-\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt})$ можно вычислять по любой поверхности, натянутой на контур, но удобно это делать по сферическому сегменту радиуса r . Учтем при этом, что r -компонента магнитного поля равна

$$B_r = \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right) \cdot \mathbf{e}_r = 3 \frac{(mr \cos \theta)r}{r^5} - \frac{m \cos \theta}{r^3} = \frac{2m}{r^3} \cos \theta.$$

Симметрия задачи позволяет вычислить E_α , вообще избегая интегрирования. Для этого запишем уравнение Максвелла через вектор-потенциал:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d \text{rot } \mathbf{A}}{dt},$$

откуда

$$E_\alpha(r, \theta, t) = -\frac{i\omega}{c} A_\alpha(r, \theta, t) = -\left| \frac{i\omega}{c} \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{r}]}{r^3} \right| = -\frac{i\omega}{c} \frac{m_0 \sin \theta}{r^2} e^{i\omega t}.$$

откуда

$$\hat{E} = E_{\alpha}(r, \theta, t) = \frac{i\omega m_0}{cr^2} \sin \theta e^{i(\omega t + \pi)},$$

$$\hat{j} = \sigma E(r, \theta, t) = \sigma \frac{i\omega m_0}{cr^2} \sin \theta e^{i(\omega t + \pi)}.$$

Интенсивность тепловыделения в кольце, усредненная по времени, равна (учитываем, что для тонкого диска $z \approx h$, $r \approx \frac{h}{\cos \theta}$, $dr \approx \frac{d}{\cos \theta}$ и элементарный объем $dV = 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = (2\pi d \cdot h^2) \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta$)

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \hat{E} \hat{j}^* dV = \sigma \left(\frac{\omega m_0}{c} \right)^2 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^2 \theta \cos^4 \theta}{h^4} \pi d \cdot h^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \\ &= \pi d \cdot \sigma \left(\frac{\omega m_0}{c} \right)^2 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{h^2} d\theta = \pi d \cdot \sigma \left(\frac{\omega m_0}{ch} \right)^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{4}. \end{aligned}$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

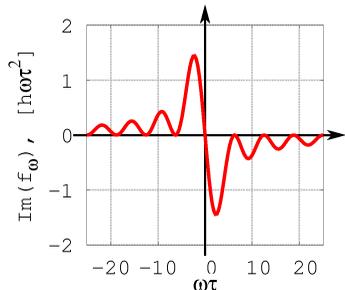
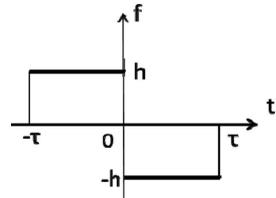
Из нечетности функции $f(t)$ следует, что $\operatorname{Re} f_{\omega} = 0$, а $\operatorname{Im} f_{\omega} = 2\operatorname{Im} \tilde{f}_{\omega}$, где

$$\tilde{f}_{\omega} = \int_0^{\tau} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Мнимая часть подынтегральной функции нечетна по ω , поэтому нечетна и спектральная плотность, в частности, $f_{\omega}(0) = 0$.

Вычислим мнимую часть f_{ω} :

$$\operatorname{Im} f_{\omega} = 2\operatorname{Im} \int_0^{\tau} f(t) e^{i\omega t} dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\tau} \operatorname{Im} \{ f(t) e^{i\omega t} \} dt = -2h \int_0^{\tau} \sin \omega t dt = \frac{2h}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{\tau} = \\
 &= \frac{2h}{\omega} (\cos \omega \tau - 1) = -\frac{4h}{\omega} \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} = -h\omega \tau^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega \tau}{2}.
 \end{aligned}$$

Итак, $f_{\omega} = -ih\omega \tau^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega \tau}{2}$ (см. рисунок), $|f_{\omega}| = h|\omega| \tau^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega \tau}{2}$.

Решение задачи 2

Решение задачи значительно упрощается, если принять во внимание следующие соображения. При условии $\mu_1 = \mu_2$ отраженная волна отсутствует для ТМ-волны, падающей под углом Брюстера к нормали

$$\phi_{TM} = \phi_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1},$$

где $n_{12} = \sqrt{\varepsilon_{12}\mu_{12}}$.

Заметим, что при замене $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$ все формулы, применимые к ТМ-волне, переносятся на ТЕ-волну и наоборот (это обусловлено симметричностью уравнений Максвелла без сторонних зарядов и токов проводимости по отношению к такой замене). В частности, угол Брюстера будет характеризовать ТЕ-волну, не дающую отражения, и выразится как *

$$\phi_{TE} = \phi_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon \mu_2}{\varepsilon \mu_1}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

* В частном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\mu_1 = \mu_2$ отраженная волна отсутствует при любом угле падения. Это следует из того, что при этих условиях в формуле Френеля для ТЕ-волны

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{\mu_2 \sin \phi_2 \cos \phi - \mu_1 \sin \phi \cos \phi_2}{\mu_2 \sin \phi_2 \cos \phi + \mu_1 \sin \phi \cos \phi_2}$$

углы ϕ_2 и ϕ равны и числитель обращается в нуль.

Видно также, что если $\phi \neq \frac{\pi}{4}$, то отраженная волна не обращается в нуль даже при $n_1 = n_2$, если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, так что $\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2$.

Решение задачи 3

Запишем вектор напряженности электрического поля в отраженной волне как

$$\mathbf{E}_1(z, t) = (a_1, b_1) e^{i(kz - \omega t)}$$

Из граничного условия $E_{t0} = E_{t1}$ при $z = 0$ следует, что

$$a_1 = -E_0, \quad b_1 = -iE_0.$$

Тогда суперпозиция падающей и отраженной волн дает

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(z, t) + \mathbf{E}_1(z, t) &= E_0 e^{-i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}, i(e^{-ikz} - e^{ikz})) = \\ &= -2iE_0 \sin kz e^{-i\omega t} (1, i) = 2E_0 \sin kz e^{-i\omega t} (-i, 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Магнитное поле в падающей и отраженной волнах находим, пользуясь общим выражением $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$ для плоской волны в вакууме:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] = [-\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0] = -(0, 0, 1) \times (1, i, 0) E_0 e^{i(-kz - \omega t)} = \\ &= E_0 (i, -1) e^{i(-kz - \omega t)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{c}{\omega} [-\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1] = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_1] = (0, 0, 1) \times (-1, -i, 0) E_0 e^{i(kz - \omega t)} = \\ &= E_0 (i, -1) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned}$$

Тогда суперпозиция магнитных полей в падающей и отражен-

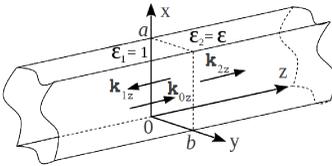
ной волнах дает *

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(z, t) + \mathbf{H}_1(z, t) &= \\ &= E_0 e^{-i\omega t} (i(e^{-ikz} + e^{ikz}), -(e^{-ikz} + e^{ikz})) = \\ &= 2E_0 \cos kz e^{-i\omega t} (i, -1) \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая выражения, записанные в (1),(2), видим, что $\mathbf{H} = -\mathbf{E}$, если $\sin kz = \cos kz$, т. е. при $kz = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Отсюда

$$z_n = \frac{\pi}{k} \left(\frac{1}{4} + n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи 4



Решим задачу для общего случая H_{lm} -волны. Тип отраженной и прошедшей волны можно установить на основе следующих соображений. Падающая волна представляет собой суперпозицию плоских волн с частотой ω и волновыми векторами с компонентами k_{0z} , $k_{0x} = \pm \frac{l\pi}{a}$ и $k_{0y} = \pm \frac{m\pi}{b}$. При отражении и преломлении каждой плоской волны сохраняются частота и тангенциальные компоненты волнового вектора. Поскольку решения для отраженной и прошедшей волн являются результатом суперпозиции соответствующих плоских волн, то параметры k_x , k_y и ω войдут в результирующие решения без изменений. С другой стороны решения для отраженной и прошедшей волн должны удовлетворять волновому уравнению с граничными условиями на стенках волновода. Для прямоугольного волновода это могут быть только волны типа E_{lm} или H_{lm} , причем, индексы l, m однозначно задаются геометрическими размерами a, b и значениями

с частотой ω и волновыми векторами с компонентами k_{0z} , $k_{0x} = \pm \frac{l\pi}{a}$ и $k_{0y} = \pm \frac{m\pi}{b}$. При отражении и преломлении каждой плоской волны сохраняются частота и тангенциальные компоненты волнового вектора. Поскольку решения для отраженной и прошедшей волн являются результатом суперпозиции соответствующих плоских волн, то параметры k_x , k_y и ω войдут в результирующие решения без изменений. С другой стороны решения для отраженной и прошедшей волн должны удовлетворять волновому уравнению с граничными условиями на стенках волновода. Для прямоугольного волновода это могут быть только волны типа E_{lm} или H_{lm} , причем, индексы l, m однозначно задаются геометрическими размерами a, b и значениями

*Свойства стоячей волны в случае произвольной поляризации \mathbf{E} описаны, например, в учебном пособии [5].

k_x , k_y , которые, как уже было отмечено, не изменяются при отражении и прохождении волны. E_{lm} -волна исключается, так как ее появление сделает невозможным одновременное выполнение условий непрерывности нормальных компонент D_n и B_n на границе раздела двух сред. Таким образом, и отраженная и прошедшая волна имеют тип H_{lm} с теми же индексами и частотой, что и падающая.

С учетом сделанных предварительных замечаний выпишем выражения для всех компонент полей в падающей “0”, отраженной “1” и прошедшей “2” волнах *:

$$H_{0z}(x, y, z, t) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$$

$$H_{0x}(x, y, z, t) = \frac{i}{\varkappa^2} k_{0z} \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = -\frac{ik_{0z} k_x}{\varkappa^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$$

$$H_{0y}(x, y, z, t) = \frac{i}{\varkappa^2} k_{0z} \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} = -\frac{ik_{0z} k_y}{\varkappa^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$$

$$E_{0x}(x, y, z, t) = \frac{i}{\varkappa^2} \frac{\mu_0 \omega}{c} \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} = -\frac{ik_y \mu_0 \omega}{\varkappa^2 c} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$$

$$E_{0y}(x, y, z, t) = -\frac{i}{\varkappa^2} \frac{\mu_0 \omega}{c} \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = \frac{ik_x \mu_0 \omega}{\varkappa^2 c} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$$

$$E_{0z}(x, y, z, t) = 0$$

$$H_{1z}(x, y, z, t) = H_1 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(-k_{0z} z - \omega t)}$$

$$H_{1x}(x, y, z, t) = \frac{ik_{0z} k_x}{\varkappa^2} H_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(-k_{0z} z - \omega t)}$$

$$H_{1y}(x, y, z, t) = \frac{ik_{0z} k_y}{\varkappa^2} H_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(-k_{0z} z - \omega t)}$$

* Если записать падающую волну как $\propto e^{i(\omega t - k_{0z} z)}$ (вместо $e^{i(k_{0z} z - \omega t)}$), то во всех последующих формулах следует заменить k_z на $-k_z$ и ω на $-\omega$.

$$E_{1x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_y \mu_0 \omega}{\varkappa^2 c} H_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(-k_{0z} z - \omega t)}$$

$$E_{1y}(x, y, z, t) = \frac{ik_x \mu_0 \omega}{\varkappa^2 c} H_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(-k_{0z} z - \omega t)}$$

$$E_{1z}(x, y, z, t) = 0$$

$$H_{2z}(x, y, z, t) = H_2 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$H_{2x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_{2z} k_x}{\varkappa^2} H_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$H_{2y}(x, y, z, t) = -\frac{ik_{2z} k_y}{\varkappa^2} H_2 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$E_{2x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_y \mu_2 \omega}{\varkappa^2 c} H_2 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$E_{2y}(x, y, z, t) = \frac{ik_x \mu_2 \omega}{\varkappa^2 c} H_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$E_{2z}(x, y, z, t) = 0,$$

где обозначены $k_x = \frac{\pi l}{a}$, $k_y = \frac{\pi m}{b}$, $\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2$; $l=0, 1, 2, \dots$, $m=0, 1, 2, \dots$, исключая комбинацию $\{l, m\} = \{0, 0\}$.

Тогда гран. условия $E_{0x} + E_{1x} = E_{2x}$, $H_{0x} + H_{1x} = H_{2x}$ на границе раздела $z=0$ после подстановки выписанных выражений и сокращений на общие множители (а также с учетом $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$) принимают вид:

$$\begin{cases} k_{0z} H_0 - k_{0z} H_1 = k_{2z} H_2 \\ H_0 + H_1 = H_2 \end{cases}$$

с решением

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

где обозначено $\alpha = \frac{k_{2z}}{k_{0z}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}n^2 - k_x^2 - k_y^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}}$. $\frac{H_1}{H_0} < 0$, т. е. фаза волны

при отражении терпит скачок на π .

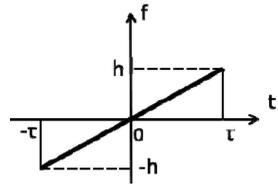
$$\text{В случае } l = m = 1 \quad \alpha = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c^2}n^2 - (\frac{\pi}{a})^2 - (\frac{\pi}{b})^2}{\frac{\omega^2}{c^2} - (\frac{\pi}{a})^2 - (\frac{\pi}{b})^2}}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Из нечетности функции $f(t)$ следует, что $\text{Re}f_\omega = 0$, а $\text{Im}f_\omega = 2\text{Im}\tilde{f}_\omega$, где

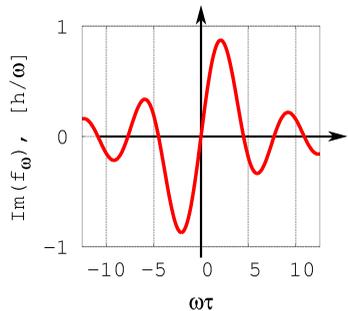
$$\tilde{f}_\omega = \int_0^\tau f(t)e^{i\omega t} dt.$$



Мнимая часть подынтегральной функции нечетна по ω , поэтому нечетна и спектральная плотность, в частности, $f_\omega(0) = 0$.

Вычислим мнимую часть f_ω :

$$\begin{aligned} \text{Im}f_\omega &= 2\text{Im} \int_0^\tau f(t)e^{i\omega t} dt = \\ &= 2 \int_0^\tau \text{Im} \{ f(t)e^{i\omega t} \} dt = 2 \int_0^\tau \frac{h}{\tau} t \sin \omega t dt = -\frac{2h}{\omega\tau} \int_0^\tau t d(\cos \omega t) = \\ &= -\frac{2h}{\omega\tau} t \cos \omega t \Big|_0^\tau + \frac{2h}{\omega\tau} \int_0^\tau \cos \omega t dt = -\frac{2h}{\omega\tau} \tau \cos \omega\tau + \frac{2h}{\omega^2\tau} \sin \omega t \Big|_0^\tau = \\ &= -\frac{2h}{\omega} \cos \omega\tau + \frac{2h}{\omega^2\tau} \sin \omega\tau = \frac{2h}{\omega^2\tau} (\sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega\tau). \end{aligned}$$



Итак, $f_\omega = i \frac{2h}{\omega^2 \tau} (\sin \omega \tau - \omega \tau \cos \omega \tau)$ (см. рисунок),

$$|f_\omega| = \frac{2h}{\omega^2 \tau} |(\sin \omega \tau - \omega \tau \cos \omega \tau)|.$$

Решение задачи 2

Естественный свет можно разложить на ТЕ- и ТМ-волны. При $\mu_1 = \mu_2$ формулы Френеля для отраженных волн имеют вид

$$\frac{E_1}{E_0} \Big|_{TE} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}$$

$$\frac{E_1}{E_0} \Big|_{TM} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)}$$

Видно, что амплитуда отраженной волны может обращаться в ноль только для ТМ-волны при условии $\theta_0 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (из-за особенности в знаменателе). С другой стороны по закону Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_0}{\sin(\pi/2 - \theta_0)} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

что определяет угол Брюстера $\theta_0 = \theta_B$ через показатели преломления сред.

По условию задачи $2\theta_B = \phi$, откуда искомый показатель преломления жидкости

$$n_1 = n_2 \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} = \frac{3}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}.$$

Решение задачи 3

Подставим выражение $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ в уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial (\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

откуда имеем:

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Следовательно, вектор, записанный внутри ротора, является градиентом скалярной функции координат. Эта функция $-\varphi$, которая по условию нашей задачи равна нулю:

$$E + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi = 0.$$

Таким образом, соотношения, позволяющие найти поля \mathbf{E} и \mathbf{B} через \mathbf{A} , установлены.

Отметим, что, поскольку вектор-потенциал зависит только от одной координаты, то он описывает плоскую волну. Поэтому $\mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$.

С учетом вида зависимости заданного \mathbf{A} от \mathbf{r} и t

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{A}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}.$$

Тогда искомые поля легко находятся

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{A} = i\frac{\omega}{c}(a, ib)e^{i(kz-\omega t)} = \frac{\omega}{c}(a, ib)e^{i(kz-\omega t+\pi/2)},$$

что представляет собой левополяризованную эллиптическую волну с мгновенной амплитудой $E = \frac{\omega}{c}\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}$, где $\psi = kz - \omega t$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = ik(0, 0, 1) \times (a, ib)e^{i(kz-\omega t)} = \\ &= ik(-ib, a)e^{i(kz-\omega t)} = k(b, ia)e^{i(kz-\omega t)}, \end{aligned}$$

что представляет собой левополяризованную эллиптическую волну с мгновенной амплитудой $B = k\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}$. Главные

оси эллипса для \mathbf{B} и \mathbf{E} параллельны x и y .

Поскольку $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon\mu}$, то $B = \sqrt{\epsilon\mu}E$.

Решение задачи 4

Решим задачу для общего случая E_{lm} -волны.

Тип отраженной и прошедшей волны можно установить на основе следующих соображений. Падающая волна представляет собой суперпозицию плоских волн с частотой ω и волновыми векторами с компонентами k_{0z} , $k_{0x} = \pm \frac{l\pi}{a}$ и $k_{0y} = \pm \frac{m\pi}{b}$. При отражении и преломлении каждой плоской волны сохраняются частота и тангенциальные компоненты волнового вектора. Поскольку решения для отраженной и прошедшей волн являются результатом суперпозиции соответствующих плоских волн, то параметры k_x , k_y и ω войдут в результирующие решения без изменений. С другой стороны решения для отраженной и прошедшей волн должны удовлетворять волновому уравнению с граничными условиями на стенках волновода. Для прямоугольного волновода это могут быть только волны типа E_{lm} или H_{lm} , причем, индексы l, m однозначно задаются геометрическими размерами a, b и значениями k_x, k_y , которые, как уже было отмечено, не изменяются при отражении и прохождении волны. H_{lm} -волна исключается, так как она влечет нарушение условий непрерывности нормальных компонент D_n и B_n на границе раздела $z = 0$. Таким образом, и отраженная и прошедшая волна имеют тип E_{lm} с теми же индексами и частотой, что и падающая.

С учетом сделанных предварительных замечаний выпишем выражения для всех компонент полей в падающей "0", отражен-

ной “1” и прошедшей “2” волнах:

$$E_{0z}(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_0 z z - \omega t)}$$

$$E_{0x}(x, y, z, t) = \frac{i}{\chi^2} k_{0z} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = \frac{ik_{0z} k_x}{\chi^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_0 z z - \omega t)}$$

$$E_{0y}(x, y, z, t) = \frac{i}{\chi^2} k_{0z} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = \frac{ik_{0z} k_y}{\chi^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{0x}(x, y, z, t) = -\frac{i}{\chi^2} \frac{\varepsilon_0 \omega}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = -\frac{ik_y \varepsilon_0 \omega}{\chi^2 c} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{0y}(x, y, z, t) = \frac{i}{\chi^2} \frac{\varepsilon_0 \omega}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = \frac{ik_x \varepsilon_0 \omega}{\chi^2 c} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{0z}(x, y, z, t) = 0$$

$$E_{1z}(x, y, z, t) = E_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(-k_0 z z - \omega t)}$$

$$E_{1x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_{0z} k_x}{\chi^2} E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(-k_0 z z - \omega t)}$$

$$E_{1y}(x, y, z, t) = -\frac{ik_{0z} k_y}{\chi^2} E_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(-k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{1x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_y \varepsilon_0 \omega}{\chi^2 c} E_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(-k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{1y}(x, y, z, t) = \frac{ik_x \varepsilon_0 \omega}{\chi^2 c} E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(-k_0 z z - \omega t)}$$

$$H_{1z}(x, y, z, t) = 0$$

$$E_{2z}(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$E_{2x}(x, y, z, t) = \frac{ik_{2z} k_x}{\chi^2} E_2 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$E_{2y}(x, y, z, t) = \frac{ik_{2z} k_y}{\chi^2} E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$H_{2x}(x, y, z, t) = -\frac{ik_y \varepsilon_2 \omega}{\varkappa^2 c} E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$H_{2y}(x, y, z, t) = \frac{ik_x \varepsilon_2 \omega}{\varkappa^2 c} E_2 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_{2z} z - \omega t)}$$

$$H_{2z}(x, y, z, t) = 0,$$

где обозначены $k_x = \frac{\pi l}{a}$, $k_y = \frac{\pi m}{b}$, $\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2$; $l = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Тогда гран. условия $E_{0x} + E_{1x} = E_{2x}$, $H_{0x} + H_{1x} = H_{2x}$ на границе раздела $z=0$ после подстановки выписанных выражений и сокращений на общие множители (а также с учетом $\mu=1$, $\varepsilon_0=1$ и $\varepsilon_2=\varepsilon$) принимают вид:

$$\begin{cases} k_{0z} E_0 - k_{0z} E_1 = k_{2z} E_2 \\ E_0 + E_1 = \varepsilon E_2 \end{cases}$$

с решением

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon + \alpha} = \frac{n^2 - \alpha}{n^2 + \alpha},$$

где обозначено $\alpha = \frac{k_{2z}}{k_{0z}} = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_x^2 - k_y^2}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}}$. В случае $l = m = 1$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Решим задачу об оптической разности хода для общего случая трех промежутков длиной L_1 , L_2 , L_3 с оптически плотной средой в среднем промежутке. Оптическая длина хода луча SO_1 равна (см. рисунок):

$$l_1 = SO_1 = L_1 + nL_2 + L_3.$$

Оптическая длина хода луча от S до O_2 рассчитывается с учетом преломления на границах раздела В параксиальном приближении имеем:

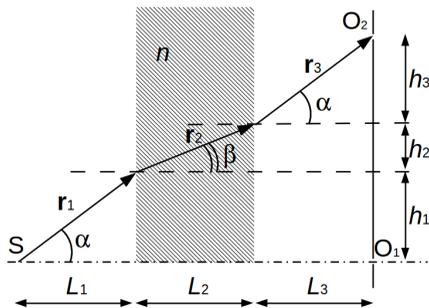
$$l_2 = r_1 + nr_2 + r_3 \approx L_1 + \frac{h_1^2}{2L_1} + n \left(L_2 + \frac{h_2^2}{2L_2} \right) + L_3 + \frac{h_3^2}{2L_3}, \quad (1)$$

где смещения h_1, h_2, h_3 луча по вертикали на каждом промежутке составляют

$$h_1 = L_1 \alpha,$$

$$h_2 = L_2 \beta = L_2 \frac{\alpha}{n},$$

$$h_3 = L_3 \alpha.$$

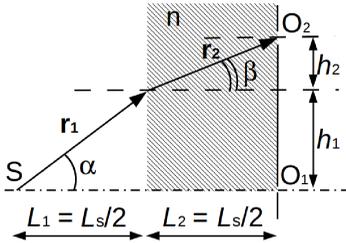


Из условия $h_1 + h_2 + h_3 = O_1O_2 = d$ получим

$$\alpha = \frac{d}{L_1 + nL_2 + L_3}. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает:

$$\begin{aligned} l_2 &= L_1 + nL_2 + L_3 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{L_1^2}{L_1} + n \frac{L_2^2}{n^2 L_2} + \frac{L_3^2}{L_3} \right) = \\ &= L_1 + nL_2 + L_3 + \frac{\alpha^2}{2} \left(L_1 + \frac{L_2}{n} + L_3 \right) = \\ &= L_1 + nL_2 + L_3 + \frac{d^2}{2(L_1 + nL_2 + L_3)}. \end{aligned}$$



Оптическая разность хода двух лучей равна

$$l_1 - l_2 = \frac{d^2}{2(L_1 + nL_2 + L_3)}. \quad (3)$$

В нашем случае $L_1 = \frac{L_s}{2}$, $L_2 = \frac{L_s}{2}$, $L_3 = 0$, поэтому $l_1 - l_2 = \frac{d^2}{L_s(1+n)}$.

Таким образом, щелевые источники O_1 , O_2 излучают с фазовым сдвигом $k \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d^2}{L_s}$. Тогда интенсивность в точках экрана задается выражением

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos k \left(\frac{d \cdot (x - d/2)}{L} + \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d^2}{L_s} \right) \right).$$

Условие нулевого максимума:

$$k \left(\frac{d \cdot (x_0 - d/2)}{L} + \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d^2}{L_s} \right) = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{d}{2} - \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d^2}{L_s} \cdot \frac{L}{d} = \frac{d}{2} - \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d \cdot L}{L_s}$$

Видность мала (источники некогерентны), если разброс по фазе за счет некогерентности $\delta k = \frac{\delta \omega}{c}$ превышает π :

$$\frac{\delta \omega}{c} \left| \frac{d \cdot (x - d/2)}{L} + \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d^2}{L_s} \right| \geq \pi.$$

Умножим обе части неравенства на $\frac{Lc}{d \cdot \delta \omega}$:

$$|x - x_0| \geq \frac{\pi Lc}{d \cdot \delta \omega}.$$

Критическое расстояние от точки x_0 оценивается как

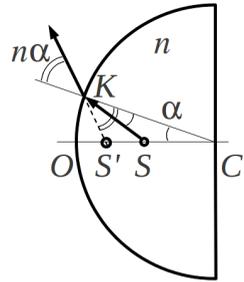
$$|x_c - x_0| = \frac{\pi Lc}{d \cdot \delta\omega}.$$

Тот же результат можно получить, приравняв оптическую разность хода в точке x_c продольной длине когерентности $\ell_{\parallel} = \frac{\pi c}{\delta\omega}$.

Решение задачи 2

Способ 1 (через геометрические построения).

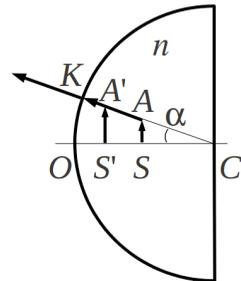
Найдем положение изображения как точку пересечения двух вышедших из линзы лучей, исходно (до преломления на границе “стекло-воздух”) имеющих общим началом центр пузырька. Один исходящий из пузырька луч направим влево вдоль оптической оси – его направление после выхода из линзы не изменится (на рисунке этот луч не показан).



Другой исходящий из пузырька луч направим под произвольным малым углом к горизонтали. Пусть нормаль в точке преломления этого луча имеет угол наклона α (см. рисунок). Изображение S' пузырька лежит на пересечении продолжения преломленного луча с прямой OC . Поскольку угол α мал, то $SK \approx SC$, следовательно, треугольник CSK равнобедренный и угол падения на границу раздела $\widehat{CKS} = \alpha$. Тогда угол преломления равен $n\alpha$. Применим теорему синусов к треугольнику CKS' :

$$\frac{CK}{\sin \widehat{CS'K}} = \frac{CS'}{\sin \widehat{CKS'}}.$$

Подставим значения углов:



$$\frac{CK}{\sin(\pi - \alpha - n\alpha)} = \frac{CS'}{\sin(n\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow CS' = R \frac{n}{n+1}, OS' = \frac{R}{n+1} = \frac{R}{3}.$$

Чтобы найти коэффициент увеличения, придадим пузырьку малый размер SA и рассмотрим луч, исходящий из точки A и направленный по радиусу CK . Направление этого луча после преломления не изменится, поэтому изображение A' точки A окажется на пересечении прямой CK (продолжения преломленного луча) и вертикали, опирающейся на точку S' . Искомый коэффициент увеличения равен

$$\frac{S'A'}{SA} = \frac{CS'}{CS} = \frac{nR}{(n+1)R/2} = \frac{4}{3}.$$

Способ 2 (через матричный формализм).

Начальное и конечное состояния луча связаны матричным равенством

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix},$$

где матрица преобразования луча равна произведению матриц пустого промежутка в стекле, преломления на сферической границе раздела и пустого промежутка в воздухе:

$$\begin{aligned} M &= T_2 M_R T_1 = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1}{n} \\ \frac{1-n}{R} & \frac{1-n}{n} \frac{d_1}{R} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для ответа на вопросы, поставленные в задаче, достаточно выписать выражения двух элементов матрицы M :

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{d_1}{n} + d_2 \left(\frac{1-n}{n} \frac{d_1}{R} + 1 \right), \\ m_{11} &= 1 + \frac{d_2}{R} (1-n). \end{aligned}$$

Положение изображения находим из условия $m_{12} = 0$ (при этом x_2 не зависит от α_1 , т. е. все лучи, исходящие от пузырька, приходят в результате преобразования в одну и ту же точку x_2):

$$\frac{d_1}{n} + d_2 \left(\frac{1-n}{n} \frac{d_1}{R} + 1 \right) = 0,$$

$$d_2 = -\frac{d_1}{n - (n-1)\frac{d_1}{R}} = -\frac{\frac{R}{2}}{2 - (2-1)\frac{1}{2}} = -\frac{R}{3}.$$

Поскольку $d_2 < 0$, изображение находится по правую сторону от сферической поверхности (оно лежит в точке пересечения *продолжений* выходящих влево лучей и, таким образом, является мнимым).

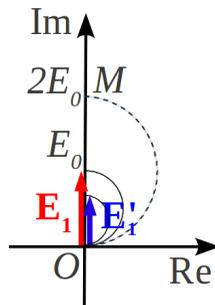
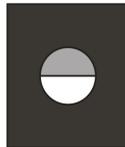
Коэффициент увеличения находим, подставляя полученное d_2 в выражение для m_{11} :

$$m_{11} = 1 - \frac{1}{3}(1 - 2) = \frac{4}{3}.$$

Решение задачи 3

Для определения амплитуды волны в заданной точке на оси воспользуемся диаграммой Френеля. Действие отверстия до того, как его частично закрыли пленкой, соответствует полной первой зоне Френеля и описывается вектором с началом в точке O и концом в точке M на вертикальном диаметре полуокружности радиуса E_0 (на рисунке показана пунктиром). Действие половины отверстия, открытой по диаметру, сводится к ограничению по углу и описывается вектором $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{OM}$ длиной E_0 .

После закрытия полупрозрачной пленкой действие верхней половины отверстия уменьшается еще в $\sqrt{2}$ раз (так как $E \propto \sqrt{I}$) и описывается вектором \mathbf{E}'_1 длиной $E'_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$.



Оба вектора сонаправлены и в сумме дают

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

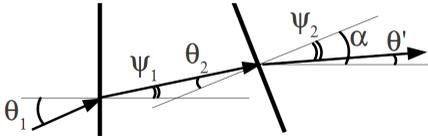
с амплитудой

$$E = E_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Тогда интенсивность в заданной точке равна

$$I = I_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Решение задачи 4



Сначала выясним, как связаны направления падающего и прошедшего через призму лучей. Без ограничения общности рассмотрим верхнюю призму. Для падающего луча угол наклона к горизонтали и угол падения θ_1 совпадают. Пусть $\theta_1 \ll 1$. Тогда согласно закону Снеллиуса угол преломления на первой границе равен

$$\psi_1 = \frac{\theta_1}{n}.$$

Угол падения на вторую границу равен $\theta_2 = \alpha - \psi_1$. Рассмотрим сначала случай $\psi_1 < \alpha$, представленный на рисунке. Тогда $\theta_2 > 0$. Угол преломления на второй границе

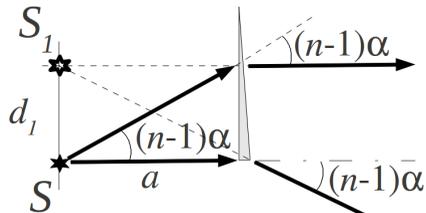
$$\psi_2 = n\theta_2.$$

Поскольку нормаль ко второй границе составляет с горизонталью угол α , то угол наклона выходящего луча равен

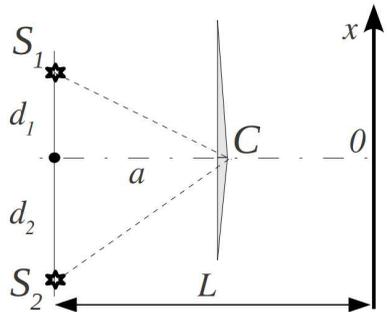
$$\theta' = \alpha - \psi_2 = \alpha - n \left(\alpha - \frac{\theta_1}{n} \right) = \theta_1 - (n - 1)\alpha. \quad (1)$$

Если $\alpha < \psi_1$, то $\theta_2 < 0$ и $\psi_2 < 0$ – преломленный луч выйдет по другую сторону от нормали, нежели на рисунке. Нетрудно убедиться, что формула (1) подходит и для этого случая.

Теперь рассмотрим два луча, исходящие из щелевого источника: один – горизонтально, другой – под малым углом $(n - 1)\alpha$. Прошедшие через призму лучи наклонены под углами $(1 - n)\alpha$ и 0 соответственно. Продолжения выходящих лучей пересекаются в точке S_1 на высоте $d_1 = a(n - 1)\alpha$ над источником S . Т. е. выходящие лучи распределены так, как если бы призмы не было, а вместо щелевого источника-оригинала был щелевой источник-изображение*.



Очевидно, что нижняя призма создает изображение, смещенное на расстояние $d_2 = a(n - 1)\beta$ вниз от оригинала. Таким образом, система эквивалентна схеме Юнга. Оба изображения когерентны. Но, поскольку в точке C фазы лучей, выходящих из верхней и нижней призмы, равны, а расстояния S_1C и S_2C различны, то нижний источник-изображение отстает по



*Наши рассуждения справедливы, пока вертикальный размер призмы меньше либо одного порядка с $d_1 \ll a$. В противном случае продолжение луча, преломленного на расстоянии $h \gg a(n - 1)\alpha$ от оптической оси, уже не пройдет через точку S_1 , пучок преломленных лучей перестанет быть гомоцентрическим.

фазе от верхнего:

$$\begin{aligned}\phi_{S_2} - \phi_{S_1} &= k \left(\sqrt{a^2 + d_1^2} - \sqrt{a^2 + d_2^2} \right) \approx k \left(a + \frac{d_1^2}{2a} - a - \frac{d_2^2}{2a} \right) = \\ &= k \frac{d_1^2 - d_2^2}{2a} = k \frac{a^2(n-1)^2\alpha^2 - a^2(n-1)^2\beta^2}{2a} = ka(n-1)^2 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\end{aligned}$$

Другой дополнительный сдвиг по фазе $\delta\phi$ в точках экрана возникает из-за несимметричного расположения источников относительно плоскости $x = 0$:

$$\delta\phi = k \frac{(d_1 + d_2) \frac{d_2 - d_1}{2}}{L} = k \frac{d_2^2 - d_1^2}{2L} = k \frac{a^2(n-1)^2(\beta^2 - \alpha^2)}{2L}.$$

Фаза в интерференционном слагаемом $I(x)$ включает оба фактора:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (\phi_{S_2} - \phi_{S_1}) + \delta\phi + k \frac{(d_1 + d_2)x}{L} = \\ &= k \left(a^2(n-1)^2(\alpha^2 - \beta^2) \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2L} \right) + \frac{a(n-1)(\alpha + \beta)x}{L} \right).\end{aligned}$$

Положение полос максимальной интенсивности находим из условия $\phi(x) = 2\pi m$, где m - целое. Получим:

$$\begin{aligned}x_{max,m} &= \frac{2\pi}{k} \frac{L}{a(n-1)(\alpha + \beta)} m - a^2(n-1)^2 \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2L} \right) \frac{(\alpha^2 - \beta^2)L}{a(n-1)(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\lambda L}{a(n-1)(\alpha + \beta)} m + \frac{L-a}{2} (n-1)(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Расстояние между интерференционными полосами:

$$\Delta x_{max} = \frac{\lambda L}{a(n-1)(\alpha + \beta)}$$

Наконец, обратим внимание на то, что яркости изображений не одинаковые, поскольку площади призм различны. В этом случае интенсивность на экране зависит от x как

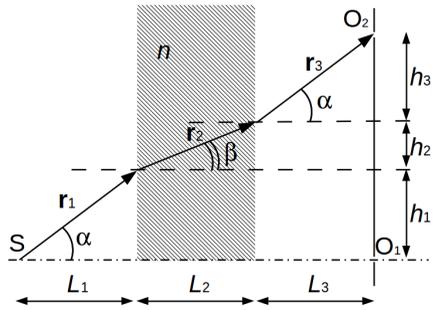
$$I(x) = I_0 (1 + A \cos \phi(x)),$$

где $|A| < 1$.

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

Воспользуемся результатом, полученным при решении задачи 1 вар.1 (см. формулу (3) на стр. 108) для общего случая трех промежутков длиной L_1, L_2, L_3 с оптически плотной средой в среднем промежутке:



$$l_1 - l_2 = \frac{d^2}{2(L_1 + nL_2 + L_3)}.$$

В нашем случае $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{L_s}{3}$:

$$l_1 - l_2 = \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s}.$$

Таким образом, щелевые источники O_1, O_2 излучают с фазовым сдвигом $k \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s}$. Тогда интенсивность в точках экрана задается выражением

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos k \left(\frac{d \cdot (x - d/2)}{L} + \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s} \right) \right)$$

Условие нулевого максимума:

$$k \left(\frac{d \cdot (x_0 - d/2)}{L} + \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s} \right) = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{d}{2} - \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s} \frac{L}{d} = \frac{d}{2} - \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d \cdot L}{2L_s}$$

Видность мала (источники некогерентны), если разброс по фазе за счет некогерентности $\delta k = \frac{\delta \omega}{c}$ превышает π :

$$\frac{\delta \omega}{c} \left| \frac{d \cdot (x - d/2)}{L} + \frac{3}{2+n} \cdot \frac{d^2}{2L_s} \right| \geq \pi$$

Умножим обе части неравенства на $\frac{Lc}{d \cdot \delta \omega}$:

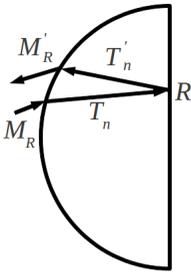
$$|x - x_0| \geq \frac{\pi Lc}{d \cdot \delta \omega}$$

Критическое расстояние от точки x_0 оценивается как

$$|x_c - x_0| = \frac{\pi Lc}{d \cdot \delta \omega}$$

Решение задачи 2

Способ 1 (через матричный формализм).



Если рассматривать в качестве оптической системы линзу и зеркало, то матрица M_0 оптической системы равна произведению матриц M_R преломления на сферической границе "воздух-стекло", пустого промежутка в стекле T_n , отражения R от плоского зеркала, пустого промежутка в стекле T'_n и преломления на сферической границе "стекло-воздух" M'_R :

$$M_0 = M'_R \cdot T'_n \cdot R \cdot T_n \cdot M_R$$

Составим матрицы по правилам матричного формализма и выполним умножение*:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{n-1}{n} & \frac{R}{n} \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{R}{n} \\ \frac{n-1}{R} & -1 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{n} & \frac{2R}{n} \\ \frac{n-1}{R} & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

*Поскольку после отражения луч движется влево, длина промежутка в матрице T'_n отрицательна ($-R$). Кроме того, описание преломления после отражения в рамках матричного формализма нуждается в корректировке. Это связано с тем, что набора параметров $\{x, \alpha, R\}$ еще не достаточно, чтобы однозначно задать угол между падающим лучом и нормалью к поверхности. Необходимо также уточнить, вправо или влево движется луч. Если произошло нечетное число отражений, то при составлении текущей матрицы преломления достаточно принять обратное правило знаков для радиуса кривизны поверхности. Поэтому, в выражении для элемента (2,1) матрицы M'_R мы приписали *положительный* радиус кривизны R *вогнутой* поверхности. Если перед преломлением луч испытал четное число N отражений (включая $N=0$), то действует обычное правило знаков. Поэтому в матрице M_R мы приписали *положительный* радиус кривизны *выпуклой* поверхности.

Выпишем отдельно элементы матрицы M_0 :

$$m_{11} = \frac{2}{n} - 1 = \frac{1}{3},$$

$$m_{12} = \frac{2R}{n} = \frac{16}{3},$$

$$m_{21} = 2\frac{n-1}{nR} = \frac{2}{3R} = \frac{1}{6},$$

$$m_{22} = 2\frac{n-1}{n} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

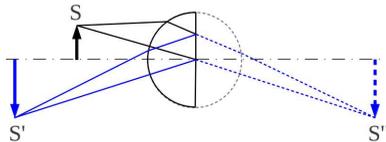
Теперь воспользуемся стандартными формулами матричного формализма *. Положение изображения источника

$$d_2 = -\frac{m_{11}d_1 + m_{12}}{m_{21}d_1 + m_{22}} = -\frac{\frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{16}{3}}{\frac{1}{6} \cdot 6 - \frac{1}{3}} = -11 < 0$$

Изображение находится слева: на 5 см левее источника.
Увеличение

$$K = m_{21}d_2 + m_{11} = -\frac{11}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{2} - \text{изображение перевернутое.}$$

Способ 2 (эффективная схема без зеркала).



Решение упрощается, если учесть знакомое из обыденной практики свойство: отраженный от плоского зеркала луч симметричен продолжению падающего. Тогда ход отраженных лучей можно анализировать по дополнительной картине, полученной симметричным отображением отраженных лучей. Ход лучей на этой картине будет в точности совпадать с тем, какой наблюдался бы в случае одной сферической линзы (вместо полушара и зеркала). После нахождения изображения на вспомогательной картине его

*Эти формулы с использованием других обозначений приведены, например, на стр. 93 учебного пособия [6].

истинное положение получается обратным симметричным отображением. Для сферической линзы обратное фокусное расстояние равно (см. задачу 1.34 из [2])

$$\frac{1}{f} = 2 \frac{n-1}{nR} = \frac{2}{3R} = \frac{1}{6}$$

Левая и правая главные плоскости совпадают и проходят через центр линзы.

Тогда эффективное расстояние до источника $a^* = a + R = 10$ и искомое расстояние находится из основной формулы линзы

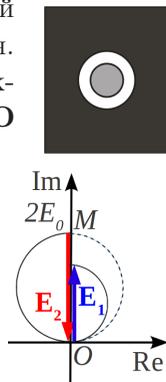
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a^*} + \frac{1}{b^*} \rightarrow \frac{1}{b^*} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a^*} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15}$$

Отображая найденную точку относительно плоскости симметрии (где расположено зеркало), получим действительное изображение в точке на расстоянии $15-4=11$ см левее крайней точки полусферы. Из рисунка видно, что размеры предмета и изображения относятся так же, как расстояния от них до центра линзы (см. на ход падающего и отраженного из центра линзы лучей). Поэтому увеличение по модулю равно $|K| = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Из рисунка видно, что коэффициент увеличения отрицателен.

Решение задачи 3

Для определения амплитуды волны в заданной точке на оси воспользуемся диаграммой Френеля. Действие полной 1-й зоны Френеля описывается вектором \mathbf{OM} , а 2-й зоны Френеля – вектором $\mathbf{E}_2 = \mathbf{MO}$ на вертикальном диаметре окружности радиуса E_0 (см. рисунок с диаграммой Френеля).

После закрытия полупрозрачной пленкой действие первой зоны Френеля уменьшается в $\sqrt{2}$ раз (так как $E \propto \sqrt{I}$) и описывается вектором \mathbf{E}_1 длиной $E_1 = \frac{2E_0}{\sqrt{2}}$.



Векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 направлены противоположно и в сумме дают

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

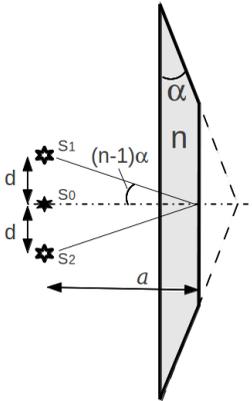
с амплитудой

$$E = E_0 \left(2 - \sqrt{2} \right).$$

Тогда интенсивность в заданной точке равна

$$I = I_0 \left(2 - \sqrt{2} \right)^2.$$

Решение задачи 4



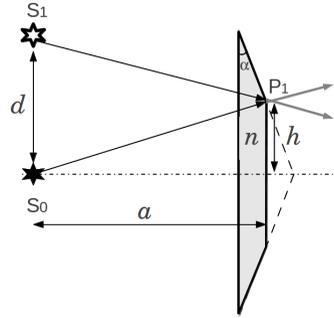
Лучи, выходящие из наков параксиальном приближении лонных граней бипризмы, распределены так, как будто они исходят от пары точечных источников S_1, S_2 , смещенных на $d = a(n - 1)\alpha$ симметрично относительно оригинального источника S (см. решение задачи 4 КР2.2 вар. 1 2012-2013 *). Изображение S_0 источника лучей, выходящих из вертикальной грани бипризмы, находится там же, где оригинал. Таким образом, система эквивалентна схеме Юнга с тремя щелевыми источниками.

Яркости источников пропорциональны площадям соответствующих граней бипризмы. Поэтому для интенсивностей и полей, создаваемых на экране каждым источником в отдельности (без учета интерференции), имеем:

$$I_0 = 2I_1 = 2I_2, \quad E_0 = \sqrt{2}E_1 = \sqrt{2}E_2.$$

*Как и в задаче 1-го варианта, мы полагаем вертикальный размер бипризмы меньше или одного порядка с d , что обеспечивает гомоцентричность преломленных пучков.

Кроме того, покажем, что источники-изображения S_1 , S_2 с одной стороны и S_0 – с другой, излучают в общем случае несинфазно. Для этого рассмотрим два луча, преломленных под разными углами в окрестности точки P_1 (соответственно на наклонной и на вертикальной грани). Эти лучи имеют в точке P_1 одинаковую фазу, поскольку они проходят одну и ту же оптическую длину пути – от оригинального источника S до точки P_1 . Когда мы описываем соответствующие преломленные лучи как исходящие от источников-изображений S_0 и S_1 , то равенство их фаз в точке P_1 остается в силе. Но оптическая длина хода луча до точки P_1 из S_0 одна, а из S_1 в общем случае – другая. Отсюда следует, что источники S_0 и S_1 излучают несинфазно. В силу симметрии задачи то же относится к источнику-изображению S_2 .



Определим оптическую разность хода лучей S_0P_1 и S_1P_1 . В параксиальном приближении имеем

$$\Delta\ell_{10} \approx \left(a + \frac{(d-h)^2}{2a} \right) - \left(a + \frac{h^2}{2a} \right) = \frac{d^2}{2a} - \frac{d \cdot h}{a},$$

где h – полуширина малого основания трапеции в поперечном сечении бипризмы. Поэтому отставание S_1 по фазе относительно S_0 составляет

$$\delta\phi_{10} = -k \left(\frac{d^2}{2a} - \frac{d \cdot h}{a} \right) = -k \frac{d \cdot (d - 2h)}{2a}$$

Очевидно, что такое же отставание по фазе имеет S_2 относительно S_0 .

Тогда в результате суперпозиции в точке экрана x формируется поле

$$E(x) = E_0 e^{i\phi_0} + E_1 e^{i\phi_1} + E_2 e^{i\phi_2}$$

Средняя по времени интенсивность равна

$$\begin{aligned} \langle I(x) \rangle &= \frac{c}{8\pi} E(x) E^*(x) = \\ &= \frac{c}{8\pi} (E_0 e^{i\phi_0} + E_1 e^{i\phi_1} + E_2 e^{i\phi_2}) (E_0 e^{-i\phi_0} + E_1 e^{-i\phi_1} + E_2 e^{-i\phi_2}) = \\ &= \frac{c}{8\pi} (E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_0 E_1 (e^{i\Delta\phi_{01}} + e^{-i\Delta\phi_{01}}) + \\ &+ E_0 E_2 (e^{i\Delta\phi_{02}} + e^{-i\Delta\phi_{02}}) + E_1 E_2 (e^{i\Delta\phi_{12}} + e^{-i\Delta\phi_{12}})) = \\ &= \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cos \Delta\phi_{01} + \sqrt{2} \cos \Delta\phi_{02} + \cos \Delta\phi_{12} \right) = \\ &= I_0 (2 + \sqrt{2} \cos \Delta\phi_{01} + \sqrt{2} \cos \Delta\phi_{02} + \cos \Delta\phi_{12}), \end{aligned}$$

где разности фаз в параксиальном приближении выражаются как

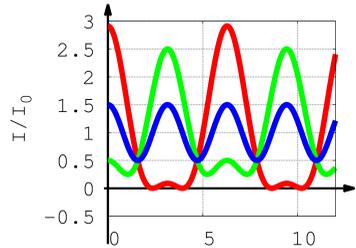
$$\begin{aligned} \Delta\phi_{01} &= k \left(\frac{d \cdot x}{L} - \frac{d^2}{2L} + \frac{d^2}{2a} - \frac{hd}{a} \right) = \\ &= k \left(\frac{a(n-1)\alpha x}{L} + \frac{a(n-1)^2 \alpha^2 (L-a)}{2L} - (n-1)\alpha h \right); \\ \Delta\phi_{02} &= k \left(-\frac{d \cdot x}{L} - \frac{d^2}{2L} + \frac{d^2}{2a} - \frac{hd}{a} \right) = \\ &= k \left(-\frac{a(n-1)\alpha x}{L} + \frac{a(n-1)^2 \alpha^2 (L-a)}{2L} - (n-1)\alpha h \right); \\ \Delta\phi_{12} &= k \frac{2d \cdot x}{L} = k \frac{2a(n-1)\alpha x}{L}, \quad L = a + b. \end{aligned}$$

Применив к $(\cos \Delta\phi_{01} + \cos \Delta\phi_{02})$ формулу суммы косинусов, получим

$$\begin{aligned} \langle I(x) \rangle &= I_0 \left(2 + 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\Delta\phi_{01} + \Delta\phi_{02}}{2} \cdot \cos \frac{\Delta\phi_{01} - \Delta\phi_{02}}{2} \right) + \cos \Delta\phi_{12} \right) = \\ &= I_0 \left(2 + 2\sqrt{2} \cos k \frac{a(n-1)\alpha x}{L} \cdot \cos k \left(\frac{a(n-1)^2 \alpha^2 (L-a)}{2L} - (n-1)\alpha h \right) + \right. \\ &\left. + \cos k \frac{2a(n-1)\alpha x}{L} \right) = 2I_0 \left(1 + \sqrt{2} \cos Ax \cdot \cos B + \frac{1}{2} \cos 2Ax \right), \end{aligned}$$

где $A = k \frac{a(n-1)\alpha}{L}$, $B = k \left(\frac{a(n-1)^2 \alpha^2 (L-a)}{2L} - (n-1)\alpha h \right)$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

На графике приведены кривые $I(x)$ (в относительных единицах) для различных соотношений параметров L , a , h . Видно, что расстояние между соседними минимумами варьируется. Для синей кривой $B = \frac{\pi}{2}$, так что $\cos B = 0$. Этому отвечает условие минимумов



$$k \frac{2a(n-1)\alpha x}{L} = (2m+1)\pi,$$

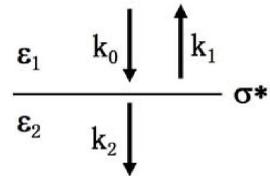
откуда $\Delta x_{min,m} = \frac{\lambda L}{2a(n-1)\alpha}$.

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Запишем граничные условия на тангенциальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2, \\ H_0 - H_1 &= H_2 + \frac{4\pi}{c} j = H_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_2. \end{aligned}$$



Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m} e^{i(k_0 x - \omega t + \phi_0)}$).
 Перепишем систему уравнений с учетом $H_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} E_i = \sqrt{\varepsilon_i} E_i$:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2, \\ \sqrt{\varepsilon_1} E_0 - \sqrt{\varepsilon_1} E_1 &= \sqrt{\varepsilon_2} E_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_2. \end{aligned} \quad (1)$$

1. Положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, из системы (1) находим

$$E_2 = \frac{1}{1 + \frac{2\pi\sigma^*}{c}} E_0.$$

Средняя по времени поверхностная плотность мощности w , выделяемой в пластинке, равна

$$w = \frac{1}{2} E_2 i = \frac{1}{2} \sigma^* E_2^2 = \frac{\sigma^* E_0^2}{2 \left(1 + \frac{2\pi}{c} \sigma^*\right)^2}.$$

2. Условие экстремума $\frac{dw}{d\sigma^*} = 0$ дает

$$1 - \frac{2\pi}{c} \sigma_{extr}^* = 0,$$

откуда σ^* , при которой w максимальна, равна

$$\sigma_{extr}^* = \frac{c}{2\pi}.$$

Значение максимальной w :

$$w_{max} = \frac{c}{16\pi} E_0^2.$$

3. В отсутствие отраженной волны ($E_1 = 0$) из первого уравнения системы (1) следует $E_2 = E_0$. Тогда второе уравнение принимает вид

$$\sqrt{\varepsilon_1} E_0 = \sqrt{\varepsilon_2} E_0 + \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_0, \text{ откуда } \sigma^* = \frac{c}{4\pi} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}).$$

Решение задачи 2

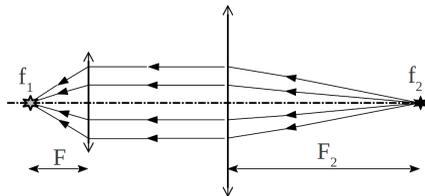
Для разрешения колец необходимо, чтобы угловой размер θ промежутка между кольцом и планетой заметно превышал характерный угол дифракции света $\delta\theta$ на зрачке:

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \frac{w}{L} \\ \delta\theta = \frac{\lambda}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow d \geq \frac{\lambda L}{w} = \frac{0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{9+3}}{20 \cdot 10^{3+3}} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2.5 \text{ см}$$

Это оценка снизу. На практике лучше пользоваться критерием Рэля $\theta \geq 1.22\delta\theta$, который дает минимальный размер апертуры 3 см. В бинокль с объективом такого диаметра кольца Сатурна действительно уже различимы.

Решение задачи 3

У дальновзорного человека хрусталик фокусирует на сетчатке только лучи, приходящие в виде параллельного пучка. Поэтому лучи, идущие от монитора, после прохождения



через линзы очков должны стать параллельными. Для этого экран монитора должен находиться в фокальной плоскости этих линз. Тогда искомое фокусное расстояние равно $40 \text{ см} = 0.4 \text{ м}$, а соответствующая светосила $\frac{1}{0.4} = 2,5$.

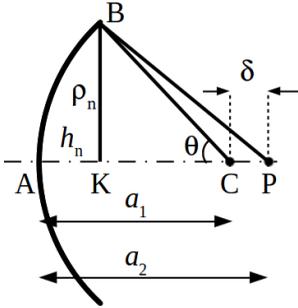
Решение задачи 4

Поле в точке Р выражается интегралом Кирхгофа:

$$E_P = \frac{E_0}{i\lambda} \int_S \frac{e^{ikR}}{R} \cos \psi dS,$$

где интегрирование производится по площади сферического сегмента, опирающегося на отверстие ($dS = 2\pi a_1^2 \sin \theta d\theta$). dS можно

выразить через переменную R . Для этого рассмотрим сегмент радиуса $AC=BC=a_1$ с радиусом основания $BK=\rho_n$. Без ограничения общности рассмотрим случай $AP=a_2 > AC=a_1$. Тогда по теореме косинусов



$$BP^2 = CP^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CP \cos \widehat{BCP},$$

$$R^2 = (a_2 - a_1)^2 + a_1^2 + 2(a_2 - a_1)a_1 \cos \theta.$$

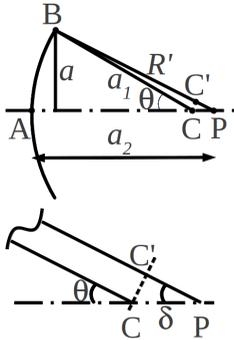
Обозначим $\delta = a_2 - a_1$ и возьмем дифференциалы от обеих частей:

$$2RdR = -2a_1 \delta \sin \theta d\theta.$$

Тогда $\sin \theta d\theta = -\frac{RdR}{a_1 \delta}$ и элемент площади, выраженный через переменную R , равен

$$dS = -2\pi a_1^2 \frac{RdR}{a_1 \delta} = -2\pi \frac{a_1 R dR}{\delta}.$$

(Знак «-» получился из-за того, что в случае $a_2 > a_1$ бóльшим S отвечают меньшие R). Тогда с учетом $\cos \psi \approx 1$ интеграл Кирхгофа берется элементарно:



$$\begin{aligned} E_P &= -2\pi \frac{E_0 a_1}{i\lambda \delta} \int_{a_2}^{R'} e^{ikR} dR = \\ &= 2\pi \frac{E_0 a_1}{k\lambda \delta} \left(e^{ikR'} - e^{ika_2} \right). \end{aligned}$$

В параксиальном приближении

$$R' = BC' + C'P = a_1 + \delta \cos \theta \approx a_2 - \delta + \delta(1 - \theta^2/2) = a_2 - \frac{a^2}{2a_1^2} \delta.$$

Тогда комплекс поля E_P и его модуль равны соответственно

$$E_P = \frac{E_0 a_1}{\delta} e^{ika_2} \left(e^{ik \frac{a^2}{2a_1^2} \delta} - 1 \right),$$

$$|E_P| = 2 \frac{E_0 a_1}{\delta} \left| \sin \left(k \frac{a^2}{4a_1^2} \delta \right) \right| = \frac{ka^2 E_0}{2a_1} \left| \text{sinc} \left(k \frac{a^2}{4a_1^2} \delta \right) \right|,$$

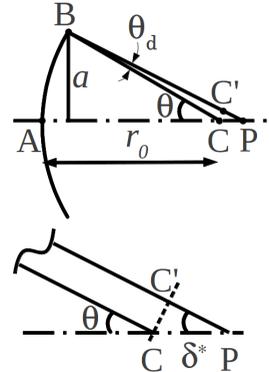
а искомая интенсивность:

$$I_P = \frac{k^2 a^4 I_0}{4a_1^2} \text{sinc}^2 \left(k \frac{a^2}{4a_1^2} \delta \right).$$

Подставим $a_1 = r_0$ и оценим глубину фокуса δ^* как половину расстояния между первыми минимумами интенсивности по обе стороны от фокуса или, что то же, как расстояние от фокуса до первого нуля sinc:

$$\text{sinc} \left(k \frac{a^2}{4r_0^2} \delta^* \right) = 0, \quad k \frac{a^2}{4r_0^2} \delta^* = \pi \rightarrow \delta^* = \frac{4\pi r_0^2}{ka^2} = 2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \lambda.$$

Глубину фокуса можно также получить с помощью следующих простых соображений. В приближении геометрической оптики фокус C находится на расстоянии $\sim r_0$ от отверстия и является точкой пересечения радиусов AC и BC . Вследствие дифракции возникает разброс $\theta_d \sim \frac{\lambda}{2a}$ по направлениям луча BC . Вытекающее отсюда размытие δ^* фокуса:



$$CC' = r_0 \theta_d = \frac{r_0 \lambda}{2a}, \quad \delta^* = CP = \frac{CC'}{\sin \theta} \approx \frac{r_0 \lambda}{2a} \cdot \frac{r_0}{a} = \frac{\lambda r_0^2}{2a^2},$$

что в смысле оценки не отличается от значения глубины, полученного из выражения для интенсивности.

Решение задачи 5

Уточним, что дипольное приближение работает при условии $a \ll \lambda$ (а не только $r \gg a$). Предполагаем, что оба условия выполнены. Тогда вектор-потенциал описывается стандартной формулой, верной в квазистационарной, ближней и волновой зонах:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} = -i\omega \frac{qa}{cr} e^{i(kr-\omega t)} \mathbf{e}_z,$$

$$A_r = -i\omega \frac{qa}{cr} e^{i(kr-\omega t)} \cos \theta, \quad A_\theta = i\omega \frac{qa}{cr} e^{i(kr-\omega t)} \sin \theta.$$

Скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ будем искать из условия лоренцевской калибровки

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (1)$$

Поскольку вектор-потенциал \mathbf{A} имеет только z -компоненту, то дивергенцию удобно рассчитывать в декартовых координатах *:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z} = -i\omega \frac{qa}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \right) = \\ &= -i\omega \frac{qa}{c} e^{i(kr-\omega t)} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{1}{r} i k_z \right) = i\omega \frac{qa}{cr^2} e^{i(kr-\omega t)} \cos \theta (1 - ikr). \end{aligned}$$

Производная по времени в (1) сводится к умножению на $(-i\omega)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -i\omega\varphi.$$

* В методических целях приведем расчет той же дивергенции в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) = \frac{1}{r^2} \left(-i\omega \frac{qa}{c} e^{i(kr-\omega t)} \cos \theta \right) (1 + ikr) + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} i\omega \frac{qa}{cr} e^{i(kr-\omega t)} 2 \sin \theta \cos \theta = i\omega \frac{qa}{cr^2} e^{i(kr-\omega t)} \cos \theta (1 - ikr). \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{-i\omega} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{qa}{r^2} e^{i(kr-\omega t)} \cos \theta (1 - ikr).$$

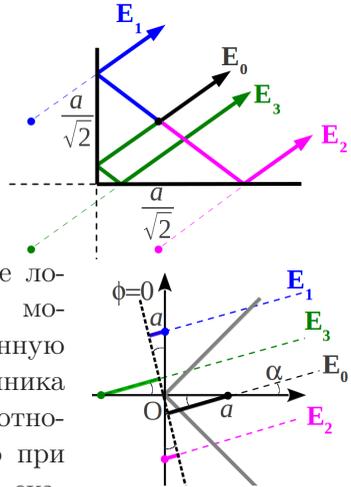
В квазистационарной зоне ($kr \ll 1$) имеем потенциал диполя $\frac{(\mathbf{d}, \mathbf{r})}{r^3}$.

Примечание. Условие лоренцевской калибровки позволяет определить скалярный потенциал с точностью до произвольной не зависящей от времени функции координат. Поэтому, строго говоря, мы должны добавить к найденному $\varphi(\mathbf{r}, t)$ слагаемое $\frac{q}{r}$.

Решение задачи 6

Излучение системы будет представлять собой суперпозицию излучения от самого вибратора и излучения, формируемого вследствие отражения волны от стенок. Отраженные волны удобно описывать как исходящие из трех изображений вибратора.

В волновой зоне каждое излучение локально представляет собой плоскую монохроматическую линейно поляризованную волну. Фазу излучения самого источника и изображений удобно отсчитывать относительно точки O . Учтем также, что при нечетном числе отражений возникает скачок по фазе на π :



$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_0 e^{i(k_x(x-a)+k_y y-\omega t)} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kr-\omega t-ka \cos \alpha)}, \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x+k_y(y-a)-\omega t+\pi)} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kr-\omega t-ka \sin \alpha+\pi)}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x+k_y(y+a)-\omega t+\pi)} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kr-\omega t+ka \sin \alpha+\pi)}, \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{E}_0 e^{i(k_x(x+a)+k_y y-\omega t)} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kr-\omega t+ka \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{r} – вектор из точки O в точку наблюдения, а предэкспоненциальный множитель равен $E_0 = -\left|\frac{\ddot{d}}{c^2 r}\right| = -\omega^2 \frac{d_0}{c^2 r}$ в соответствии с формулой для амплитуды поля отдельного точечного вибратора в волновой зоне. Можно показать, что при таких расположении и фазах трех излучателей-изображений выполняются граничные условия $E_\tau = 0$, $B_n = 0$ на проводящих плоскостях.

На расстояниях $r \gg a$ все векторы \mathbf{k}_i параллельны и поэтому суперпозиция полей сводится к алгебраическому, а не векторному суммированию:

$$\begin{aligned} E_\Sigma &= E_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \left(e^{-ika \cos \alpha} + e^{-ika \sin \alpha + i\pi} + e^{ika \sin \alpha + i\pi} + e^{ika \cos \alpha} \right) = \\ &= E_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \left(e^{ika \cos \alpha} - e^{ika \sin \alpha} - e^{-ika \sin \alpha} + e^{-ika \cos \alpha} \right) = \\ &= 2E_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \left(\cos(ka \cos \alpha) - \cos(ka \sin \alpha) \right). \end{aligned}$$

Интенсивность излучения в волновой зоне на единицу телесного угла равна

$$\frac{dI}{d\Omega} = 4 \frac{dI_0}{d\Omega} \cdot \left(\cos(ka \cos \alpha) - \cos(ka \sin \alpha) \right)^2,$$

где $\frac{dI_0}{d\Omega}$ обозначает такую же величину в отсутствие стенок.

В направлении биссектрисы $\alpha = 0$ и

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{dI_0}{d\Omega} \cdot (\cos(ka) - 1)^2 = 4 \frac{dI_0}{d\Omega} \cdot \sin^4(ka/2).$$

Условию максимума соответствует $\frac{ka_m}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m$, откуда

$$a_m = \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi m}{k}, \quad a_{min} = a_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}.$$

2013/2014 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Выделим на полукольце элемент длины $a d\alpha$. Заряд на элементе равен $\frac{dq}{\pi} q$, а создаваемое им в точке $(0, 0, z_0)$ поле:

$$dE = q \frac{d\alpha}{\pi (a^2 + z_0^2)}$$

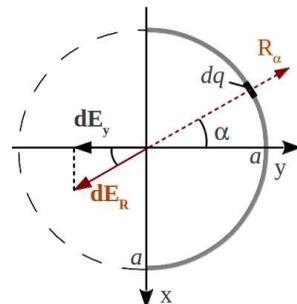
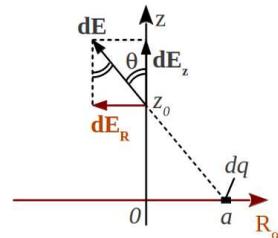
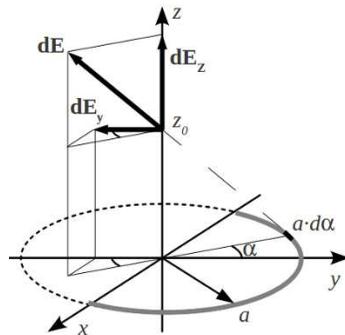
с z -компонентой

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{z_0}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} dE$$

и y -компонентой

$$\begin{aligned} dE_y &= -dE_R \cos \alpha = \\ &= -dE \sin \theta \cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} dE \cos \alpha. \end{aligned}$$

По принципу суперпозиции поле, создаваемое всем полукольцом, равно интегралу от элементарного поля по углу α от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Из симметрии задачи ясно, что x -компонента полного



поля равна нулю. Остальные компоненты равны

$$E_y = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{\sqrt{a^2+z_0^2}} \frac{q}{\pi(a^2+z_0^2)} \cos \alpha d\alpha = - \frac{qa}{\pi(a^2+z_0^2)^{3/2}} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= - \frac{2qa}{\pi(a^2+z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{z_0}{\sqrt{a^2+z_0^2}} \frac{q}{\pi(a^2+z_0^2)} d\alpha = \frac{\pi q z_0}{\pi(a^2+z_0^2)^{3/2}} = \frac{q z_0}{(a^2+z_0^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Величина полного поля } E = \sqrt{E_z^2 + E_y^2} = \sqrt{z_0^2 + \frac{4a^2}{\pi^2}} \frac{q}{(a^2+z_0^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 2

Точечный заряд на плоской границе, разделяющей два крупных диэлектрика с ϵ_1 и ϵ_2 , формирует потенциал (см. задачу 2.4 из [1]):

$$\varphi_\epsilon = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{q}{r},$$

отличающийся от потенциала такого же заряда в вакууме множителем $\frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$. Потенциал в диэлектрике уменьшается из-за того, что сторонний заряд q “обрастает” связанными зарядами, так что полный заряд, оставаясь точечным, уменьшается по абсолютной величине. Согласно принципу суперпозиции в такой же пропорции оказываются потенциалы в среде и в вакууме соответственно от системы точечных зарядов, расположенных в плоскости границы раздела. Заданная система сторонних зарядов нейтральна и обладает ненулевым дипольным моментом. Тогда искомый потенциал в дипольном приближении равен потенциалу диполя в вакууме, умноженному на $\frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$:

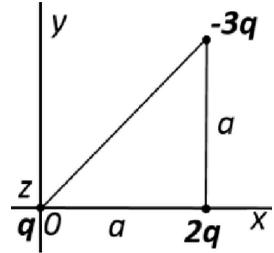
$$\varphi_{1,2}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (1)$$

Дипольный момент заданной системы сторонних зарядов равен

$$\mathbf{d} = 2qa\mathbf{e}_x - 3qa\mathbf{e}_x - 3qa\mathbf{e}_y = -qa\mathbf{e}_x - 3qa\mathbf{e}_y.$$

Подставляя дипольный момент в (1) с учетом $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) = d_x x + d_y y$, получим:

$$\varphi_{1,2}(x, y, z) = -qa \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{x + 3y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

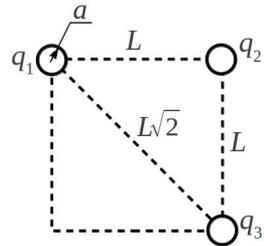


Решение задачи 3

В этой задаче мы считаем, что заряды на каждом шарике распределяются равномерно по их поверхности. В действительности сферическая симметрия нарушается зарядами-изображениями, но их учет в потенциале окружающего пространства дает поправку более высокого порядка малости, чем a/L . Тогда после соединения первого и второго шариков заряд делится между ними пополам. После разъединения шариков на первом шарике окончательно устанавливается заряд $q_1 = \frac{Q}{2}$. Пусть на третий шарик после соединения его со вторым перетек заряд q_3 . Тогда на втором шарике остается заряд $q_2 = \frac{Q}{2} - q_3$.

Потенциал третьего шарика, согласно принципу суперпозиции, равен

$$\varphi_3 = \frac{q_3}{a} + \frac{q_1}{L\sqrt{2}} + \frac{q_2}{L} = \frac{q_3}{a} + \frac{Q}{2L\sqrt{2}} + \frac{\frac{Q}{2} - q_3}{L}.$$



Аналогично, потенциал второго шарика равен

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{a} + \frac{q_1}{L} + \frac{q_3}{L} = \frac{\frac{Q}{2} - q_3}{a} + \frac{Q}{2L} + \frac{q_3}{L}.$$

φ_2 и φ_3 равны как потенциалы на едином проводнике

$$\frac{\frac{Q}{2} - q_3}{a} + \frac{Q}{2L} + \frac{q_3}{L} = \frac{q_3}{a} + \frac{Q}{2L\sqrt{2}} + \frac{\frac{Q}{2} - q_3}{L}.$$

Отсюда находим заряд на третьем шарике:

$$q_3 \left(\frac{2}{L} - \frac{2}{a} \right) = \frac{Q}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}L} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow q_3 = \frac{Q}{4} \cdot \frac{L-a/\sqrt{2}}{L-a} \approx \frac{Q}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{a}{L} \right).$$

Тогда заряд на втором шарике равен

$$q_2 = \frac{Q}{2} - q_3 \approx \frac{Q}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{a}{L} \right).$$

Примечание. См. на стр. 137 решение аналогичной задачи через потенциальные и емкостные коэффициенты.

Решение задачи 4

Энергия заряженной системы в поле с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$:

$$U = \int \varphi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})dV. \quad (1)$$

Если потенциал слабо меняется на размерах заряженной системы, то его можно разложить в ряд по пространственным координатам в окрестности некоторой точки O внутри системы:

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \varphi_0 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_0 x_i + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{2\partial x_i \partial x_j} \right|_0 x_i x_j, \quad (2)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned} U &\approx \int \varphi_0 \rho(\mathbf{r})dV + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_0 \int \rho(\mathbf{r})x_i dV + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{2\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \int \rho(\mathbf{r})x_i x_j dV = \\ &= \varphi_0 q + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_0 p_i + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{2\partial x_i \partial x_j} \right|_0 Q_{ij} = \varphi_0 q - (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{p}) - \left. \frac{\partial E_j}{2\partial x_i} \right|_0 Q_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q = \int \rho(\mathbf{r})dV$ – полный заряд системы,

$p_i = \int \rho(\mathbf{r})x_i dV$ – i -компонента дипольного момента \mathbf{p} системы,

Q_{ij} – тензор квадрупольных моментов системы в представлении $Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) x_i x_j dV$. С учетом $q=0$, $\mathbf{p}=0$ энергия квадруполья равна

$$U \approx - \left. \frac{\partial E_j}{2\partial x_i} \right|_0 Q_{ij}. \quad (4)$$

U можно выразить через $D_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) dV$:

$$\begin{aligned} U &\approx - \left. \frac{\partial E_j}{2\partial x_i} \right|_0 \int \rho(\mathbf{r}) x_i x_j dV = - \left. \frac{\partial E_j}{6\partial x_i} \right|_0 \int 3x_i x_j \rho(\mathbf{r}) dV = \\ &- \left. \frac{\partial E_j}{6\partial x_i} \right|_0 \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) dV = - \left. \frac{\partial E_j}{6\partial x_i} \right|_0 D_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

где учтено, что $\left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_0 \delta_{ij} = \operatorname{div}_0 \mathbf{E} = 0$, поскольку заряды, формирующие внешнее поле, в окрестности точки O отсутствуют.

Сила на заряженную систему в поле \mathbf{E} равна

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (6)$$

Для k -компоненты силы имеем

$$F_k = \int E_k(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (7)$$

Формула (7) получается из (1) заменой φ на E_k . Поэтому из уравнения (3) такой же заменой получим:

$$F_k \approx \left. \frac{\partial^2 E_k}{2\partial x_i \partial x_j} \right|_0 Q_{ij}. \quad (8)$$

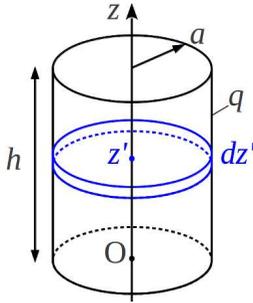
Получим выражение для силы через тензор D_{ij} :

$$\begin{aligned} F_k &\approx \left. \frac{\partial^2 E_k}{2\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \int \rho(\mathbf{r}) x_i x_j dV = \left. \frac{\partial^2 E_k}{6\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \int 3x_i x_j \rho(\mathbf{r}) dV = \\ &= \left. \frac{\partial^2 E_k}{6\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) dV = \left. \frac{\partial^2 E_k}{6\partial x_i \partial x_j} \right|_0 D_{ij}, \end{aligned} \quad (9)$$

где учтено, что $\left. \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \delta_{ij} = \Delta_0 E_k = - \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \varphi \right|_0 = 0$.

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1



Выделим на боковой поверхности цилиндра элемент высотой dz' в окрестности плоскости $z = z'$. Потенциал, который создает элемент в центре основания цилиндра, рассчитывается по формуле потенциала кольца:

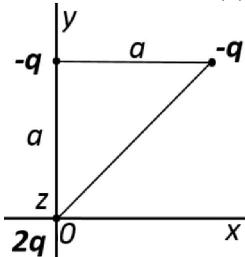
$$d\varphi_0 = \frac{qdz'}{h\sqrt{z'^2 + a^2}}$$

Согласно принципу суперпозиции потенциал в точке O от всей боковой поверхности цилиндра равен

$$\varphi_0 = \frac{q}{h} \int_0^h \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + a^2}} = \frac{q}{h} \ln \left(z' + \sqrt{z'^2 + a^2} \right) \Big|_0^h = \frac{q}{h} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + a^2}}{a}$$

Примечание. В пределе $h=0$ $\ln \frac{h + \sqrt{h^2 + a^2}}{a} \approx \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \approx \frac{h}{a}$ и $\varphi_0 = \frac{q}{h} \cdot \frac{h}{a} = \frac{q}{a}$ – получается потенциал в центре кольца с зарядом q .

Решение задачи 2



Точечный заряд на плоской границе, разделяющей два диэлектрика с ϵ_1 и ϵ_2 , формирует потенциал (см. задачу 2.4 из [1]):

$$\varphi_\epsilon = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{q}{r} = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \varphi_0,$$

где φ_0 - потенциала такого же заряда в вакууме. Потенциал в диэлектрике уменьшается из-за действия связанных зарядов, противоположных стороннему по знаку. Согласно принципу суперпозиции в такой же пропорции

оказываются потенциалы в среде и в вакууме соответственно от произвольной системы зарядов, расположенных в плоскости границы раздела. Заданная система в первом приближении представляет собой нейтральный диполь. Тогда искомый потенциал равен потенциалу диполя в вакууме, умноженному на $\frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$:

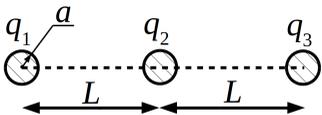
$$\varphi_{1,2}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (1)$$

Дипольный момент заданной системы сторонних зарядов $\mathbf{d} = -qa\mathbf{e}_x - qa\mathbf{e}_y - qa\mathbf{e}_y = -qa\mathbf{e}_x - 2qa\mathbf{e}_y$. Подставляя \mathbf{d} в (1) с учетом $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) = d_x x + d_y y$, получим:

$$\varphi_{1,2}(x, y, z) = -qa \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{x + 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 3

В этой задаче мы считаем, что заряды на каждом шарике распределяются равномерно по их поверхности. Хотя в действительности сферическая симметрия нарушается зарядами-изображениями, их учет в потенциале окружающего пространства дает поправку более высокого порядка малости, чем a/L . Тогда после соединения первого и второго шариков заряд делится между ними пополам. После разъединения шариков на первом шарике окончательно устанавливается заряд $q_1 = \frac{Q}{2}$. На втором этапе потенциалы 2-го и 3-го шарика выражаются как

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 \\ \varphi_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3, \end{aligned} \quad (1)$$


где q_1, q_2, q_3 – заряды на шариках, α_{ij} – потенциальные коэффициенты. Причем $q_1 = \frac{Q}{2}, q_2 + q_3 = \frac{Q}{2}$.

Поскольку шарики одинаковые и с учетом симметричности α_{ij} , имеем:

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{a}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32}.$$

На втором этапе 2-й и 3-й шарик соединены проводом, поэтому $\varphi_2 = \varphi_3$. Приравнивая потенциалы и выражая заряд q_2 из (1), получаем:

$$\alpha_{21} \frac{Q}{2} + \alpha_{22} q_2 + \alpha_{21} \left(\frac{Q}{2} - q_2 \right) = \alpha_{31} \frac{Q}{2} + \alpha_{21} q_2 + \alpha_{22} \left(\frac{Q}{2} - q_2 \right),$$

$$q_2 = \frac{Q}{4} + \frac{\alpha_{31} - \alpha_{12}}{\alpha_{22} - \alpha_{12}} \frac{Q}{4}, \quad q_3 = \frac{Q}{4} - \frac{\alpha_{31} - \alpha_{12}}{\alpha_{22} - \alpha_{12}} \frac{Q}{4}.$$

Для нашей системы: $\alpha_{12} = \frac{1}{L}$, $\alpha_{31} = \frac{1}{2L}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{a}$. Тогда

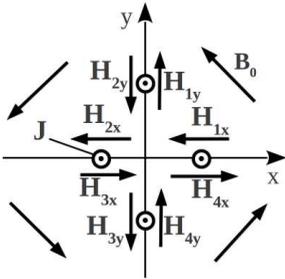
$$q_2 = \frac{Q}{4} \left(1 - \frac{a}{2L} \right), \quad q_3 = \frac{Q}{4} \left(1 + \frac{a}{2L} \right).$$

Решение задачи 4

См. решение задачи 4 вар. 1 на стр. 134.

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1



Граничное условие на тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля:

$$\Delta H_\tau = \frac{4\pi}{c} J,$$

где J – линейная плотность тока. Направление токов на границе “1-2” определяется векторным равенством

$$\mathbf{J}_{12} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1),$$

где \mathbf{n}_{12} – единичный вектор нормали к плоскости раздела, направленный из области 1 в область 2.

Тогда искомая плотность токов по модулю одинакова на всех плоскостях и равна

$$J = \frac{c}{4\pi} \Delta H_\tau = \frac{c}{4\pi} \cdot 2 \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{4\pi} B_0.$$

Направления токов показаны на рисунке.

Решение задачи 2

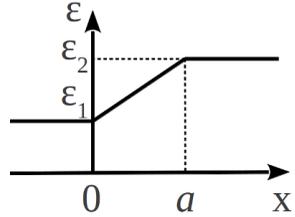
Для плотности тока в любой точке пространства имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

С учетом $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и $\sigma = \text{const}$ получим

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{св}})\sigma = 0, \quad (1)$$

где ρ и $\rho_{\text{св}}$ – плотности свободных и связанных зарядов соответственно. Плотность свободных зарядов находим как

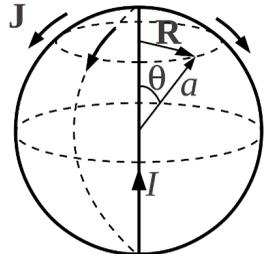


$$\rho(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{(\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon)}{4\pi} = \frac{(\mathbf{j} \cdot \nabla \varepsilon)}{4\pi\sigma} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{j_0}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

В силу (1) плотность связанных зарядов $\rho_{\text{св}}(x) = -\rho(x)$.

Решение задачи 3

Токи в задаче распределены аксиально симметрично, причем $j_\alpha = 0$, следовательно, поле имеет только азимутальную компоненту, которая в общем случае зависит только от цилиндрических координат R и z (ср. с задачей 4 КР1.2 2012 на стр. 83). Тогда из теоремы Стокса имеем:



$$\text{внутри сферы } \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R H_\alpha = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_\alpha(R) = \frac{2I}{cR},$$

$$\text{вне сферы } \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R H_\alpha = \frac{4\pi}{c} (I - I) \Rightarrow H_\alpha(R) = 0.$$

Полученное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

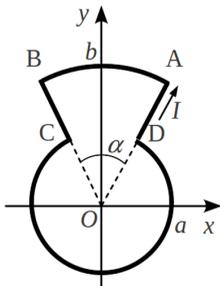
Кроме того, для этого поля выполняются граничные условия на сфере. Действительно, линейная плотность тока в точках сферы, характеризуемых полярным углом θ (в сферических координатах), равна $\mathbf{J}(\theta) = -\frac{I}{2\pi a \sin \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{I}{2\pi R} \mathbf{e}_\theta$, а граничные условия

$$H_\theta - 0 = \frac{2I}{cR} = \frac{4\pi}{c} \frac{I}{2\pi R} = \frac{4\pi}{c} J(R) \text{ верно;}$$

$$\Delta B_n = \Delta B_r = 0 - 0 = 0 \text{ верно.}$$

Следовательно, полученное решение верно и единственно.

Решение задачи 4

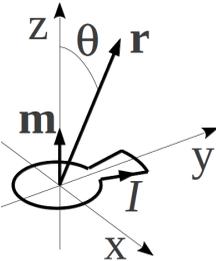


Магнитный момент контура имеет только z -компоненту, равную

$$m = \frac{I \cdot (S_{AOB} + S_{COD})}{c} = \frac{I}{2c} (\alpha b^2 + (2\pi - \alpha)a^2) \quad (1)$$

На больших расстояниях $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ представляет собой поле магнитного диполя:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{m}{r^3} \mathbf{e}_z + 3\frac{m \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r,$$



где θ – угол между \mathbf{r} и осью z , а m вычисляется по формуле (1).

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1

Граничное условие на тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля:

$$\Delta H_\tau = \frac{4\pi}{c} J,$$

где J – линейная плотность тока. Направление токов на границе “1-2” определяется векторным равенством

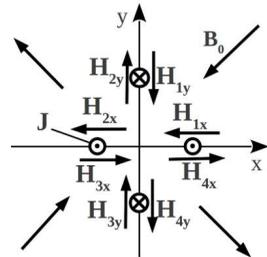
$$\mathbf{J}_{12} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1),$$

где \mathbf{n}_{12} – единичный вектор нормали к плоскости раздела, направленный из области 1 в область 2.

Тогда искомая плотность токов по модулю одинакова на всех плоскостях и равна

$$J = \frac{c}{4\pi} \Delta H_\tau = \frac{c}{4\pi} \cdot 2 \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{4\pi} B_0.$$

Направления токов показаны на рисунке.



Решение задачи 2

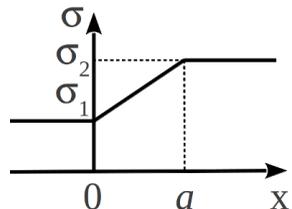
Для плотности тока в любой точке пространства имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

С учетом $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ получим

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = \sigma(x) \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla \sigma) = 0,$$

откуда



$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{(\mathbf{E} \cdot \nabla \sigma)}{\sigma(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\frac{j_0(\sigma_2 - \sigma_1)}{a\sigma^2(x)}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Плотность свободных зарядов находим как

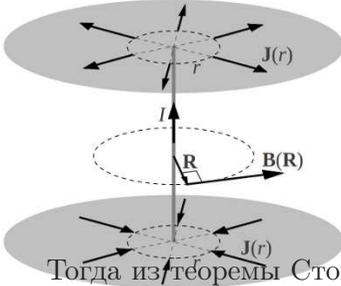
$$\rho(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}}{4\pi} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\frac{j_0 \varepsilon (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi a \sigma^2(x)}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Плотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{св}}(x) = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{j_0(\varepsilon - 1)(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi a \sigma^2(x)}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Проводимость в интервале $0 < x < a$ в записанных выше формулах выражается зависимостью $\sigma(x) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{a}x$.

Решение задачи 3



Токи в задаче распределены аксиально симметрично, причем $j_\alpha = 0$, следовательно, поле имеет только азимутальную компоненту, которая в общем случае зависит только от цилиндрических координат R и z (ср. с задачей 4 КР1.2 2012 на стр. 83).

Тогда из теоремы Стокса имеем:

между плоскостями $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R H_\alpha = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_\alpha(R) = \frac{2I}{cR}$,

за плоскостями $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R H_\alpha = 0 \Rightarrow H_\alpha(R) = 0$.

Полученное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Кроме того, для этого поля выполняются граничные условия на плоскостях. Действительно, линейная плотность тока по плоскости на расстоянии R от оси равна $\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi R}\mathbf{e}_R$, а граничные условия на плоскостях

$$H_\alpha - 0 = \frac{2I}{cR} = \frac{4\pi}{c} \frac{I}{2\pi R} \text{ верно;}$$

$$\Delta B_n = \Delta B_z = 0 - 0 = 0 \text{ верно.}$$

Следовательно, полученное решение верно и единственно.

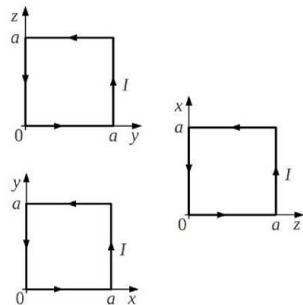
Решение задачи 4

Находим компоненты магнитного момента контура, проецируя контур на соответствующие плоскости:

$$m_x = \frac{IS_{yz}}{c} = \frac{Ia^2}{c},$$

$$m_y = \frac{IS_{zx}}{c} = \frac{Ia^2}{c},$$

$$m_z = \frac{IS_{xy}}{c} = \frac{Ia^2}{c}.$$



$$\mathbf{m} = m_x\mathbf{e}_x + m_y\mathbf{e}_y + m_z\mathbf{e}_z = \frac{Ia^2}{c}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

На больших расстояниях $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ представляет собой поле магнитного диполя:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = \\ &= -\frac{Ia^2}{cr^3}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) + 3\frac{Ia^2(x+y+z)}{cr^5}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z), \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Поле во всем пространстве равно (см. задачу 2.4 из [1])

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \mathbf{e}_r.$$

$$\frac{\varepsilon_1 \sigma_1}{\varepsilon_2 \sigma_2} \bullet \text{---}$$

Плотность тока в областях 1 и 2 соответственно равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{2\sigma_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \mathbf{e}_r, \\ \frac{2\sigma_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \mathbf{e}_r. \end{cases}$$

Ток через сферу радиуса r с центром в точке с точечным зарядом q равен

$$\begin{aligned} I &= \iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \iint_{S_1} (\mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S}) + \iint_{S_2} (\mathbf{j}_2 \cdot d\mathbf{S}) = \sigma_1 \iint_{S_1} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) + \sigma_2 \iint_{S_2} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \\ &= (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} 2\pi q = 4\pi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \end{aligned}$$

С учетом $I = -\dot{q}$ получим

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau},$$

$$\text{где } \tau = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} *.$$

* Здесь мы пренебрегли магнитным полем, возникающим согласно $\text{rot } \mathbf{H}(t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}$. Переменное магнитное поле индуцирует токи, искажающие полученное решение для $I(t)$ и $q(t)$. Отметим, что даже для больших τ квазистационарное приближение не выполняется: ни при каких ε_i и σ_i токи смещения в данной задаче не будут малы по сравнению с токами проводимости в двух областях одновременно. Тем не менее именно благодаря токам смещения индукция магнитного поля может быть равной нулю. Нетрудно показать, что $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, если дополнительно выполнено условие $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$.

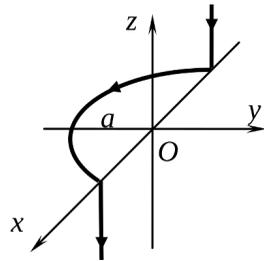
Решение задачи 2

Продольная (z) компонента поля наводится только током в полукольце и равна

$$B_{\parallel} = \frac{\pi I}{ca}.$$

Токи в полупрямых наводят поперечные компоненты поля, которые в точке O компенсируют друг друга.

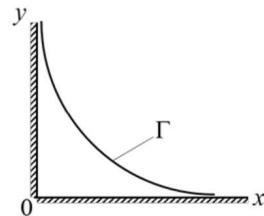
Поэтому поле в точке O равно $\mathbf{B}_O = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_z$.



Решение задачи 3

Нетрудно заметить, что заданным граничным условиям удовлетворяет векторпотенциал в полости в виде

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{A_0}{a_0^2} xy \mathbf{e}_z.$$



Тогда магнитное поле в полости равно

$$\mathbf{H}(x, y) = \text{rot } \mathbf{A}(x, y) = \frac{A_0}{a_0^2} (x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

Далее ищем линейную плотность тока на границе Γ .

Способ 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{12} &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_{12}] = \frac{cA_0}{4\pi a_0^2} \left[(x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y) \times \frac{y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \\ &= \frac{cA_0}{4\pi a_0^2} \frac{x \cdot x - y \cdot (-y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y] = \frac{cA_0}{4\pi a_0^2} \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где x и y берутся в точках границы Γ . Здесь было учтено, что единичный вектор нормали к кривой $f(x, y) = \text{const}$ равен

$$\mathbf{n}_{12} = \frac{f'_x \mathbf{e}_x + f'_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

Поскольку $y|_{\Gamma} = \frac{a_0^2}{x}$, то ответ можно выразить через одну из координат:

$$\mathbf{i}_{12} = \frac{cA_0}{4\pi a_0} \sqrt{\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{x}\right)^2} \mathbf{e}_z.$$

Способ 2.

Решение значительно упрощается, если учесть, что вдоль Γ проходит силовая линия магнитного поля *. Действительно, запишем изменение вектор-потенциала при элементарном смещении координат x , y :

$$dA_z = \frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy.$$

Поскольку $dA_z = 0$ вдоль Γ , то

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0. \quad (1)$$

Но из $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ следует, что

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = B_x, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = -B_y.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{B_x}{dx} = \frac{B_y}{dy},$$

что совпадает с уравнением силовой линии \mathbf{B} .

* Это свойство кривых $A_z(x, y) = \text{const}$ отмечено в учебнике [4] (стр. 160).

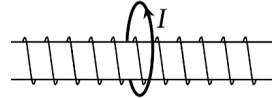
Теперь линейную плотность тока на границе Γ легко получить по формуле

$$i_{12} = \frac{c}{4\pi} \Delta H_\tau = \frac{c}{4\pi} |B| = \frac{cA_0}{4\pi a_0^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{cA_0}{4\pi a_0} \sqrt{\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{x}\right)^2}.$$

Решение задачи 4

Способ 1.

Определим суммарный поток магнитного поля через все витки соленоида, создаваемый проволочным витком с током I . Из равенства коэффициентов взаимной индукции $L_{12} = L_{21} = L_{вз}$, следует, что такой же поток создает соленоид с током I через проволочный виток:



$$\Phi = \frac{4\pi}{c} I \frac{NS}{l} = \frac{L_{вз}}{c} I,$$

где l — длина соленоида, S — площадь его поперечного сечения.

Таким образом, если пустить ток I по проволочному витку, то суммарный поток магнитного поля через все витки соленоида будет равен:

$$\Psi = \frac{L_{вз}}{c} I = \frac{4\pi}{c} I \frac{NS}{l}.$$

Из закона сохранения потока *:

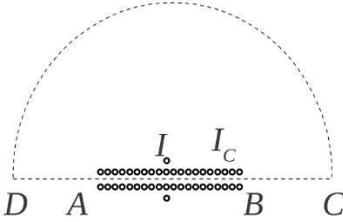
$$\Psi + \Psi_c = \frac{L_{вз}}{c} I + \Phi_c N = \frac{4\pi}{c} I \frac{NS}{l} + \frac{4\pi}{c} I_c \frac{NS}{l} N = 0.$$

* В отличие от потокосцепления, поток через некоторое конкретное сечение соленоида не сохраняется. Токи I и I_c формируют поток, отличнПлоская тонкая проводящая пластинка с удельной проводимостью σ^* ($\mathbf{i} = \sigma^* \mathbf{E}$, \mathbf{i} - ток на единицу длины) разделяет области с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Со стороны области 1 на пластинку по нормали падает плоская линейно поляризованная монохроматическая волна с амплитудой E_0 . Для случая $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ найти среднюю по времени поглощаемую в пластинке мощность w на единицу поверхности (1 б). При какой σ^* w максимальна (1 б)? Для случая $\epsilon_1 > \epsilon_2$ найти σ^* , при которой отраженная волна отсутствует. (2 б) ый от нуля на большей части длины соленоида и изменяющийся вдоль

Отсюда ток в соленоиде равен

$$I_c = -\frac{I}{N}.$$

Способ 2.



Запишем теорему Стокса для контура $ABCD A$ (см. рисунок)

$$\oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c}(I + n \cdot I_c), \quad (1)$$

где $|BC| = |AD| \rightarrow \infty$.

Контурный интеграл на участке AB равен нулю, поскольку на этом участке равен нулю суммарный поток поля по всем виткам.

Контурный интеграл на участке CD стремится к нулю, поскольку на больших расстояниях $H \sim \frac{1}{r^3}$, а $\ell = \pi r$.

Контурный интеграл на участках BC и DA имеет порядок величины $\sim H_0 a$, где H_0 – поле на конце соленоида, а a – радиус соленоида. Эта величина пренебрежимо мала по сравнению со слагаемыми в правой части (1).

В итоге получим

$$\frac{4\pi}{c}(I + N \cdot I_c) = 0 \Rightarrow I_c = -\frac{I}{N}.$$

Решение задачи 5

Пусть по первому кольцу ток I_1 . Предположим, что для индукции магнитного поля, наводимой этим током в пространстве, выполняется соотношение

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k\mathbf{B}_0(\mathbf{r}),$$

него не только по величине, но и по знаку. Эта неоднородность потока обеспечивается силовыми линиями, которые проходят сквозь боковую поверхность соленоида, не пересекая витков, через зазоры между ними.

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ – поле, наводимое таким же током в первом кольце в вакууме.

Если сделанное предположение верно, оно должно удовлетворять уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$ в объеме, а также граничным условиям $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ и $B_{1n} = B_{2n}$ на границе раздела двух сред. Поскольку оба уравнения в объеме выполняются для $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, то они остаются верными и после домножения обеих частей на k и $\frac{k}{\mu_i}$ соответственно.

Значение k найдем из теоремы Стокса для циркуляции \mathbf{H} по окружности, охватывающей второй контур с током и разбиваемой на две равные части границей раздела:

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}) &= \int (\mathbf{H}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}) + \int (\mathbf{H}_2 \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{\mu_1} \int (\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}) + \frac{1}{\mu_2} \int (\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \\ &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \int (\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} I. \end{aligned}$$

С другой стороны теорема Стокса для \mathbf{B}_0 в вакууме по тому же контуру дает

$$\oint (\mathbf{B}_0 \cdot d\boldsymbol{\ell}) = 2 \int (\mathbf{B}_0 \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} I.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{B}_0.$$

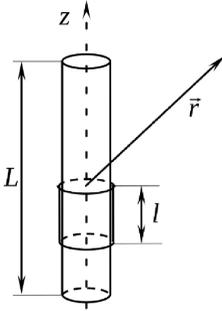
Тогда и потоки поля через второй контур за счет тока, текущего в первом контуре, в среде и в вакууме соответственно относятся как

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

откуда имеем

$$\frac{L_{12}^{\mu} I}{L_{12} I} = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{L_{12}^{\mu}}{L_{12}}, \quad L_{12}^{\mu} = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} L_{12}.$$

Решение задачи 6



Для удаленных точек внутренний соленоид представляет собой магнитный диполь с моментом

$$\mathbf{m}_0 = \frac{nLSI}{c} \mathbf{e}_z.$$

Токи во внешнем соленоиде полностью компенсируют поток магнитного поля через сечение внутреннего соленоида на длине \$l\$. Поэтому момент сверхпроводящего соленоида составляет

$$\mathbf{m}_S = -\frac{nlSI}{c} \mathbf{e}_z,$$

а полный момент системы токов

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_S = \frac{nSI}{c} (L - l) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

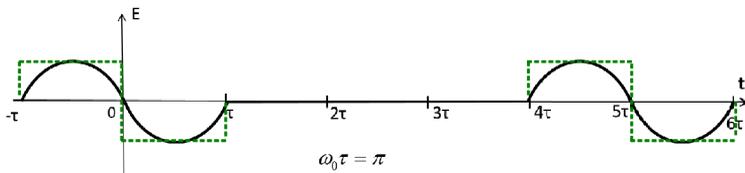
Тогда поле на больших расстояниях записывается как поле магнитного диполя:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где \$\mathbf{m}\$ выражается формулой (1).

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1



Найдем спектр одиночного импульса:

$$\begin{aligned}
 E_1(\omega) &= - \int_{-\tau}^{\tau} E_0 \sin(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = -E_0 \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{i\omega t} dt = \\
 &= -E_0 \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{i(\omega+\omega_0)t}}{2i} dt + E_0 \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2i} dt = \\
 &= iE_0 \left(\frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{\omega+\omega_0} - \frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{\omega-\omega_0} \right) = -iE_0 \sin \omega\tau \left(\frac{1}{\omega+\omega_0} - \frac{1}{\omega-\omega_0} \right).
 \end{aligned}$$

Модуль этой функции в интервале $0 \leq \omega \leq 2\omega_0$ имеет два нуля*: при $\omega = 0$ и $\omega = 2\omega_0$.

Второй импульс добавляет к $E_1(\omega)$ множитель $(1 + e^{5i\omega\tau})$, который по модулю равен

$$2 \cos \frac{5\omega\tau}{2}.$$

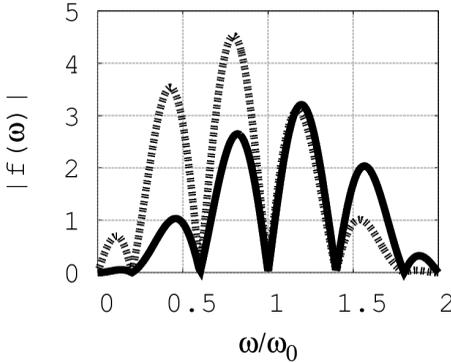
Этот множитель в интервале $0 \leq \omega \leq 2\omega_0$ имеет пять нулей:

$$\text{при } \omega = \left\{ \frac{\omega_0}{5}, \frac{3\omega_0}{5}, \omega_0, \frac{7\omega_0}{5}, \frac{9\omega_0}{5} \right\}.$$

*Нетрудно понять, что таким же расположением нулей и максимумов в заданном интервале частот характеризуется спектр одиночного прямоугольного сигнала, показанного пунктирной линией.

Тогда функция $|E(\omega)|$ имеет семь нулей:

$$\text{при } \omega = \left\{ 0, \frac{\omega_0}{5}, \frac{3\omega_0}{5}, \omega_0, \frac{7\omega_0}{5}, \frac{9\omega_0}{5}, 2\omega_0 \right\}.$$



Максимумы $|E(\omega)|$ расположены между нулями, поэтому число максимумов на единицу меньше числа нулей *: $n_{max} = 7 - 1 = 6$.

На рисунке показаны спектральные плотности, полученные точным расчетом (сплошная кривая - спектр заданного сигнала, пунктирная - спектр прямоугольного аналога).

Решение задачи 2

При отражении плоской монохроматической волны тангенциальная компонента волнового вектора сохраняется, а нормальная компонента меняется на противоположную. ТЕ-волна, кроме того, сдвигается по фазе на π .

Пусть падающая волна имеет вид

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \mathbf{e}_z.$$

После отражения волны \mathbf{E}_1 от стенки $y = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t) + \pi} \mathbf{e}_z.$$

После отражения волны \mathbf{E}_1 от стенки $x = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t) + \pi} \mathbf{e}_z.$$

*Требуется более точный анализ, чтобы показать, что между соседними нулями располагается ровно один максимум.

После отражения волны \mathbf{E}_2 от стенки $x = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} \mathbf{e}_z.$$

После отражения волны \mathbf{E}_3 от стенки $y = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_5(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} \mathbf{e}_z,$$

которая вместе с волной \mathbf{E}_4 образует единую плоскую монохроматическую волну.

Таким образом, суперпозиция всех волн имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 &= E_0 e^{-i\omega t} \left(e^{i(k_x x + k_y y)} + e^{i(-k_x x - k_y y)} \right) \mathbf{e}_z - \\ &- E_0 e^{-i\omega t} \left(e^{i(-k_x x + k_y y)} + e^{i(k_x x - k_y y)} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= 2E_0 e^{-i\omega t} (\cos(k_x x + k_y y) - \cos(k_x x - k_y y)) \mathbf{e}_z = \\ &= -4E_0 e^{-i\omega t} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где $k_x = k \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$, $k_y = -k \sin \alpha = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha$, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$.

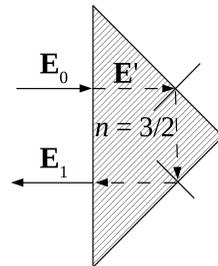
Решение задачи 3

Амплитуда волны, прошедшей через первую границу раздела, равна

$$E' = \frac{2}{n+1} E_0.$$

Падение луча на вторую границу раздела происходит под углом 45° , превышающим угол полного внутреннего отражения θ_c :

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, \quad \sin \theta_c = \frac{1}{n} = 2/3 \approx 0.67$$



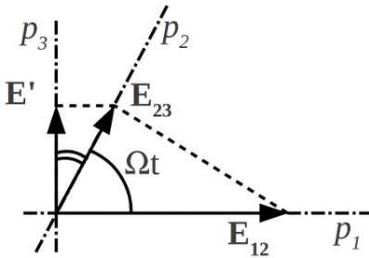
Поскольку при полном внутреннем отражении амплитуда волны сохраняется и, как следует из геометрии, отраженный луч падает на большую грань по нормали, то амплитуда выходящей волны равна

$$E_1 = \frac{2n}{n+1} E' = \frac{4n}{(n+1)^2} E_0.$$

Тогда искомое отношение интенсивностей лучей равно

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 = \frac{(4n)^2}{(n+1)^4} = \frac{\left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^4} \approx 0.92$$

Решение задачи 4



Волна до прохождения через первый поляризатор имеет вид

$$\mathbf{E}_0(t) = E_0 \cdot (1, e^{i\frac{\pi}{2}}) e^{-i\omega_0 t}.$$

(поскольку расстояние между поляризаторами мало, поместим их в точку $z = 0$, и тогда зависимость от

координаты исчезает).

Первый поляризатор пропускает только x -компоненту волны \mathbf{E}_0 , поэтому волна между первым и вторым поляризатором принимает вид

$$\mathbf{E}_{12}(t) = E_0 \cdot (1, 0) e^{-i\omega_0 t}.$$

Второй поляризатор пропускает только волну, модуль которой равен проекции волны \mathbf{E}_{12} на ось второго поляризатора:

$$E_{23}(t) = E_{12} \cos \Omega t e^{-i\omega_0 t}.$$

Проекция волны \mathbf{E}_{23} на ось y равна

$$E_{23y}(t) = E_{12} \cos \Omega t \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Omega t \right) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2} E_0 \sin 2\Omega t e^{-i\omega_0 t}.$$

Такой же модуль будет иметь волна \mathbf{E}' , прошедшая через третий поляризатор:

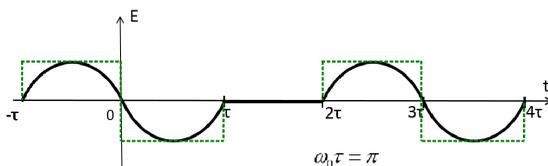
$$\mathbf{E}'(t) = \frac{E_0}{2}(0, 1) \sin 2\Omega t e^{-i\omega t}.$$

Спектральная плотность такого сигнала равна (см. ответ к задаче 2.2а из [2], стр. 190, с заменой $\omega_0 \rightarrow 2\Omega$ и $\omega \rightarrow (\omega - \omega_0)$):

$$|E'(\omega)| = \frac{E_0}{2} (\delta(\omega - (\omega_0 + 2\Omega)) + \delta(\omega - (\omega_0 - 2\Omega))).$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1



Спектр одиночного импульса (см. задачу 1 вар.1 на стр. 151):

$$E_1(\omega) = - \int_{-\tau}^{\tau} E_0 \sin(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = -iE_0 \sin \omega \tau \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \right).$$

$|E_1(\omega)|$ имеет два нуля в интервале $0 \leq \omega \leq 2\omega_0$ *:

$$\text{при } \omega = \{0, 2\omega_0\}.$$

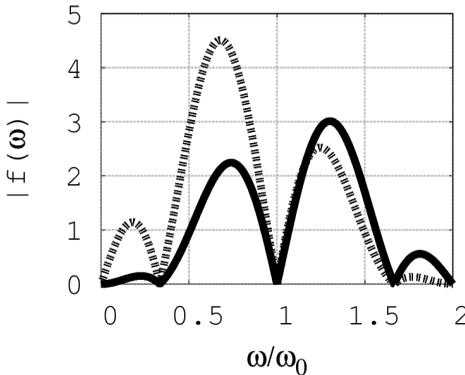
*Нетрудно понять, что таким же расположением нулей и максимумов в заданном интервале частот характеризуется спектр одиночного прямоугольного сигнала, показанного пунктирной линией.

С учетом второго импульса к спектральной функции добавляется множитель $1 + e^{3i\omega\tau}$, равный по модулю $2 \cos \frac{3\omega\tau}{2}$. В интервале $0 \leq \omega \leq 2\omega_0$ этот множитель имеет три нуля:

$$\text{при } \omega = \left\{ \frac{\omega_0}{3}, \omega_0, \frac{5\omega_0}{3} \right\}.$$

Тогда функция $|E(\omega)|$ имеет пять нулей:

$$\text{при } \omega = \left\{ 0, \frac{\omega_0}{3}, \omega_0, \frac{5\omega_0}{3}, 2\omega_0 \right\}.$$



Локальные максимумы функции $|E(\omega)|$ расположены между нулями, поэтому число максимумов на единицу меньше числа нулей*: $n_{max} = 5 - 1 = 4$.

На рисунке показаны спектральные плотности, полученные точным расчетом (спектр заданного сигнала показан сплошной линией, прямоугольного аналога - пунктиром).

Решение задачи 2

При отражении плоской монохроматической волны тангенциальная компонента волнового вектора сохраняется, а нормальная компонента меняется на противоположную. Кроме того, нормальные компоненты ТМ-волны сохраняются, а тангенциальные меняются на противоположные.

Пусть падающая волна имеет вид

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}.$$

*Требуется более точный анализ, чтобы показать, что между соседними нулями располагается ровно один максимум.

После отражения волны \mathbf{E}_1 от стенки $y = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = (-E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(k_x x - k_y y - \omega t)}.$$

После отражения волны \mathbf{E}_1 от стенки $x = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) = (E_x \mathbf{e}_x - E_y \mathbf{e}_y) e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)}.$$

После отражения волны \mathbf{E}_2 от стенки $x = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{r}, t) = (-E_x \mathbf{e}_x - E_y \mathbf{e}_y) e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)}.$$

После отражения волны \mathbf{E}_3 от стенки $y = 0$ получается волна

$$\mathbf{E}_5(\mathbf{r}, t) = (-E_x \mathbf{e}_x - E_y \mathbf{e}_y) e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)}.$$

которая вместе с волной \mathbf{E}_4 образует единую ТМ-волну.

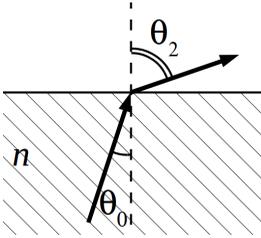
Суперпозицию всех волн вычислим отдельно для каждой из компонент поля

$$\begin{aligned} & (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)_x = \\ & = e^{-i\omega t} \left(e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{i(-k_x x - k_y y)} - e^{i(k_x x - k_y y)} + e^{i(-k_x x + k_y y)} \right) E_x = \\ & = 2i e^{-i\omega t} (\sin(k_x x + k_y y) - \sin(k_x x - k_y y)) E_x = \\ & = 4i e^{-i\omega t} \sin(k_y y) \cos(k_x x) E_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)_y = \\ & = e^{-i\omega t} \left(e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{i(-k_x x - k_y y)} + e^{i(k_x x - k_y y)} - e^{i(-k_x x + k_y y)} \right) E_y = \\ & = 2i e^{-i\omega t} (\sin(k_x x + k_y y) + \sin(k_x x - k_y y)) E_y = \\ & = 4i e^{-i\omega t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) E_y, \end{aligned}$$

где $k_x = k \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$, $k_y = -k \sin \alpha = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha$, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$,
 $E_x = E_0 \sin \alpha$, $E_y = E_0 \cos \alpha$.

Решение задачи 3



Из условия задачи понятно, что свет падает под углом Брюстера:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \theta_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = \sin \theta_0 = \frac{3}{5}.$$

Для ТЕ-волны коэффициент пропускания по амплитуде получим из формулы Френеля:

$$\left| \frac{E_2}{E_0} \right| = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} = \frac{2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{32}{25}.$$

Отношение интенсивностей равно *

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{\cos \theta_2}{n \cos \theta_0} \left(\frac{E_2}{E_0} \right)^2 = \frac{\frac{3}{5} \cdot 32^2}{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 25^2} \approx 0.92$$

* Коэффициент прохождения можно вычислить и как $1 - R$, где коэффициент отражения R рассчитывается из другой формулы Френеля:

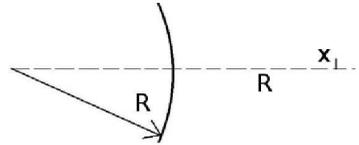
$$\frac{E_1}{E_0} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} = \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_2}{\sin \frac{\pi}{2}} = \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25},$$

$$R = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 = \frac{49}{625}, \quad 1 - R = \frac{625 - 49}{625} = \frac{576}{625} \approx 0.92$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Поскольку в задаче не требуется строить изображение, то удобно воспользоваться матричным формализмом. Матрица отражения равна:



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

Обратное увеличение вычисляется по формуле

$$K^{(-1)} = d_1 \cdot m_{21} + m_{22} = R \cdot \left(-\frac{2}{R}\right) - 1 = -3,$$

где $d_1 = R$ – расстояние от предмета до зеркала.

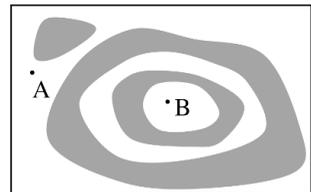
Увеличение равно * $K = -\frac{1}{K^{(-1)}} = \frac{1}{3}$.

Размер изображения $x' = K \cdot x = \frac{x}{3}$.

Решение задачи 2

Условие на максимум или минимум в точке, где толщина пластины равна h , можно записать в виде:

$$2hn = m\lambda + \text{const},$$



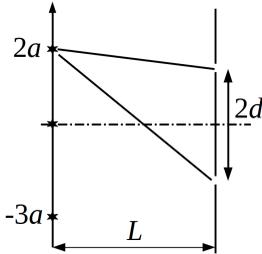
где m – порядок максимума или минимума, а const равна 0 или $\lambda/2$ в зависимости от того, для максимума или для минимума записано условие, а также от соотношения показателей преломления на обеих границах пленки (одно и то же значение const входит в

*При наличии нечетного числа отражений определитель матрицы преобразования луча от предмета до изображения $\text{Det}A = K \cdot K^{(-1)} = -1$.

выражения для h_A и для h_B , поэтому на перепад толщины Δh оно не влияет). Считая, что между точками A и B m меняется на 2, из этого условия найдем перепад толщины:

$$\Delta h \approx 2 \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{n} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \text{ мкм} = 250 \text{ нм}.$$

Решение задачи 3



разность хода в параксиальном приближении равна

$$\Delta r_i = \frac{2d \cdot a}{L} i.$$

Чтобы эта дробь была кратна λ для взаимно простых $i = 2$ и $i = -3$, должно выполняться равенство

$$\frac{2d \cdot a}{L} = m\lambda, \quad d = \frac{L\lambda m}{2a}.$$

Минимальное значение d соответствует $m = 1$:

$$d_{min} = \frac{L\lambda}{2a}.$$

При этом

$$\Delta r|_{i=2} = 2 \frac{2L\lambda}{2a} \frac{a}{L} = 2\lambda,$$

$$\Delta r|_{i=-3} = -3 \frac{2L\lambda}{2a} \frac{a}{L} = -3\lambda.$$

Решение задачи 4

В общем случае волны в щелях сдвинуты по фазе. Выясним величину сдвига. По условию длина волны в свободном пространстве равна λ_0 . Отсюда частота

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}.$$

Закон дисперсии:

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda_0} n\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0}\right)^2 (4 - 2n^2).$$

Условие $k_z^2 > 0$ выполняется только при $n = 1$. Тогда

$$k_z^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0}\right)^2 (4 - 2), \quad k_z = \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda_0}.$$

Таким образом, в волноводе распространяется H_{01} -волна:

$$E(x, z) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp\left(i\frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda_0}z - i\omega t\right).$$

Разность фаз волн в щелях:

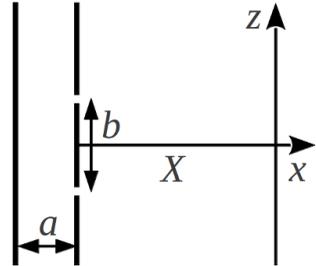
$$\Delta\phi = \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda_0} \cdot b = \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda_0} \cdot 7 \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} = 7\pi.$$

Поскольку разность фаз составляет нечетное число π , то волны в щелях находятся в противофазе. В параксиальном приближении условие 1-го максимума в точке экрана $z = b/2 = 7a/2$:

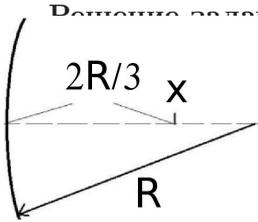
$$\frac{b \cdot z}{X} + \lambda_0/2 = \frac{b^2}{2X} + \lambda_0/2 = \frac{7^2\lambda_0^2}{4X} + \lambda_0/2 = \lambda_0, \quad X = 49\lambda_0/2.$$

Проверим выполнение параксиального приближения:

$$\frac{b}{X} = \frac{7\lambda_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{49\lambda_0} \approx 0.202 \ll 1 \text{ (верно).}$$



Контрольная работа 2.2, вариант 2



Применим матричный формализм. Матрица отражения равна (учтено, что зеркало вогнутое):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

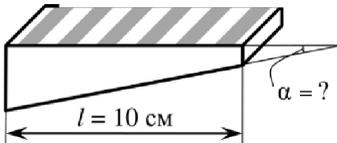
Обратное увеличение вычисляется по формуле

$$K^{(-1)} = d_1 \cdot m_{21} + m_{22} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{2}{R} - 1 = \frac{1}{3},$$

где $d_1 = \frac{2R}{3}$ – расстояние от предмета до зеркала. Увеличение равно (см. примечание к задаче 1 вар. 1 на стр. 159)

$$K = -\frac{1}{K^{(-1)}} = -3.$$

Размер изображения $x' = K \cdot x = -3x$ (изображение перевернуто).

Решение задачи 2

При интерференции света в тонких пленках, наблюдаемой под прямым углом, переход между темными и светлыми полосами обусловлен изменением толщины пленки на $\frac{\lambda}{4n}$.

При этом оптическая длина хода луча в пленке (туда и обратно) изменяется на $\frac{\lambda}{2}$, а фаза на π . Края клина разделены 12-ю переходами между светлыми и темными полосами. Поэтому перепад толщины клина оценивается как

$$\Delta h \approx 12 \frac{\lambda}{4n} = \frac{3\lambda}{n} = \frac{3 \cdot 0.5}{1.5} = 1 \text{ мкм},$$

а угол

$$\alpha = \frac{\Delta h}{l} = \frac{10^{-4} \text{ см}}{10 \text{ см}} = 10^{-5} \text{ рад.}$$

Решение задачи 3

Интерференционные картины от всех источников совпадают, если с точностью до $m\lambda$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) совпадают разности хода лучей от каждого источника до щелей. Для источника, положение которого на вертикальной оси составляет $i \cdot a$, разность хода в параксиальном приближении равна

$$\Delta r_i = \frac{2d \cdot a}{L} i.$$

Чтобы эта дробь была кратна λ для взаимно простых $i = 3$ и $i = -4$, должно выполняться равенство

$$\frac{2d \cdot a}{L} = m\lambda, \quad d = \frac{L\lambda m}{2a}.$$

Минимальное значение d соответствует $m = 1$:

$$d_{min} = \frac{L\lambda}{2a}.$$

При этом

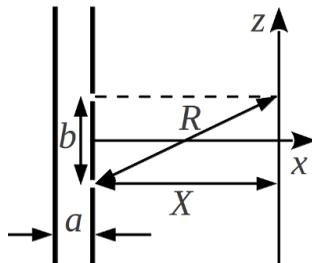
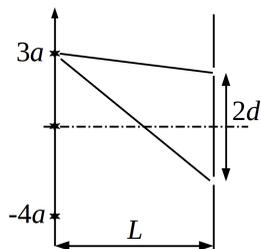
$$\Delta r|_{i=3} = 3 \frac{2L\lambda}{2a} \frac{a}{L} = 3\lambda,$$

$$\Delta r|_{i=-4} = -4 \frac{2L\lambda}{2a} \frac{a}{L} = -4\lambda.$$

Решение задачи 4

Волны в щелях находятся в противофазе (см. решение задачи 4 вар. 1 на стр. 161). Тогда условие минимума m -го порядка в точке экрана $z = b/2 = 7a/2$:

$$\begin{aligned} R &= X + m\lambda_0, \\ \sqrt{X^2 + b^2} &= X + m\lambda_0, \\ X^2 + b^2 &= X^2 + 2m\lambda_0 X + m^2\lambda_0^2, \\ X &= \frac{b^2 - m^2\lambda_0^2}{2m\lambda_0}. \end{aligned}$$



Максимальное значение X соответствует $m = 1$:

$$X_{max} = \frac{b^2 - \lambda_0^2}{2\lambda_0} = \frac{7^2 \lambda_0^2 / 2 - \lambda_0^2}{2\lambda_0} = 47\lambda_0 / 4.$$

Приведенное решение является точным. Параксиальное приближение в виде сильного неравенства не выполняется:

$$\frac{b}{X_{max}} = \frac{7\lambda_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{47\lambda_0} \approx 0.42 < 1.$$

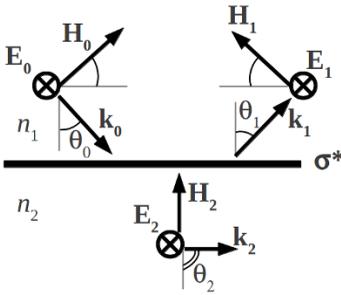
Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Граничные условия на тангенциальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$E_0 + E_1 = E_2,$$

$$H_0 \cos \theta_0 - H_1 \cos \theta_1 = H_2 \cos \theta_2 + \frac{4\pi}{c} J = H_2 \cos \theta_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_2.$$



Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m} e^{i(k_{0x}x - \omega t + \phi_0)}$).

Если отраженная волна отсутствует, то $E_1 = 0$, и из первого уравнения следует, что $E_2 = E_0$. При полном внутреннем отражении $\cos \theta_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Учтем также, что $H_i = \sqrt{\epsilon_i} E_i$. Тогда второе уравнение принимает вид:

$$\sqrt{\epsilon_1} E_0 \cos \theta_0 = \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_0,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда } \sigma^* &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 = \frac{c}{4\pi} n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0} = \frac{c}{4\pi} n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \end{aligned}$$

Решение задачи 2

Внешний радиус m -ой зоны Френеля выражается формулой

$$\rho_m = \sqrt{mz_p\lambda}$$

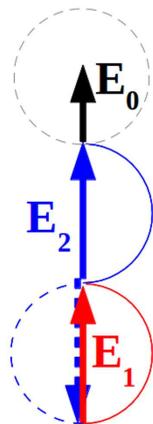
Тогда внутренний радиус кольца равен

$$d_1 = \rho_1 = \sqrt{z_p\lambda} = \sqrt{2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм},$$

внешний

$$d_2 = \rho_1 = \sqrt{2z_p\lambda} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 1.41 \text{ мм}.$$

Амплитуду волны удобно проанализировать с помощью диаграммы Френеля. На ней 1-я зона представляет собой полуокружность, концы которой образуют вектор $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{E}_0$ (снизу вверх), 3-я и все последующие представляют собой спираль с итоговым вкладом в поле, равным \mathbf{E}_0 (снизу вверх). 2-я зона без кольца была бы полуокружностью диаметра $2E_0$, идущей сверху вниз (синий пунктир на рис.). Поэтому для максимализации поля нужно сделать так, чтобы полуокружность, отвечающая 2-й зоне, шла снизу вверх (синяя сплошная линия). Для этого достаточно придать волне во 2-й зоне дополнительный сдвиг по фазе на π . Условие этого



$$k(n-1)\Delta_{min} = \pi, \quad \Delta_{min} = \frac{\pi}{k(n-1)} = \frac{\lambda}{2(n-1)}.$$

Амплитуда волны при этом равна

$$E_{max} = 2E_0 + 2E_0 + E_0 = 5E_0.$$

Решение задачи 3

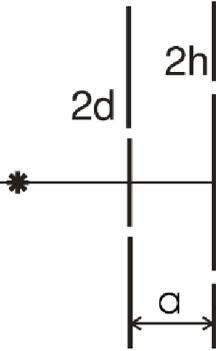


Схема слева до второго экрана представляет собой классическую схему Юнга, поэтому интенсивность света на втором экране как функция x описывается формулой

$$I_2(x) = I_{20} \left(1 + \cos \left(k \frac{2d \cdot x}{a} \right) \right),$$

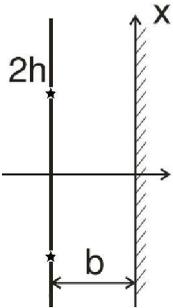
в частности, в щелях $x = h$ и

$$I_2 = I_{20} \left(1 + \cos \left(k \frac{2d \cdot h}{a} \right) \right).$$

Если $I_2 = 0$, то и интенсивность на третьем экране всюду равна нулю. Для этого должно выполняться условие

$$\cos \left(k \frac{2d \cdot h}{a} \right) = -1, \quad k \frac{2d \cdot h}{a} = \pi + 2\pi m, \quad d = \frac{\pi + 2\pi m}{2kh} a,$$

$$d_{min} = \frac{\pi}{2kh} a = \frac{\lambda a}{4h}.$$



Если яркость в щелях на втором экране не равна нулю, то правая часть схемы также сводится к схеме Юнга. Тогда интенсивность света на третьем экране равна

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos \left(k \frac{2d \cdot h}{a} \right) \right) \left(1 + \cos \left(k \frac{2h \cdot x}{b} \right) \right).$$

Решение задачи 4

Общее выражение для потерь энергии релятивистской заряженной частицы на излучение:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{2q^4}{3m^2c^3}\gamma^2 \{(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2\},$$

где поля относятся к лабораторной системе отсчета.

Случай 1): $\mathbf{E} = 0$.

Тогда $\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}] = \beta H \mathbf{e}_\perp$ и $(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) = 0$.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{2q^4}{3m^2c^3}\gamma^2(\beta H)^2 = -\frac{2q^4}{3m^2c^3}\gamma^2\beta^2 H^2.$$

Случай 2): $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel$.

Можно упростить решение, воспользовавшись свойством инвариантности $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ относительно преобразований Лоренца. В сопутствующей системе отсчета $\boldsymbol{\beta}'=0$, $\gamma' = 1$. Тогда

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]) = 0, \quad \mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E} \text{ и}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial t'} = -\frac{2q^4}{3m^2c^3}(\gamma')^2 E^2 = -\frac{2q^4}{3m^2c^3} E^2.$$

Решение задачи 5

Под действием электрического поля свободные заряды приобретают ускорение, равное

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{e}_x} = \frac{qE e^{i(kz_i - \omega t)}}{m} \mathbf{e}_x,$$

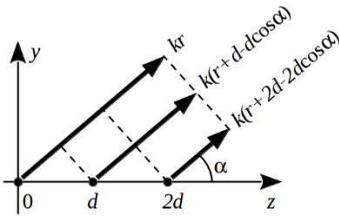
где z_j – положение i -го заряда. Сила Лоренца по модулю равна $\frac{vqH}{c} = \beta qE$, то есть значительно меньше кулоновской, и ею можно пренебречь.

Тогда вследствие дипольного излучения j -го заряда в волновой зоне * формируется магнитное поле

$$\mathbf{B}_j = \frac{r_e}{r} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + d \cdot j)} \sin \theta \mathbf{e}_\alpha.$$

Вопросы, сформулированные в данной задаче, относятся к плоскости yz , $\theta = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\mathbf{B}_j = \frac{r_e}{r} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + d \cdot j)} \mathbf{e}_\alpha.$$



Заряды осциллируют и излучают когерентно, но несинфазно. Для соседей изначальный сдвиг по фазе составляет kd . Кроме того, если обозначить за r расстояние от левого источника до фронта волны, излучаемой в волновой зоне под углом α к оси z , то фаза излучения от j -го источника запишется как

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \Phi_{0j} + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j}) = \Phi_{0j} + k_z(z - z_{0j}) + k_y(y - y_{0j}) = \\ &= kd \cdot j + k \cos \alpha (z - j \cdot d) + k_y y = \Psi + \chi \cdot j, \end{aligned}$$

где $\Psi = k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ включает часть фазы, одинаковую для всех источников, а $\chi = kd(1 - \cos \alpha)$.

В результате интерференции трех волн магнитное поле в волновой зоне составит

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=0}^2 \mathbf{B}_j = \frac{r_e}{r} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \sum_{j=0}^2 e^{i\chi j} = \frac{r_e}{r} E_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{1 - e^{3i\chi}}{1 - e^{i\chi}}.$$

* В ближней зоне ($kr \sim 1$) формируется поле порядка $\frac{d_0}{\lambda^3} \sim \frac{r_e}{\lambda} E_0 \ll E_0$. Поэтому можно пренебречь влиянием излучения, рассеянного одним свободным зарядом, на ускорение соседних свободных зарядов.

Модуль вектора Пойнтинга рассеянной волны равен

$$S = \frac{c}{4\pi} B^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{r_e^2}{r^2} E_0^2 \frac{\sin^2(3\chi/2)}{\sin^2(\chi/2)}.$$

$$d\sigma = \frac{Sr^2 d\Omega}{S_0} = r_e^2 \frac{\sin^2(3\chi/2)}{\sin^2(\chi/2)} d\Omega.$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Sr^2}{S_0} = r_e^2 \frac{\sin^2(3\chi/2)}{\sin^2(\chi/2)} = r_e^2 \frac{\sin^2(3kd(1 - \cos \alpha)/2)}{\sin^2(kd(1 - \cos \alpha)/2)}.$$

В случае $d = \frac{\lambda}{4}$, $\frac{kd}{2} = \frac{\pi}{4}$

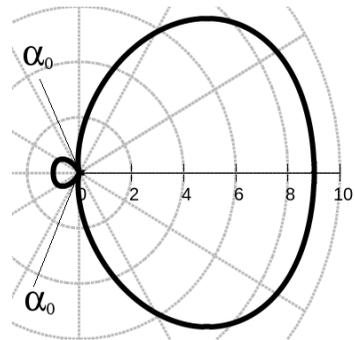
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\sin^2(3\pi(1 - \cos \alpha)/4)}{\sin^2(\pi(1 - \cos \alpha)/4)}.$$

Качественная диаграмма строится по характерным точкам:

$$\alpha = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = 9r_e^2 \text{ (max)},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2,$$

$$\alpha = \pi, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2,$$



два нуля при условии $3(1 - \cos \alpha_0)/4 = 1 \left(\frac{\pi}{2} < |\alpha_0| < \pi \right)$, $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0$.

Решение задачи 6

Пусть 4-вектор потенциала в сопутствующей системе отсчета имеет следующие компоненты (здесь и всюду ниже будем пользоваться контравариантным представлением):

$$(A^i)' = (\varphi', A'_x, A'_y, A'_z).$$

Компоненты 4-потенциала в лабораторной системе равны

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\varphi' + \beta\gamma A'_x \\ \beta\gamma\varphi' + \gamma A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Поскольку в сопутствующей системе имеем скалярный потенциал, равный нулю, и векторный потенциал магнитного диполя $A'(r') = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}'}{r'^3}$ (то есть $A'_x = 0$), то компоненты 4-потенциала в лабораторной и сопутствующей системах совпадают и выражаются через координаты сопутствующей системы как

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad A_x = A'_x = 0, \quad A_y = A'_y = -\frac{m_0 z'}{r'^3}, \quad A_z = A'_z = \frac{m_0 y'}{r'^3}.$$

Чтобы выразить вектор-потенциал через координаты (x, y, z) лабораторной системы, запишем связь между 4-векторами события в различных системах:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma x \\ -\beta\gamma ct + \gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Подставляя полученные выражения в (1), получим:

$$\varphi = 0, \quad A_x = 0, \quad A_y = -\frac{m_0 z}{r'^3}, \quad A_z = \frac{m_0 y}{r'^3},$$

$$\text{или в векторной записи } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}}{r'^3},$$

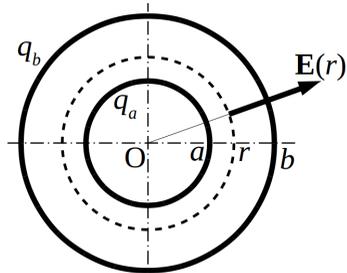
$$\text{где } \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}' = (\gamma(x - vt), y, z), \quad r' = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}.$$

2014/2015 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Система обладает сферической симметрией, что позволяет считать поле радиально направленным и зависящим только от радиуса в сферических координатах. Тогда из теоремы Гаусса поток поля через поверхность сферы радиуса r с центром O равен



$$\oiint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q,$$

где Q – заряд, заключенный внутри сферы.

На разных расстояниях от центра O имеем:

$$r < a : \quad 4\pi r^2 E(r) = 0 \quad \rightarrow E(r) = 0,$$

$$a < r < b : \quad 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q_a \quad \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{q_a}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

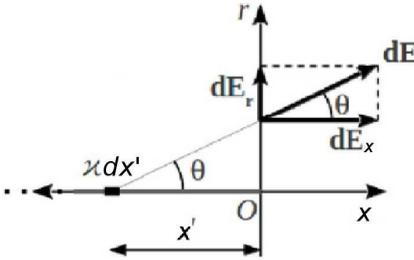
$$r > b : \quad 4\pi r^2 E(r) = 4\pi(q_a + q_b) \quad \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Для потенциала получим:

$$r > b : \quad \varphi(r) = \frac{q_a + q_b}{r},$$

$$a < r < b : \quad \varphi(r) = \frac{q_a}{b} + \frac{q_a}{r},$$

$$r < a : \quad \varphi(r) = \frac{q_a}{b} + \frac{q_a}{a}.$$



Для определения x -компоненты поля выделим на стержне элемент длины dx' на расстоянии x' от точки O . Заряд элемента $dq = \kappa dx'$, элементарное поле в точке $(x, r) = (0, a)$ равно

$$dE = \frac{dq}{(x'^2 + a^2)},$$

а x -компонента элементарного поля

$$dE_x = \frac{dq}{(x'^2 + a^2)} \cos \theta = \frac{dq}{(x'^2 + a^2)} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + a^2}}.$$

Вклад всего стержня в x -компоненту поля получим интегрированием по длине стержня:

$$E_x = \int_0^{\infty} \frac{\kappa x' dx'}{(x'^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\kappa}{a}.$$

Из симметрии задачи следует, что вклад стержня в r -компоненту поля составляет половину от поля прямого бесконечного провода:

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\kappa}{a} = \frac{\kappa}{a}.$$

Решение задачи 3

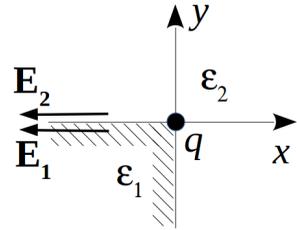
Будем искать поле в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{A_1}{r^2} \mathbf{e}_r & \text{в области 1,} \\ \frac{A_2}{r^2} \mathbf{e}_r & \text{в области 2.} \end{cases} \quad (1)$$

В объеме каждой области поле в виде (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

На границе раздела должны удовлетворяться граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$



Второе условие выполняется автоматически, а из первого получаем, что

$$\frac{A_1}{r^2} = \frac{A_2}{r^2} \rightarrow A_1 = A_2.$$

Связь между $A = A_1 = A_2$ и q найдем из теоремы Гаусса, взяв за область интегрирования сферу радиуса r с центром в начале координат (учтем, что область 1 занимает $\frac{1}{8}$ часть полного телесного угла):

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) &= \iint_{S_1} (\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}) + \iint_{S_2} (\mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}) = \Omega_1 r^2 \frac{A}{\varepsilon_1 r^2} + \Omega_2 r^2 \frac{A}{\varepsilon_2 r^2} = \\ &= \frac{4\pi}{8} \varepsilon_1 A + 7 \frac{4\pi}{8} \varepsilon_2 A = \frac{\pi}{2} (\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2) A = 4\pi q, \end{aligned}$$

откуда

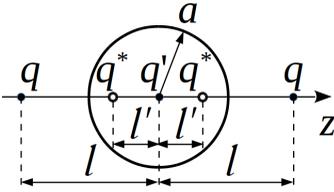
$$A = \frac{8q}{\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2}.$$

Подставляя найденное A в (1), получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{8q}{\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Решение задачи 4

Согласно методу изображений поле в пространстве описывается системой заданных и фиктивных зарядов. Система фиктивных зарядов состоит из двух зарядов $q^* = -\frac{a}{7}q$, расположенных по обе стороны от центра шара на расстоянии $\frac{a^2}{7}$ от центра, и одного заряда $q' = 2\frac{a}{7}q$ в самом центре.



Возмущающий потенциал обусловлен только фиктивными зарядами. Их полный заряд и дипольный момент равны нулю. Тензор квадрупольных моментов системы зарядов-

изображений обладает следующими элементами:

$$D_{zz} = -2\frac{a}{l}q\left(3\frac{a^4}{l^2} - \frac{a^4}{l^2}\right) = -4\frac{a^5}{l^3}q,$$

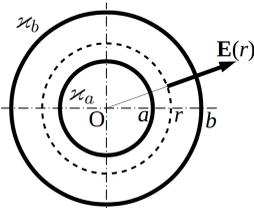
$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz} = 2\frac{a^5}{l^3}q.$$

Остальные элементы равны нулю.

Искомый возмущающий потенциал равен

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2r^5}(D_{zz}z^2 + D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2) = \frac{1}{2r^5}\frac{a^5}{l^3}q(-4z^2 + 2x^2 + 2y^2) = \\ &= -\frac{a^5}{l^3} \cdot \frac{2r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^5} q = -\frac{a^5}{l^3} \cdot \frac{2 \cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta}{r^3} q = -\frac{a^5}{l^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} q. \end{aligned}$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2



ни 1

Система обладает аксиальной симметрией, что позволяет считать поле радиально направленным и зависящим только от радиуса в цилиндрических координатах. Тогда из теоремы Гаусса поток поля через поверхность цилиндра радиуса r и высотой h с осью z равен

$$\oiint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = 2\pi r h E(r) = 4\pi Q,$$

где Q – заряд, заключенный внутри цилиндра.

На разных расстояниях от оси z имеем:

$$r < a : \quad 2\pi r h E(r) = 0 \quad \rightarrow E(r) = 0,$$

$$a < r < b : \quad 2\pi r h E(r) = 4\pi \varkappa_a h \quad \rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{2\varkappa_a}{r} \mathbf{e}_r,$$

$$r > b : \quad 2\pi r h E(r) = 4\pi(\varkappa_a + \varkappa_b)h \quad \rightarrow \mathbf{E}(r) = 2\frac{\varkappa_a + \varkappa_b}{r} \mathbf{e}_r.$$

Для потенциала с учетом заданного граничного значения получим:

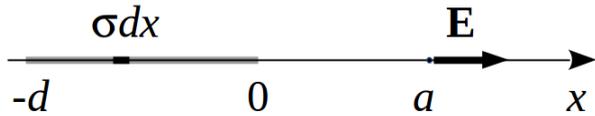
$$r > b : \quad \varphi(r) = -2(\varkappa_a + \varkappa_b) \ln \frac{r}{b},$$

$$a < r < b : \quad \varphi(r) = 2\varkappa_a \ln \frac{b}{r},$$

$$r < a : \quad \varphi(r) = 2\varkappa_a \ln \frac{b}{a}.$$

Решение задачи 2

По принципу суперпозиции искомое поле равно интегрально-



му вкладу от элементарных полосок шириной dx . Каждая элементарная полоска может рассматриваться как заряженная нить с линейной плотностью заряда σdx . Тогда

$$dE = \frac{2\sigma dx}{a - x},$$

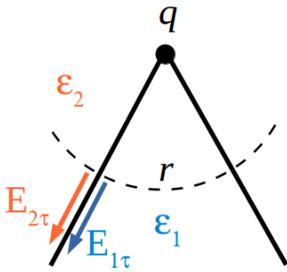
а полное поле

$$E = \int_{-d}^0 \frac{2\sigma dx}{a - x} = 2\sigma \ln \frac{d + a}{a}.$$

В пределе $d \ll a$ получаем поле заряженной нити:

$$E = 2\sigma \ln \frac{d + a}{a} = 2\sigma \ln \left(1 + \frac{d}{a} \right) \approx 2\sigma \frac{d}{a} = \frac{2\varkappa}{a},$$

где $\varkappa = 2\sigma d$.



3

Будем искать поле в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{A_1}{r^2} \mathbf{e}_r & \text{в области 1,} \\ \frac{A_2}{r^2} \mathbf{e}_r & \text{в области 2.} \end{cases} \quad (1)$$

В объеме каждой области поле в виде

(1) удовлетворяет уравнениям Максвелла

ла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

На границе раздела должны выполняться граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Второе условие выполняется автоматически, а из первого получаем, что

$$\frac{A_1}{r^2} = \frac{A_2}{r^2} \rightarrow A_1 = A_2.$$

Связь между $A = A_1 = A_2$ и q найдем из теоремы Гаусса, взяв за область интегрирования сферу радиуса r с центром в вершине конуса:

$$\iint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \iint_{S_1} (\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}) + \iint_{S_2} (\mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}) = \Omega_1 r^2 \frac{A}{\varepsilon_1 r^2} + \Omega_2 r^2 \frac{A}{\varepsilon_2 r^2} =$$

$$= 2\pi(1 - \cos \theta_0) \varepsilon_1 A + 2\pi(1 + \cos \theta_0) \varepsilon_2 A = 4\pi q,$$

откуда

$$A = \frac{2q}{(1 - \cos \theta_0) \varepsilon_1 + (1 + \cos \theta_0) \varepsilon_2}.$$

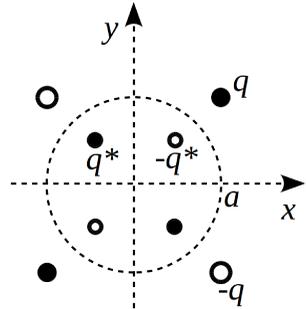
Подставляя найденное A в (1), получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2q}{((1 - \cos \theta_0) \varepsilon_1 + (1 + \cos \theta_0) \varepsilon_2) r^2} \mathbf{e}_r,$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2q}{((1 - \cos \theta_0) \varepsilon_1 + (1 + \cos \theta_0) \varepsilon_2) r}.$$

Решение задачи 4

Воспользуемся методом изображений. Система фиктивных зарядов, обеспечивающих вместе с зарядом-оригиналом равенство нулю потенциала на плоскостях и сферическом выступе, показана на рисунке *. Она представляет собой два плоских квадруполья со сторонами $2a$ и $2\frac{a^2}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a$ соответственно. Полный заряд и дипольный момент системы равны нулю. Выражение для квадрупольных моментов плоского квадруполья получено в задаче 1.42(б) из задачника [1]. С учетом размеров квадрупольей, знаков и величины составляющих его зарядов в нашем случае имеем:



$$D_{xy} = D_{yx} = D_{1xy} + D_{2xy} = -3(2a)^2q + 3a^2q^* = -12a^2q + 3a^2\frac{q}{\sqrt{2}}.$$

Остальные элементы тензора D_{ij} равны нулю.

Тогда искомым потенциал приблизительно равен

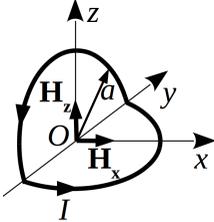
$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2} \frac{D_{xy} + D_{yx}}{r^5} xy = - \left(12 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \frac{a^2q}{r^5} xy,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

* Строго говоря, система зарядов-изображений включает еще и точечный заряд $+q$, обеспечивающий нейтральность проводника. Но, поскольку этот заряд удален на бесконечность, он не влияет на формирование потенциала. По тем же соображениям не влияет на потенциал и любой конечный заряд, нанесенный на проводник, так как ему соответствует фиктивный точечный заряд, удаленный на бесконечность.

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1



Запишем закон Био-Савара:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int \frac{[\mathbf{dl} \times \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Для вертикального участка витка векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{R} лежат в плоскости yz , поэтому их векторное произведение направлено параллельно оси x :

$$\mathbf{B}_x = \frac{\pi I}{cR} \mathbf{e}_x.$$

Для горизонтального участка витка векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{R} лежат в плоскости xy , поэтому их векторное произведение направлено параллельно оси z :

$$\mathbf{B}_z = \frac{\pi I}{cR} \mathbf{e}_z.$$

По принципу суперпозиции результирующее поле равно

$$\mathbf{B}_o = \frac{\pi I}{cR} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z), \quad B_o = \frac{\pi I}{cR} \sqrt{2}.$$

Решение задачи 2

Ток I , текущий по прямому проводу, формирует магнитное поле, которое всюду в плоскости рамки направлено по оси y . Сила Ампера на элемент $d\mathbf{l}_1$ рамки с током I_1 равна

$$d\mathbf{F} = \frac{2II_1}{c} \frac{[d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}]}{cR^2} = \frac{2II_1}{c^2} \frac{[d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_y]}{R}.$$

Силы на отрезки рамки, ориентированные вдоль оси x , взаимно компенсируются, так как они отличаются только знаком I_1 . На отрезки рамки, параллельные оси z , действуют силы

$$\mathbf{F}|_{R=a} = \frac{2II_1 h}{c^2} \frac{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y]}{a} = -\frac{2II_1 h}{c^2 a} \mathbf{e}_x$$

и

$$\mathbf{F}|_{R=a+b} = \frac{2II_1h}{c^2} \frac{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y]}{a+b} = \frac{2II_1h}{c^2(a+b)} \mathbf{e}_x.$$

Суммарная сила направлена противоположно оси x и равна

$$F = \frac{2II_1h}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) = \frac{2II_1hb}{c^2a(a+b)}.$$

Решение задачи 3

Магнитное поле Земли в дипольном приближении:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5},$$

где \mathbf{m} – магнитный дипольный момент Земли.

В сферических координатах

$$\mathbf{B}(R, \theta) = \frac{2m \cos \theta}{R^3} \mathbf{e}_R + \frac{m \sin \theta}{R^3} \mathbf{e}_\theta.$$

В Новосибирске

$$B(R, 45^\circ) = \left| \frac{2m}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_R + \frac{m}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\theta \right| = \frac{m}{R^3} \sqrt{5}.$$

Угол наклона к горизонту равен *

$$\beta = \arctg \left(\frac{B_R}{B_\theta} \right) = \arctg(2) \approx 63^\circ.$$

На магнитном полюсе

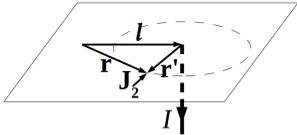
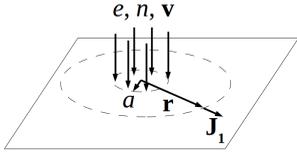
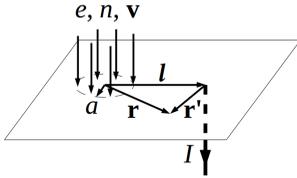
$$B(R, 0^\circ) = \left| \frac{2m}{R^3} \mathbf{e}_R \right| = \frac{2m}{R^3} = 2\sqrt{\frac{2}{5}} B(R, 45^\circ) \approx 1.26 \cdot 0.6 \text{ Гс} \approx 0.75 \text{ Гс}.$$

* Отметим, что экспериментальное значение угла наклона магнитного поля к горизонту в Новосибирске (74°) заметно отличается от найденного. Разница обусловлена приближенностью дипольной модели. Тем не менее, дипольная модель с квадрупольными поправками очень хорошо описывает магнитное поле Земли.

На магнитном экваторе

$$B(R, 90^\circ) = \left| \frac{m}{R^3} \mathbf{e}_\theta \right| = \frac{m}{R^3} = \sqrt{\frac{2}{5}} B(R, 45^\circ) \approx 0.63 \cdot 0.6 \text{ Гс} \approx 0.38 \text{ Гс}.$$

Решение задачи 4



Применим принцип суперпозиции. Заданную систему токов можно мысленно разбить на две подсистемы. В одной имеется поток частиц, но удален отводящий провод, в другой – наоборот.

Ток по плоскости в первой подсистеме задается линейной плотностью

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{env\pi r^2}{2\pi r} \mathbf{e}_r = \frac{envr}{2} \mathbf{e}_r = \frac{env}{2} \mathbf{r}, & r \leq a, \\ \frac{env\pi a^2}{2\pi r} \mathbf{e}_r = \frac{enva^2}{2r^2} \mathbf{r}, & r > a. \end{cases}$$

Линейная плотность тока во второй подсистеме равна

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}') = -\frac{env\pi a^2}{2\pi r'} \mathbf{e}_{r'} = -\frac{enva^2}{2r'^2} \mathbf{r}'$$

По принципу суперпозиции плотность тока в заданной системе равна

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{env}{2} \left(\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right), & r \leq a, \\ \frac{enva^2}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^2} \right), & r > a, \end{cases}$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{l}$.

Контрольная работа 1.2, вариант 2

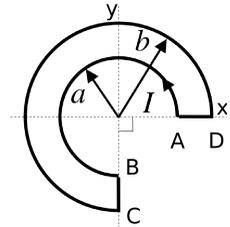
Решение задачи 1

Запишем закон Био-Савара:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int \frac{[d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Для участков BC и AD векторы $d\boldsymbol{\ell}$ и \mathbf{R} параллельны, поэтому их векторное произведение равно нулю. Вклад дуг AB и CD дает $\frac{3}{4}$ от поля соответствующих полных колец с током. С учетом направлений тока в каждой дуге получим

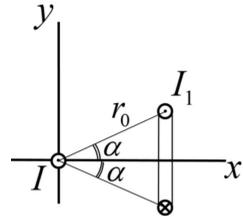
$$\mathbf{B} = \frac{3\pi I}{2ca} \mathbf{e}_z - \frac{3\pi I}{2cb} \mathbf{e}_z = \frac{3\pi(b-a)I}{2cab} \mathbf{e}_z.$$



Решение задачи 2

Ток I , текущий по прямому проводу, формирует магнитное поле, которое распределено в пространстве по закону

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \frac{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{R}]}{R^2}.$$



Сила Ампера на элемент $d\boldsymbol{\ell}_1$ рамки с током I_1 равна

$$d\mathbf{F} = \frac{2II_1}{c} \frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{R}]}{cR^2}.$$

Силы на вертикальные отрезки рамки взаимно компенсируются, так как выражения для этих сил отличаются только знаком I_1 . Силу, действующую на горизонтальные участки контура, распишем с помощью формулы “bac-cab”:

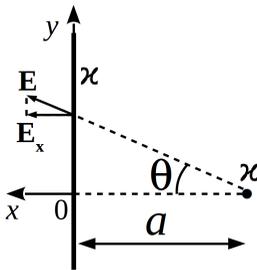
$$\mathbf{F} = \frac{2II_1}{c^2} \int \frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{R}]}{R^2} = -\frac{2II_1 h}{c^2 R^2} \mathbf{R} = -\frac{2II_1 h}{c^2 r_0^2} (\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Видно, что с учетом разных знаков тока в горизонтальных отрезках контура нескомпенсированный вклад в результирующую силу определяется выражением

$$\mathbf{F} = -\frac{2II_1h}{c^2r_0^2}\mathbf{y} + \frac{2II_1h}{c^2r_0^2}(-\mathbf{y}) = -\frac{4II_1h}{c^2r_0^2}\mathbf{y} = -\frac{4II_1h \sin \alpha}{c^2r_0}\mathbf{e}_y.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1



Определим силу со стороны правой нити на левую. Выделим на левой нити элемент длиной dy в окрестности точки y . Этот элемент находится в поле правой нити, равном

$$E(y) = \frac{2\kappa}{r}$$

с проекцией на ось x , равной

$$E_x(y) = \frac{2\kappa}{r} \cos \theta = \frac{2\kappa \cos \theta}{a} \cos \theta = \frac{2\kappa}{a} \cos^2 \theta.$$

Сила на элемент длины в проекции на ось x равна

$$dF_x(y) = \kappa dy E_x(y) = \frac{2\kappa^2 dy}{a} \cos^2 \theta.$$

С учетом $y = a \operatorname{tg} \theta$, $dy = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$ перейдем к переменной θ :

$$dF_x(\theta) = \frac{2\kappa^2 a}{a \cos^2 \theta} \cos^2 \theta d\theta = 2\kappa^2 d\theta.$$

Из геометрии задачи следует, что искомая сила направлена параллельно оси x . Тогда полная сила равна

$$F = \int dF_x(\theta) = 2\kappa^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2\pi\kappa^2.$$

Решение задачи 2

Выделим на плоскости элементарное кольцо $r' \leq r \leq (r' + dr')$. Ток по элементарному кольцу составляет

$$dI = i(r')dr' = i_0 \left(\frac{a}{r'}\right)^2 dr',$$

а наводимое им поле в точке z на оси:

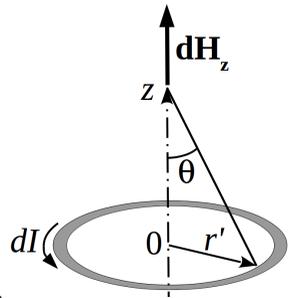
$$dH_z = \frac{2\pi r'^2}{c(r'^2 + z^2)^{3/2}} dI = \frac{2\pi i_0 a^2 r'^2}{c r'^2 (r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' = \frac{2\pi i_0 a^2}{c (r'^2 + z^2)^{3/2}} dr'$$

Для интегрирования удобно перейти к угловой переменной:

$$r' = z \operatorname{tg} \theta, \quad dr' = \frac{z d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{1}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\cos^3 \theta}{z^3}.$$

Тогда искомое поле в точке z равно

$$H_z(z) = \int dH_z = \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi i_0 a^2 \cos \theta d\theta}{c z^2} = \frac{2\pi i_0 a^2}{c z^2}.$$

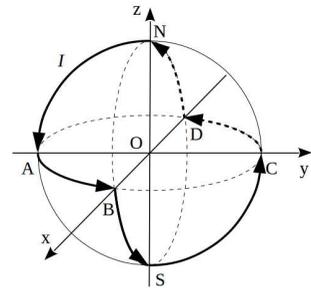


Решение задачи 3

Запишем закон Био-Савара:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int \frac{[\mathbf{dl} \times \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Рассмотрим отдельно каждую компоненту поля в точке O . Согласно закону Био-Савара x -компонента поля наводится только токами, текущими на участках SC и NA (для остальных участков векторы \mathbf{R} и \mathbf{dl} лежат в плоскости, включающей ось x , поэтому их



векторное произведение перпендикулярно этой плоскости, а следовательно, и самой оси x . \mathbf{B}_x сонаправлено с осью x и составляет по модулю половину поля кольца радиуса a с током I :

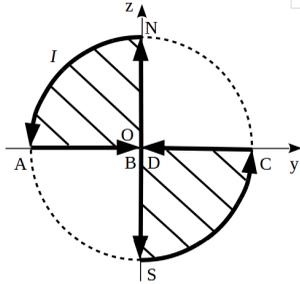
$$\mathbf{B}_x = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_x.$$

Аналогично получаем остальные ортогональные компоненты поля:

$$\mathbf{B}_y = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}_z = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_z.$$

Итак, искомое поле в точке O :

$$\mathbf{B}_o = \frac{\pi I}{ca} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$



$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях представляет собой поле магнитного диполя. Для определения x -компоненты магнитного момента системы спроектируем контур с током на плоскость yz :

$$\mathbf{m}_x = \frac{I \cdot S_{zy}}{c} \mathbf{e}_x = \frac{\pi a^2 I}{2c} \mathbf{e}_x,$$

где $S_{zy} = \frac{\pi a^2}{2}$ – площадь области, ограниченной проекцией контура на плоскость yz (на рисунке заштрихована).

Аналогично получаем остальные ортогональные проекции магнитного момента:

$$\mathbf{m}_y = \frac{\pi a^2 I}{2c} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{m}_z = \frac{\pi a^2 I}{2c} \mathbf{e}_z.$$

Тогда поле на больших расстояниях определяется формулой

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где $\mathbf{m} = \frac{\pi a^2 I}{2c} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

Решение задачи 4

Поскольку $\mu \gg 1$, то можно считать поток магнитного поля одинаковым вдоль всей длины сердечника. В области соленоида поле однородно по сечению соленоида, поэтому оно однородно в любом сечении сердечника, а также в зазоре. Тогда уравнение Стокса для контура вдоль центральной линии магнитопровода принимает вид

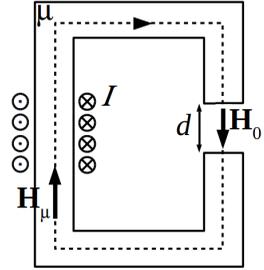
$$\oint (\mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \int_l (\mathbf{H}_\mu \cdot d\boldsymbol{\ell}) + \int_d (\mathbf{H}_0 \cdot d\boldsymbol{\ell}) = H_\mu l + H_0 d = \frac{4\pi N I}{c}.$$

В силу непрерывности нормальных компонент \mathbf{B}

$$B_\mu = B_0 \rightarrow \mu H_\mu = H_0.$$

Тогда имеем

$$H_0 \left(\frac{l}{\mu} + d \right) = \frac{4\pi N I}{c} \rightarrow H_0 = \frac{4\pi N I}{c \left(\frac{l}{\mu} + d \right)}.$$



В сечении зазора действует переменное магнитное поле

$$B_0(t) = \frac{4\pi N I_0}{c \left(\frac{l}{\mu} + d \right)} \cos(\omega t),$$

которое создает в сечении радиуса b переменный магнитный поток

$$\Phi_0(t) = \frac{4\pi^2 b^2 N I_0}{c \left(\frac{l}{\mu} + d \right)} \cos(\omega t),$$

Согласно закону Фарадея, вдоль окружности радиуса b в зазоре формируется вихревое (азимутальное) электрическое поле, отвечающее соотношению

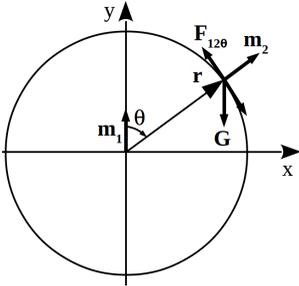
$$2\pi b E_\alpha = \frac{\omega}{c^2} \frac{4\pi^2 b^2 N I_0}{\frac{l}{\mu} + d} \sin(\omega t).$$

Поле и сила на заряд q составляют соответственно

$$E_\alpha = \frac{2\pi b\omega N I_0}{c^2 \left(\frac{l}{\mu} + d\right)} \sin(\omega t), \quad F_\alpha = \frac{2\pi b\omega q N I_0}{c^2 \left(\frac{l}{\mu} + d\right)} \sin(\omega t).$$

Решение задачи 5

Согласно формуле взаимодействия между двумя твердыми диполями сила на второй диполь со стороны центрального равна



$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla U_{12}(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r})).$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух диполей задается формулой из задачи 4.26 [1]:

$$U_{12}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1)}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}.$$

С учетом наложенных ограничений на степени свободы движения бусинки получим

$$U_{12}(\mathbf{r}) = -2 \frac{m_1 m_2 \cos \theta}{r^3},$$

где зенитный угол θ отсчитывается относительно оси y .

Условие равновесия 2-го диполя записывается только для θ -компонент. Для магнитной силы θ -компонента равна *

$$F_{12\theta} = -\nabla_\theta U_{12}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(2 \frac{m_1 m_2 \cos \theta}{r^3} \right) = -2 \frac{m_2 m_1 \sin \theta}{a^4},$$

*Формула для силы из задачи 4.26 [1]

$$\mathbf{F} = 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) \mathbf{r}}{r^5} + 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m}_2}{r^5} + 3 \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m}_1}{r^5} - 15 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^7}$$

здесь неприменима, так как она получена для случая $(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) = \text{const.}$

Полученный знак θ -компоненты силы соответствует направлению скольжения бусинки по кольцу вверх, что и необходимо для компенсации силы тяжести. Поэтому центральный диполь должен быть ориентирован вверх, как и предполагалось исходно.

$$F_{12\theta} = -G_\theta \rightarrow 2 \frac{m_2 m_1 \sin \theta}{a^4} = Mg \sin \theta \rightarrow m_1 = \frac{Mg}{2m_2} a^4.$$

Решение задачи 6

Запишем граничное условие в произвольной точке границы раздела:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\Sigma,$$

где Σ – поверхностная плотность свободных зарядов.

Проинтегрируем это равенство по площади границы раздела. Получим

$$\iint_{S_2} D_{2n} dS - \iint_{S_1} D_{1n} dS = 4\pi Q,$$

где S_1 и S_2 – поверхности, прилегающие к границе раздела со стороны областей 1 и 2 соответственно *.

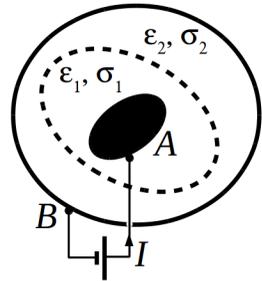
Учтем, что $D_{1,2n} = \frac{\epsilon_{1,2} j_n}{\sigma_{1,2}}$:

$$\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \iint_{S_2} j_n dS - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \iint_{S_1} j_n dS = 4\pi Q.$$

Интеграл от j_n по площади границы раздела (см. примечание) равен полному току I от A к B . Тогда искомый заряд Q равен

$$Q = I \cdot \left(\frac{\epsilon_2}{4\pi\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{4\pi\sigma_1} \right) = I \cdot (\tau_2 - \tau_1),$$

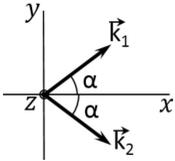
где $\tau_{1,2} = \frac{\epsilon_{1,2}}{4\pi\sigma_{1,2}}$ – времена релаксации в средах 1 и 2.



*Здесь и ниже S_1 и S_2 не включают сечение обратного провода, входящего в контур реальной электрической цепи.

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1



Суперпозиция полей в точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ равна

$$\begin{aligned} & E_0 e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y - \omega t)} \mathbf{e}_z + E_0 e^{i(k_{2x}x + k_{2y}y - \omega t)} \mathbf{e}_z = \\ & = E_0 \left(e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)} + e^{i(kx \cos \alpha - ky \sin \alpha - \omega t)} \right) \mathbf{e}_z = \\ & = 2E_0 e^{i(kx \cos \alpha - \omega t)} \cos(ky \sin \alpha) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

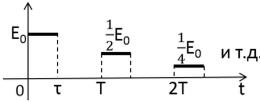
E равно нулю в точках, в которых выполняется условие

$$ky \sin \alpha = \pi/2 + \pi m \rightarrow y = \frac{\pi/2 + \pi m}{k \sin \alpha},$$

где m – целые.

Это система параллельных плоскостей с межплоскостным расстоянием $\frac{\pi}{k \sin \alpha}$.

Решение задачи 2



Спектр одиночного центрированного импульса шириной τ :

$$E_0(\omega) = \tau E_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right).$$

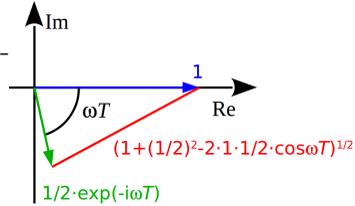
По теореме о сдвиге Фурье-образ первого импульса отличается от Фурье-образа соответствующего центрированного импульса множителем $e^{-i\omega\tau/2}$. Каждый новый импульс добавляет к $E(\omega)$ множитель

$$\frac{\exp(-i\omega T)}{2}.$$

В совокупности Фурье-образы образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2} \exp(-i\omega T)$, сумма которой равна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_1(\omega) q^k = \frac{E_1(\omega)}{1 - q} = \frac{E_0 \tau e^{-i\omega\tau/2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{1 - \frac{\exp(-i\omega T)}{2}}.$$

Квадрат модуля спектральной плотности равен (см. рисунок, на котором знаменатель в комплексном выражении $E(\omega)$ показан в виде разности векторов на комплексной плоскости)

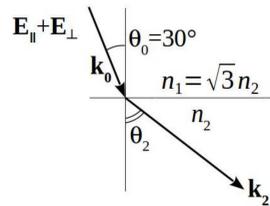


$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cos \omega T} = \frac{E_0^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{5}{4} - \cos \omega T}.$$

Решение задачи 3

Поляризация падающей волны задается векторной записью *

$$\left(E_0, \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 e^{-i\pi/2} \right) = E_0 \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\pi/2} \right).$$



Тогда поляризация преломленной волны запишется как

$$E_0 \left(\xi_{\perp}, \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{\parallel} e^{i\pi/2} \right) = E_0 \xi_{\perp} \left(1, \frac{\sqrt{3} \xi_{\parallel}}{2 \xi_{\perp}} e^{-i\pi/2} \right), \quad (1)$$

где $\xi_{\perp} = \frac{E_{2\perp}}{E_{0\perp}}$ и $\xi_{\parallel} = \frac{E_{2\parallel}}{E_{0\parallel}}$ – амплитудные коэффициенты прохождения для ТЕ- и ТМ-волн соответственно.

Согласно формулам Френеля

$$\frac{\xi_{\parallel}}{\xi_{\perp}} = \frac{1}{\cos(\theta_0 - \theta_2)}. \quad (2)$$

Угол преломления θ_2 найдем из закона Снеллиуса:

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_0 \frac{n_1}{n_2} = \sin 30^\circ \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta_2 = 60^\circ.$$

*Знак “-” перед $\pi/2$ обусловлен тем, что волна в условии нашей задачи описывается выражением $E_{\parallel} \sim e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \pi/2)} = e^{i(\mathbf{kr} - (\omega t - \pi/2))}$.

Подставляя найденный θ_2 в уравнения (2) и (1), получим

$$E_0 \xi_{\perp} \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(30^\circ - 60^\circ)} e^{-i\pi/2} \right) = E_0 \xi_{\perp} \left(1, e^{-i\pi/2} \right),$$

что соответствует левой круговой поляризации.

Коэффициент отражения рассчитываем по формуле

$$R = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle},$$

где $\langle S_i \rangle$ – усредненный по времени модуль вектора Пойнтинга для падающей ($i = 0$) и отраженной ($i = 1$) волн соответственно.

Поскольку поля E_{\perp} и E_{\parallel} взаимно перпендикулярны, суммарный вектор Пойнтинга равен сумме векторов Пойнтинга, рассчитанных отдельно для ТЕ- и ТМ-волн *. Заметим, что в нашей задаче θ_0 равен углу Брюстера. Поэтому в отраженной волне присутствует только ТЕ-волна. Согласно формулам Френеля, имеем

$$E_1 = E_{1\perp} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} E_0 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} E_0 = \frac{E_0}{2},$$

$$\langle S_1 \rangle = \frac{c}{8\pi} E_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{cE_0^2}{8\pi},$$

$$\langle S_0 \rangle = \langle S_{0\perp} \rangle + \langle S_{0\parallel} \rangle = \frac{cE_{0\perp}^2}{8\pi} + \frac{cE_{0\parallel}^2}{8\pi} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{cE_0^2}{8\pi},$$

$$R = \frac{1}{7}.$$

* В общем случае принцип суперпозиции к вектору Пойнтинга неприменим ввиду его нелинейности по полю.

Решение задачи 4

Разброс значений волнового вектора в волновом пакете оценим из соотношения неопределенностей: $\Delta k_x = \frac{\pi}{\Delta x_0}$.

Групповая скорость пакета, рассчитанная для некоторого значения волнового вектора k' равна

$$v_g(k') = \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k'} = v + \alpha(k' - k_0).$$

Тогда разброс групповых скоростей волн с разными k_x в пакете равен:

$$\Delta v_g = \alpha \Delta k = \frac{\pi \alpha}{\Delta x_0}.$$

Ширину пакета через время t можно оценить так *:

$$\Delta x^2(t) = \Delta x_0^2 + (\Delta v_g \cdot t)^2 = \Delta x_0^2 + \frac{(\pi \alpha t)^2}{\Delta x_0^2}.$$

Минимальное значение это выражение достигает при

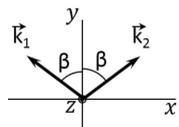
$$\Delta x_0 = \sqrt{\pi \alpha t}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Суперпозиция полей в точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ равна

$$\begin{aligned} E_0 e^{i(k_1 x + k_1 y - \omega t)} \mathbf{e}_z + E_0 e^{i(k_2 x + k_2 y - \omega t)} \mathbf{e}_z &= \\ &= E_0 \left(e^{i(-k x \sin \beta + k y \cos \beta - \omega t)} + e^{i(k x \sin \beta + k y \cos \beta - \omega t)} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= 2E_0 e^{i(k y \cos \beta - \omega t)} \cos(k x \sin \beta) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$



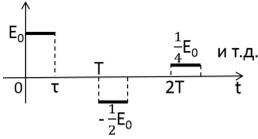
* Складываются не сами величины, а их квадраты, так как каждое слагаемое по своему смыслу представляет не абсолютный, а характерный разброс.

E равно нулю в точках, в которых выполняется условие

$$kx \sin \beta = \pi/2 + \pi m \rightarrow x = \frac{\pi/2 + \pi m}{k \sin \beta},$$

где m – целые. Это система параллельных плоскостей с межплоскостным расстоянием $\frac{\pi}{k \sin \beta}$.

Решение задачи 2



Спектр одиночного центрированного импульса шириной τ :

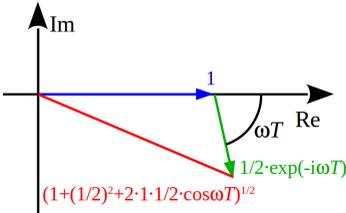
$$E_0(\omega) = \tau E_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right).$$

По теореме о сдвиге Фурье-образ первого импульса отличается от Фурье-образа соответствующего центрированного импульса множителем $e^{-i\omega\tau/2}$. Каждый новый импульс добавляет к $E(\omega)$ множитель

$$-\frac{\exp(-i\omega T)}{2}.$$

В совокупности Фурье-образы образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\frac{1}{2} \exp(-i\omega T)$, сумма которой равна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_1(\omega) q^k = \frac{E_1(\omega)}{1 - q} = \frac{E_0 \tau e^{-i\omega\tau/2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{1 + \frac{\exp(-i\omega T)}{2}}.$$



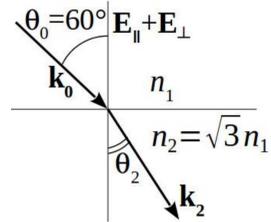
Квадрат модуля спектральной плотности равен (см. рисунок, на котором знаменатель в комплексном выражении $E(\omega)$ показан в виде суммы векторов на комплексной плоскости)

$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cos \omega T} = \frac{E_0^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{\frac{5}{4} + \cos \omega T}.$$

Решение задачи 3

Поляризация падающей волны задается векторной записью *

$$\left(E_0, \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 e^{i\pi/2} \right) = E_0 \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/2} \right).$$



Тогда поляризация преломленной волны запишется как

$$E_0 \left(\xi_{\perp}, \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_{\parallel} e^{i\pi/2} \right) = E_0 \xi_{\perp} \left(1, \frac{\sqrt{3} \xi_{\parallel}}{2 \xi_{\perp}} e^{i\pi/2} \right), \quad (1)$$

где $\xi_{\perp} = \frac{E_{2\perp}}{E_{0\perp}}$ и $\xi_{\parallel} = \frac{E_{2\parallel}}{E_{0\parallel}}$ – амплитудные коэффициенты прохождения для ТЕ- и ТМ-волн соответственно.

Согласно формулам Френеля

$$\frac{\xi_{\parallel}}{\xi_{\perp}} = \frac{1}{\cos(\theta_0 - \theta_2)}. \quad (2)$$

Угол преломления θ_2 найдем из закона Снеллиуса:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_2 = 30^\circ.$$

Подставляя найденное θ_2 в уравнения (2) и (1), получим

$$E_0 \xi_{\perp} \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(60^\circ - 30^\circ)} e^{i\pi/2} \right) = E_0 \xi_{\perp} \left(1, e^{i\pi/2} \right),$$

что соответствует правой круговой поляризации.

Коэффициент отражения рассчитываем по формуле

$$R = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle},$$

*Знак “+” перед $\pi/2$ обусловлен тем, что волна в условии нашей задачи описывается выражением $E_{\parallel} \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \pi/2)} = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - (\omega t + \pi/2))}$.

где $\langle S_i \rangle$ – усредненный по времени модуль вектора Пойнтинга для падающей ($i = 0$) и отраженной ($i = 1$) волн соответственно.

Поскольку поля E_{\perp} и E_{\parallel} взаимно перпендикулярны, суммарный вектор Пойнтинга равен сумме векторов Пойнтинга, рассчитанных отдельно для ТЕ- и ТМ-волн. Заметим, что в нашей задаче θ_0 равен углу Брюстера. Поэтому в отраженной волне присутствует только ТЕ-волна. Согласно формулам Френеля, имеем

$$E_1 = E_{1\perp} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} E_0 = -\frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} E_0 = -\frac{E_0}{2},$$

$$\langle S_1 \rangle = \frac{c}{8\pi} E_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{cE_0^2}{8\pi},$$

$$\langle S_0 \rangle = \langle S_{0\perp} \rangle + \langle S_{0\parallel} \rangle = \frac{cE_{0\perp}^2}{8\pi} + \frac{cE_{0\parallel}^2}{8\pi} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{cE_0^2}{8\pi},$$

$$R = \frac{1}{7}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Стоячая волна образуется в результате суперпозиции падающей и отраженных плоских монохроматических волн. Пусть падающая волна выразится комплексной функцией

$$E_1 = \tilde{E} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = \tilde{E} e^{i(\omega t + k_x x + k_y y)}.$$

Тогда в пространстве формируются три отраженных плоских волны:

$$E_2 = \tilde{E} e^{i(\omega t - k_x x + k_y y + \pi)} \quad \text{— отраженная от вертикальной стенки,}$$

$$E_3 = \tilde{E} e^{i(\omega t + k_x x - k_y y + \pi)} \quad \text{— отраженная от горизонтальной стенки,}$$

$$E_4 = \tilde{E} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad \text{— отраженная от обеих стенок.}$$

В результате суперпозиции формируется волна

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \\ &= \tilde{E} e^{i\omega t} \left(e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{i(-k_x x + k_y y)} - e^{i(k_x x - k_y y)} + e^{i(-k_x x - k_y y)} \right). \end{aligned}$$

Группируя крайние и средние слагаемые в скобках, получим

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= 2\tilde{E} e^{i\omega t} (\cos(k_x x + k_y y) - \cos(k_x x - k_y y)) = \\ &= 4\tilde{E} e^{i\omega t} \sin(k_x x) \sin(k_y y). \end{aligned}$$

Из условия задачи следует, что $k_x = \frac{\omega}{2c}$. С другой стороны $k = \frac{\omega}{c}$. Тогда

$$k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}\omega}{2c}$$

и искомая функция (с точностью до постоянного множителя)

$$f(y) = \sin \frac{\sqrt{3}\omega y}{2c}.$$

Решение задачи 2

Для пленки с подложкой $n_1 < n$ волна приобретает сдвиг по фазе на π только при отражении от верхней границы. Поэтому условие на максимум m -го порядка в отраженной волне имеет вид

$$2nd = \left(m - \frac{1}{2} \right) \lambda.$$

Для пленки с подложкой $n_2 > n$ волна при отражении от обеих границ приобретает сдвиг по фазе на π . Поэтому условие на максимум 1-го порядка в отраженной волне имеет вид

$$2nd = m\lambda_0 = \lambda_0.$$

Сравнивая два равенства, получаем

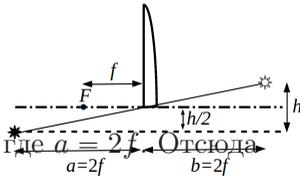
$$\lambda = \frac{2\lambda_0}{2m - 1}.$$

Для видимой области подходит только $m = 2$:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 700}{2 \cdot 2 - 1} = 467 \text{ нм (синий)}.$$

Решение задачи 3

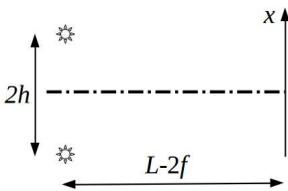
Изображения оригинального источника, создаваемые каждой половинкой линзы, эквивалентны двум точечным когерентным источникам. Поэтому на участке от изображений до экрана имеем классическую схему Юнга. Положение изображений по z определяется формулой тонкой линзы:



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

$$b = 2f.$$

Для определения положения изображений по x достаточно провести луч от источника через точки, соответствующие оптическим осям каждой половинки линзы (см. рисунок для верхней половинки). Верхнее изображение смещено относительно источника – вниз на h .



эе – вниз на h .

Тогда расстояние между изображениями равно $2h$, от изображений до экрана $L - 2f$. Из симметрии схемы следует, что изображения выступают как синфазные источники. Поэтому интенсивность интерференционной картины в плоскости рисунка определяется стандартной формулой

$$I(x) \propto 1 + \cos \frac{2khx}{L - 2f}.$$

Условие на максимум:

$$\frac{k2hx_{max}}{L-2f} = 2\pi m \rightarrow \Delta x_{max} = \frac{2\pi(L-2f)}{2kh} = \frac{\lambda(L-2f)}{2h}.$$

Решение задачи 4

Способ 1.

Решение в области $z > 0$ ищем в виде E_{11} -волны:

$$E_{2z} = \hat{E}_T \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \cdot e^{i(k_{2z}z - \omega t)}$$

Можно показать, что данное решение при соответствующем \hat{E}_T удовлетворяет всем граничным условиям и поэтому является верным.

Полное отражение означает, что в области 2 волна не распространяется, то есть затухает с увеличением z . Затухание возникает, если k_{2z} мнимое:

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2}, \quad k_2^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2 < 0.$$

С учетом $k_2 = \frac{\omega}{c}$ получим условие на частоту:

$$\omega \leq c \sqrt{k_{2x}^2 + k_{2y}^2} = \sqrt{2} \frac{\pi c}{a}.$$

Видно, что условие полного отражения не зависит от ε и совпадает с условием невозможности существования волны в области 2 волновода.

Способ 2.

E_{11} – волну можно представить в виде суммы четырех плоских волн с волновыми векторами:

$$\mathbf{k} = \left(\pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{\pi}{a}, k_z \right).$$

Видно, что все эти плоские волны падают на границу раздела сред под одинаковым углом ϕ_0 :

$$\sin \phi_0 = \frac{k_{\perp}}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}},$$

где $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{2} \frac{\pi}{a}$.

Полное отражение от границы раздела происходит, если угол падения больше или равен углу полного внутреннего отражения:

$$\sqrt{\varepsilon} \sin \phi_0 \geq 1$$

или

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{k_{\perp}}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}} \geq 1. \quad (1)$$

Закон дисперсии в области $z < 0$ волновода:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}. \quad (2)$$

Подставив $\sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}$ из (1) в (2), получим

$$\omega \leq ck_{\perp} = \sqrt{2} \frac{\pi c}{a}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

Запишем волновое уравнение для области $x \geq 0, y \geq 0$:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Подставив вместо \mathbf{B} заданное выражение для стоячей волны, получим дифференциальное уравнение на $f(y)$:

$$-\frac{\omega^2}{4c^2}f(y) + \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}f(y) = 0,$$

$$f''_{yy}(y) = -\frac{3\omega^2}{4c^2}f(y)$$

с общим решением

$$f(y) = A_1 \cos \frac{\sqrt{3}\omega y}{2c} + A_2 \sin \frac{\sqrt{3}\omega y}{2c}.$$

Из условия $\frac{\partial B_z}{\partial y} \propto E_x = 0$ на границе $y = 0$ получим

$$A_2 = 0, \quad f(y) = A_1 \cos \frac{\sqrt{3}\omega y}{2c}.$$

Решение задачи 2

При нормальной падении отражение от границы “воздух-бензин” дает набег оптической длины в половину длины волны. При отражении от границы “бензин-вода” сдвига по фазе не происходит. Поэтому условие на максимум m_0 -го порядка при нормальном падении имеет вид

$$2nd = \left(m_0 - \frac{1}{2}\right) \lambda_0.$$

При наклонном падении условие на максимум m -го порядка имеет вид *

$$2nd \cos \beta = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda,$$

где β – угол преломления.

* Для ТМ-волны это условие справедливо, если угол падения превышает или не превышает соответствующий угол Брюстера для обеих границ одновременно.

Сравнивая два равенства, получаем выражение для $\cos \beta$:

$$\cos \beta = \frac{2m - 1}{2m_0 - 1} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{2m - 1}{4m_0 - 2}.$$

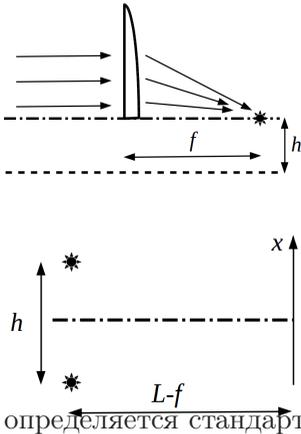
Поскольку длина когерентности естественного света составляет 2 – 3 длины волны, возникает ограничение $\{m_0, m\} \leq 3$. При этих ограничениях для заданных параметров решение в видимой области существует только при $m_0 = 2, m = 3$:

$$\cos \beta = \frac{5}{6}, \sin \beta = \frac{\sqrt{11}}{6}, \sin \alpha = n \sin \beta = 1.4 \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0.77, \alpha = 51^\circ.$$

Нетрудно убедиться, что углы α и β меньше углов Брюстера для верхней и нижней границ раздела соответственно. Поэтому записанное выше условие на максимум остается в силе не только для ТЕ-, но и для ТМ-волны.

Решение задачи 3

Изображения падающего пучка, создаваемые каждой половинкой линзы, эквивалентны двум точечным когерентным источникам. Поэтому участок от изображений до экрана представляет эму Юнга.



Изображения лежат в фокальной плоскости справа от линзы на оптических осях каждой половинки (на рисунке показано верхнее изображение). Тогда расстояние между изображениями равно h , от изображений до экрана $L - f$. Из симметрии схемы следует, что изображения выступают как синфазные источники. Поэтому интенсивность интерференционной картины в плоскости рисунка

определяется стандартной формулой

$$I(x) \propto 1 + \cos \frac{k h x}{L - f}.$$

Условие на максимум:

$$\frac{khx_{max}}{L-f} = 2\pi m \rightarrow \Delta x_{max} = \frac{2\pi(L-f)}{kh} = \frac{\lambda(L-f)}{h}.$$

Решение задачи 4

Способ 1.

На границе раздела ($z = 0$) выполняются условия

$$E_{0\tau} = E_{2\tau}, \quad \varepsilon E_{0n} = E_{2n}$$

(в левых частях записанных уравнений отсутствуют слагаемые $E_{1\tau}$ и εE_{1n} соответственно, что означает отсутствие отраженной волны).

Подставим выражения для x - и z -компонент \mathbf{E}_{11} :

$$\begin{cases} E_0 \frac{ik_{0z}k_x}{\varkappa^2} \cos k_x x \sin k_y y e^{i\omega t} = E_2 \frac{ik_{2z}k_x}{\varkappa^2} \cos k_x x \sin k_y y e^{i\omega t} \\ \varepsilon E_0 \sin k_x x \sin k_y y e^{i\omega t} = E_2 \sin k_x x \sin k_y y e^{i\omega t}, \end{cases}$$

где $\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2$.

После сокращений на общие множители, получим:

$$\begin{cases} E_0 k_{0z} = E_2 k_{2z} \\ \varepsilon E_0 = E_2, \end{cases} \Rightarrow k_{0z} = \varepsilon k_{2z}.$$

Распишем полученное равенство в развернутом виде:

$$k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = \varepsilon^2 (k_2^2 - k_x^2 - k_y^2).$$

С учетом $k_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}\omega}{c}$, $k_2 = \frac{\omega}{c}$

$$\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \varepsilon^2.$$

Подставив $k_x = k_y = \frac{\pi}{a}$, выражаем искомую частоту:

$$\omega = c\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)\frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi c}{a}\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Способ 2.

E_{11} – волну можно представить в виде суммы четырех плоских волн с волновыми векторами:

$$\mathbf{k} = \left(\pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{\pi}{a}, k_z \right).$$

Видно, что все эти плоские волны падают на границу раздела сред под одинаковым углом ϕ_0 :

$$\operatorname{tg}\phi_0 = \frac{k_{\perp}}{k_z},$$

где $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{2}\frac{\pi}{a}$.

При этом все четыре плоские волны имеют нулевые компоненты магнитного поля вдоль оси z , т. е. являются ТМ-волнами при падении на границу раздела. Известно, что ТМ-волны не отражаются от границы раздела при падении под углом Брюстера:

$$\sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \phi_0 = 1$$

или

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{k_{\perp}}{k_z} = 1. \quad (1)$$

Частота волны выражается через компоненты волнового вектора формулой:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}.$$

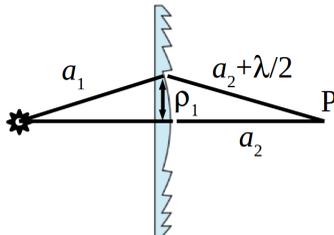
С учетом (1) и $k_{\perp} = \sqrt{2}\frac{\pi}{a}$ получим

$$\omega = \frac{\sqrt{2}\pi c}{a} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Кольца линзы Френеля занимают положения соответствующих зон Френеля. Поэтому воспользуемся выражением для радиуса n -й зоны Френеля (см. рисунок):



$$\rho_n = \sqrt{n\lambda \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{n \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 36}{2}} \approx 0.03\sqrt{n} \text{ см,}$$

$$\rho_1 = 0.03\sqrt{1} = 0.03 \text{ см,} \quad \rho_4 = 0.03\sqrt{4} = 0.06 \text{ см.}$$

Решение задачи 2

Радиус n -й зоны Френеля для случая плоской падающей волны равен

$$\rho_n = \sqrt{n\lambda z_p}.$$

Тогда число зон Френеля, укладываемых в отверстие радиуса R , равно

$$n = \frac{R^2}{\lambda z_p}.$$

Для $z_p = 5R$ получим

$$n_{max} = \frac{R^2}{5\lambda R} = \frac{R}{5\lambda} = \frac{30\lambda}{5\lambda} = 6.$$

С ростом z_p число зон Френеля, укладываемых в отверстие, уменьшается. Максимум наблюдается, когда число зон Френеля нечетно. Поэтому на зависимости $I(z)$ имеется три максимума в точках $z = \frac{30R}{n}$:

$$\text{при } n = 5, \quad z = 6R,$$

$$\text{при } n = 3, \quad z = 10R,$$

$$\text{при } n = 1, \quad z = 30R.$$

Решение задачи 3

В системе пластинки падающая плоская волна обладает следующими характеристиками:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega_0, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda_0, \quad E' = \gamma(1+\beta)E_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}E_0.$$

Для падающей плоской волны радиус первой зоны связан с длиной волны и расстоянием до точки наблюдения формулой

$$a = \sqrt{N'}z_p.$$

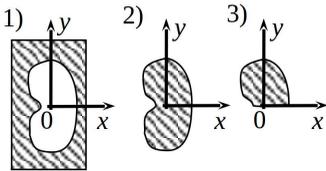
При нечетном числе зон в точке z_p будет фокус. Находим

$$f = z_p = \frac{a^2}{N'} = \frac{a^2}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Поле в фокусе в $2N$ раз превышает поле E' падающей волны:

$$E_p = 2NE' = 2N\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}E_0.$$

Решение задачи 4



Согласно принципу Бабине имеем

$$\hat{E}_0 = \hat{E}_1 + \hat{E}_2,$$

где шляпкой помечены векторы на комплексной плоскости (см. диаграмму Френеля, где точка А, конец вектора \hat{E}_1 , лежит на одном из витков спирали, свертывающейся в точку С).

Дополнительным к экрану 3) будет экран с половиной отверстия. Поле в точке Р за таким экраном будет равно $\frac{1}{2}\hat{E}_1$. Тогда по принципу Бабиने имеем

$$\hat{E}_0 = \frac{1}{2}\hat{E}_1 + \hat{E}_3,$$

откуда

$$\hat{E}_3 = \hat{E}_0 - \frac{1}{2}\hat{E}_1.$$

Рассматривая на диаграмме треугольник АОС, получим

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \phi,$$

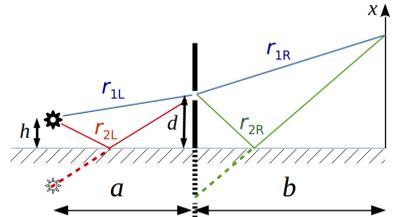
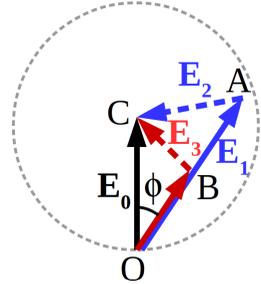
$$\text{откуда } \cos \phi = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA \cdot OC} = \frac{E_1^2 + E_0^2 - E_2^2}{2E_1 \cdot E_0}.$$

Рассматривая на диаграмме треугольник ВОС, получим

$$\begin{aligned} I_3 = E_3^2 &= BC^2 = \frac{1}{4}OA^2 + OC^2 - 2\frac{1}{2}OA \cdot OC \cos \phi = \\ &= \frac{1}{4}E_1^2 + E_0^2 - 2\frac{1}{2}E_1E_0 \frac{E_1^2 + E_0^2 - E_2^2}{2E_1E_0} = \frac{1}{4}I_1 + I_0 - \frac{1}{2}(I_1 + I_0 - I_2) = \\ &= \frac{1}{2}(I_0 + I_2 - \frac{1}{2}I_1). \end{aligned}$$

Решение задачи 5

На рисунке показан ход лучей, интерферирующих в точке x экрана. Для определения разности хода лучей удобно воспользоваться тем, что отраженный луч симметричен продолжению падающего относительно зеркальной плоскости (продолжения показаны пунктирными линиями). Тогда левая часть оптической системы сводится к классической схеме Юнга с зеркалом Ллойда. Зная



решение задачи о распределении интенсивности света на экране в схеме Ллойда, запишем интенсивность света в щели:

$$I_{\text{щ}} = 4I_0 \sin^2 \left(k \frac{hd}{a} \right).$$

Правая часть заданной оптической системы также сводится к схеме Юнга с зеркалом Ллойда, где щель представляет собой новый источник света. Рассуждая так же, как при анализе левой части оптической системы, получим распределение интенсивности на экране:

$$I(x) = 4I_{\text{щ}} \sin^2 \left(k \frac{xd}{b} \right)$$

И подставив сюда выражение для интенсивности в щели, окончательно получим:

$$I(x) = 16I_0 \sin^2 \left(\frac{2\pi hd}{\lambda a} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi xd}{\lambda b} \right)$$

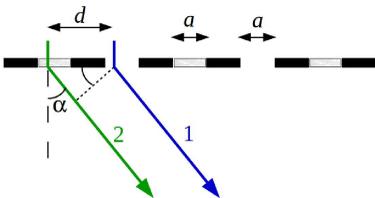
Решение задачи 6

Пучки света, проходящие через “обычные” щели дифракционной решетки, образуют суммарное поле, равное

$$\hat{E}_1 = \frac{\tilde{E}}{2} e^{i(kz + kx \sin \alpha - \omega t)} \frac{1 - e^{i\delta N}}{1 - e^{i\delta}},$$

где $\tilde{E} = E_0 \text{sinc}(\delta_a)$ и использованы обозначения

$$\delta_a = \frac{ka}{2} \alpha, \quad \delta = 2kd \sin \alpha = 4ka \sin \alpha. \quad (1)$$



Каждому лучу 1, проходящему через обычную щель и отклоненному на угол α , можно поставить в соответствие луч 2, проходящий через соседнюю щель с

пластинкой, который получается параллельным переносом на вектор $d\mathbf{e}_x$. Фаза такой волны будет отличаться от соседней (“обычной”) на величину

$$k(n-1)\Delta + kd \sin \alpha = k\lambda/2 + \delta/2 = \pi + \delta/2,$$

где первое слагаемое обусловлено наличием пластинки, второе – взаимным расположением соседних щелей. Тогда пучки света, проходящие через щели с пластинками, образуют суммарное поле, равное

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_1 e^{i(\delta/2 + \pi)}$$

Согласно принципу суперпозиции суммарное поле дифрагированной волны равно

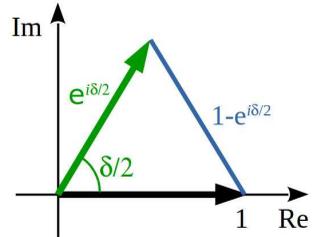
$$\hat{E} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{E}_1(1 - e^{i\delta/2}). \quad (2)$$

Нетрудно получить, что

$$|1 - e^{i\delta/2}| = 2 \sin(\delta/4).$$

Тогда

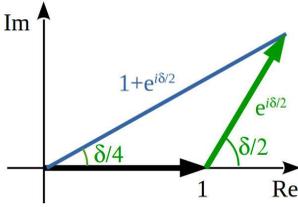
$$I(\delta) = 4E_0^2 \operatorname{sinc}^2(\delta_a) \frac{\sin^2 \frac{\delta N}{2} \sin^2 \frac{\delta}{4}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$



С учетом тождества $\sin \frac{\delta}{2} = 2 \sin \frac{\delta}{4} \cos \frac{\delta}{4}$ полученное выражение можно переписать в виде

$$I(\delta) = E_0^2 \operatorname{sinc}^2(\delta_a) \frac{\sin^2 \frac{\delta N}{2}}{\cos^2 \frac{\delta}{4}},$$

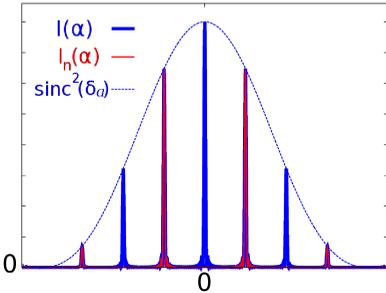
где δ_a и δ задаются выражениями (1).



В отсутствие стеклянных пластинок волны на выходе из соседних щелей оказываются синфазными. Поэтому вместо множителя $(1 - e^{i\delta/2})$ в (2) будем иметь $(1 + e^{i\delta/2})$, откуда

$$I(\delta) = 4E_0^2 \operatorname{sinc}^2(\delta_a) \frac{\sin^2 \frac{\delta N}{2} \cos^2 \frac{\delta}{4}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} =$$

$$= E_0^2 \operatorname{sinc}^2(\delta_a) \frac{\sin^2 \frac{\delta N}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{4}} = E_0^2 \operatorname{sinc}^2(\delta_a) \frac{\sin^2 \frac{2N\delta}{4}}{\sin^2 \frac{\delta}{4}}.$$

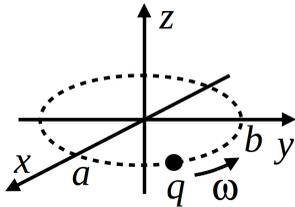


Полученное решение совпадает с выражением для дифракционной решетки с $2N$ щелями и периодом d .

На рисунке показан характерный вид $I(\alpha)$ для обоих спектров при малых углах дифракции ($\delta_a < \pi$). Видно, что размещение стеклянных пластинок в щелях приводит к исчезновению главных максимумов четных порядков.

Решение задачи 7

В дипольном приближении средняя по времени мощность, излучаемая произвольной системой в полный телесный угол, опре-



$$\langle J \rangle = \frac{2\langle \dot{d}^2 \rangle}{3c^3},$$

где $\langle \dot{d}^2 \rangle$ – средний по времени квадрат модуля второй производной по времени от дипольного момента системы.

Мгновенное значение дипольного момента частицы равно

$$\mathbf{d}(t) = aq \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_x + bq \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_y,$$

его второй производной по времени:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = -aq\omega^2 \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_x - bq\omega^2 \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_y,$$

а квадрат производной:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = a^2q^2\omega^4 \cos^2 \omega t + b^2q^2\omega^4 \sin^2 \omega t.$$

Усредняем по времени

$$\langle \ddot{\mathbf{d}} \rangle = a^2q^2\omega^4 \langle \cos^2 \omega t \rangle + b^2q^2\omega^4 \langle \sin^2 \omega t \rangle = q^2\omega^4 \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Подставляя $\langle \ddot{\mathbf{d}} \rangle$ в исходную формулу, получим

$$\langle J \rangle = \frac{q^2\omega^4(a^2 + b^2)}{3c^3}.$$

2015/2016 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Из теоремы Гаусса следует, что вектор электрической индукции во всем пространстве описывается выражением

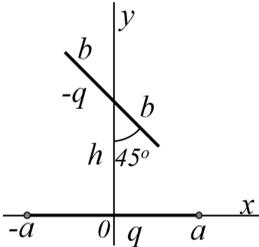
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Отсюда напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon r^2} \mathbf{e}_r, & r < R, \\ \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, & r > R. \end{cases}$$

Плотность связанного заряда на границе шара находим из граничного условия $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{св}}$:

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{E_{2n} - E_{1n}}{4\pi} = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) = \frac{q(\epsilon - 1)}{4\pi\epsilon R^2}.$$



и 2

Проекции дипольных моментов отрезков находим по формуле

$$d_i = q_i \cdot x_{ci},$$

где x_{ci} — i -координата “центра тяжести” отрезка.

Полный дипольный момент находим суммированием дипольных моментов отрезков:

$$d_x = q_1 \cdot x_{c1} + q_2 \cdot x_{c2} = q \cdot 0 - q \cdot 0 = 0,$$

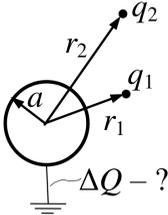
$$d_y = q_1 \cdot y_{c1} + q_2 \cdot y_{c2} = q \cdot 0 - qh = -qh,$$

$$d_z = 0.$$

Кулоновский член в разложении потенциала равен нулю $\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} = 0$, первый ненулевой член — дипольный:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_x x + d_y y + d_z z}{r^3} = -\frac{qhx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 3



В начальном состоянии на сфере собран заряд (см. решение задачи 1.11б из [1] с учетом принципа суперпозиции)

$$Q_0 = -q_1 \frac{a}{r_1} - q_2 \frac{a}{r_2}.$$

Заряд на сфере после перестановки зарядов:

$$Q' = -q_1 \frac{a}{r_2} - q_2 \frac{a}{r_1}.$$

Заряд, стекший на “землю”, равен

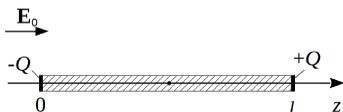
$$\Delta Q = Q_0 - Q' = (q_1 - q_2) \frac{a}{r_2} - (q_1 - q_2) \frac{a}{r_1} = (q_1 - q_2) a \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Решение задачи 4

Поскольку требуется оценка, а не точное решение, сделаем следующие упрощения:

1. Поле у торцов вне диэлектрика совпадает с внешним.
2. Связанный заряд формируется только на торцах.

Тогда плотность связанных зарядов на торцах находим из условия



$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \sigma = \frac{E_1 - E_2}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} E_0.$$

На торцах формируются разноименные заряды величиной

$$Q = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} E_0 S,$$

которые для точки в середине длинного цилиндра могут рассматриваться как точечные. Тогда искомый вклад в поле равен полю двух точечных зарядов:

$$\delta E = -2 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon(l/2)^2} E_0 S = -2 \frac{\varepsilon - 1}{\pi\varepsilon l^2} E_0 S \quad (\text{внешнее поле ослабляется}).$$

Решение задачи 5

Нанесем на внутреннюю обкладку заряд Q . Тогда напряженность электрического поля внутри сферы равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon(\theta)r^2} \mathbf{e}_r.$$

Поле такого вида удовлетворяет условиям $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\int (\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \operatorname{const}$ вдоль любой кривой ℓ между двумя обкладками конденсатора.

Связь между величинами свободного и полного зарядов на внутреннем электроде найдем через отношение потоков векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} через поверхность сферы радиуса r , $a < r < b$ *:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q+Q_{\text{св}}} &= \frac{\oiint D dS}{\oiint E dS} = \frac{\oiint \varepsilon(\theta) E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\alpha}{\oiint E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\alpha} = \frac{2\pi \int_0^\pi \varepsilon_0 (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta}{4\pi} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \varepsilon_0 (2 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{5}{3} \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Теперь находим разность потенциалов между обкладками, взяв для интегрирования траекторию вдоль радиуса $\theta = 0$, $\alpha = 0$:

$$U = \int_{\theta=0}^b E(r) dr = \frac{3}{5} \int_a^b \frac{Q}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{3Q}{5\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}.$$

Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{5\varepsilon_0 ab}{3(b-a)}.$$

* Отношение свободного заряда к полному оказывается не зависящим от радиуса. Поскольку свободный заряд содержится только на внутреннем электроде, это означает, что величина связанного заряда не растет с объемом диэлектрика. Данный результат может показаться странным, так как в неоднородном диэлектрике плотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{св}} = \operatorname{div} \left(\frac{1-\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E} \right) = \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} (\nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E})$$

в общем случае отлична от нуля. В нашем случае она равна нулю из-за того, что $(\nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E}) = 0$ в силу ортогональности множителей, входящих в скалярное произведение (при этом с учетом $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ имеем также, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{(\nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E})}{\varepsilon} = 0$).

Контрольная работа 1.1, вариант 2**Решение задачи 1**

Запишем теорему Гаусса для потока вектора электрической индукции через цилиндр единичной высоты радиуса $r < R$ (оси цилиндра и диэлектрика совпадают):

$$\oiint_{r=\text{const}} (\mathbf{D}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi\kappa.$$

С учетом аксиальной симметрии задачи перепишем левую часть уравнения:

$$2\pi r D_1(r) = 4\pi\kappa,$$

откуда

$$D_1(r) = \frac{2\kappa}{r} \Rightarrow \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{2\kappa}{\varepsilon r} \mathbf{e}_r.$$

Снаружи от диэлектрика теорема Гаусса для \mathbf{E}_2 имеет вид:

$$\oiint_{r=\text{const}} (\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi(\kappa + \kappa_{\text{св}}) = 4\pi\kappa,$$

так как полный связанный заряд $\kappa_{\text{св}}$ в диэлектрике равен нулю. Отсюда

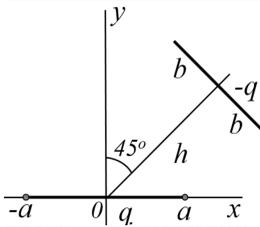
$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{2\kappa}{r} \mathbf{e}_r.$$

Плотность связанного заряда на границе цилиндра определяется граничным условием

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma,$$

откуда

$$\sigma = \frac{E_2(R) - E_1(R)}{4\pi} = \frac{2\kappa(\varepsilon - 1)}{\varepsilon R}.$$



или 2

Проекции дипольных моментов отрезков находим по формуле

$$d_i = q_i \cdot x_{ci},$$

где x_{ci} – i -координата “центра тяжести” отрезка.

Полный дипольный момент находим суммированием дипольных моментов отрезков:

$$d_x = q_1 \cdot x_{c1} + q_2 \cdot x_{c2} = q \cdot 0 - q \frac{h}{\sqrt{2}} = -q \frac{h}{\sqrt{2}},$$

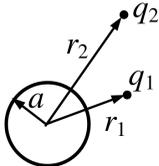
$$d_y = q_1 \cdot y_{c1} + q_2 \cdot y_{c2} = q \cdot 0 - q \frac{h}{\sqrt{2}} = -q \frac{h}{\sqrt{2}},$$

$$d_z = 0.$$

Кулоновский член в разложении потенциала равен нулю $\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} = 0$, первый ненулевой член – дипольный:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_x x + d_y y + d_z z}{r^3} = -\frac{qh\sqrt{2}(x + y)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 3



Решение этой задачи отличается от решения задачи 3 вар.1 (см. стр. 210) только знаком:

$$\Delta Q = a(q_2 - q_1) \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Решение задачи 4

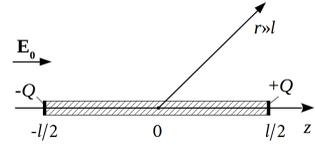
Оценка величины связанных зарядов, формируемых на торцах цилиндра, дает (см. решение зад. 4 вар.1 на стр. 211):

$$Q = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} E_0 S.$$

Плотность заряда в объеме однородного диэлектрика равна нулю. Поэтому из точки наблюдения с больших расстояний цилиндр представляет собой электрический диполь с дипольным

моментом $\mathbf{d} = Ql\mathbf{e}_z = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}E_0l\mathbf{e}_z$. Таким образом, на больших расстояниях цилиндр создает поле диполя:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{d}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$



Решение задачи 5

Нанесем на внутреннюю обкладку заряд с линейной плотностью \varkappa . Поле внутри конденсатора будет равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{2\varkappa}{\varepsilon(\alpha)R}\mathbf{e}_R.$$

Поле такого вида удовлетворяет условиям $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\int_{\ell} (\mathbf{E} \cdot d\ell) = \operatorname{const}$ вдоль любой кривой ℓ между двумя обкладками.

Отношение плотностей свободного и полного зарядов на внутреннем электроде найдем через отношение потоков \mathbf{D} и \mathbf{E} через поверхность цилиндра единичной высоты и радиуса R , $a < R < b$:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa}{\varkappa + \varkappa_{\text{св}}} &= \frac{\iint D dS}{\iint E dS} = \frac{\int \varepsilon(\theta)E(r) \cdot R d\alpha}{\int E(r) \cdot R d\alpha} = \frac{\int_0^{2\pi} \varepsilon_0(1 + \sin^2 \alpha) d\alpha}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha\right) d\alpha = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \end{aligned}$$

(см. примечание к решению задачи 5 вар.1 на стр. 212).

Теперь находим разность потенциалов между обкладками, взяв для интегрирования траекторию вдоль радиуса $\alpha = 0$:

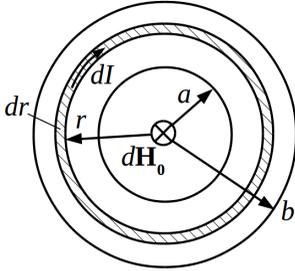
$$U = \int_{\alpha=0} E(R) dR = \frac{2}{3} \int_a^b \frac{\varkappa}{\varepsilon_0 R} dR = \frac{2\varkappa}{3\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Емкость конденсатора на единицу длины равна

$$C = \frac{\varkappa}{U} = \frac{3\varepsilon_0}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1



Рассмотрим кольцо радиуса r толщиной dr . От этого кольца в центре наводится элементарное поле

$$dH_0(r) = \frac{2dI}{cr}.$$

Эффективный ток в кольце равен

$$dI = i(r)dr.$$

Поле от всего диска получим интегрированием по радиусу:

$$H_0 = \int dH_0 = \int_a^b \frac{2i(r)dr}{cr} = \int_a^b \frac{2I_0 r dr}{cb^2 r} = \frac{2I_0}{cb^2} \int_a^b dr = \frac{2I_0(b-a)}{cb^2}.$$

Решение задачи 2

Пусть на электроды подано напряжение U . Тогда силовые линии электрического поля и плотности тока проходят по образующим конуса – такое распределение токов отвечает аксиальной симметрии системы. Линейная плотность тока зависит только от координаты на оси конуса, которая однозначно связана с радиусом r сечения конуса горизонтальной плоскостью. Эта зависимость определяется условием непрерывности полного тока, текущего по конусу:

$$2\pi r i(r) = I = \text{const},$$

откуда плотность тока

$$i(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

и поле

$$E(r) = \frac{I}{2\pi\sigma^*r}.$$

Тогда падение напряжения между электродами можно записать как интеграл

$$U = \int E(r)dl = \int_a^b \frac{E(r)dr}{\sin(\alpha/2)} = \frac{I}{2\pi\sigma^* \sin(\alpha/2)} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I \ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma^* \sin(\alpha/2)} = \frac{I \ln 2}{2\pi\sigma^* \sin(\alpha/2)}.$$

Искомое сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln 2}{2\pi\sigma^* \sin(\alpha/2)} = \frac{\ln 2}{2\pi\sigma^* \sin 30^\circ} = \frac{\ln 2}{\pi\sigma^*}.$$

Решение задачи 3

Поскольку электрон пролетает через вакуумный диод без рассеяния, то в каждой точке его скорость однозначно связана с потенциалом:

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{2e\varphi(x)}{m}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{dx}{\varphi^{1/2}(x)}. \quad (1)$$

Известно, что если в плоском диоде выполняется закон «3/2», то зависимость потенциала от координаты определяется выражением

$$\varphi(x) = U \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}. \quad (2)$$

Из (1) с учетом (2) получим:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2eU}} d^{2/3} \frac{dx}{x^{2/3}}. \quad (3)$$

Интегрируем:

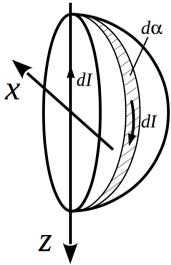
$$\int_0^T dt = \sqrt{\frac{m}{2eU}} d^{2/3} \int_0^d \frac{dx}{x^{2/3}}.$$

После подстановки пределов получим *:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2eU}} d^{2/3} \cdot 3d^{1/3} = 3\sqrt{\frac{m}{2eU}} d.$$

Решение задачи 4

Силовые линии плотности тока на полусфере проходят по “меридианам”. Мысленно дополним прямой провод отрезком, совпадающим с осью полусферы, по которому текут прямой и обратный ток величиной I . Тогда систему токов можно представить как суперпозицию тока, текущего по непрерывному бесконечному прямому проводу, и элементарных токов dI , текущих по замкнутым контурам, образованным осью полусферы и лепестками на сфере с угловым размером $d\alpha$. Каждый элементарный ток обладает магнитным дипольным моментом



$$\frac{dI \cdot S}{c} = \frac{(Id\alpha/\pi) \cdot \pi a^2/2}{c} = \frac{Ia^2 d\alpha}{2c}$$

с проекцией на ось x , равной

$$dm_x = \frac{Ia^2}{2c} \sin \alpha d\alpha.$$

Из симметрии системы токов следует, что y -компонента дипольного момента полусферы (включая ось с током) равна нулю. Тогда полный дипольный момент равен

$$m = m_x = \int_0^\pi \frac{Ia^2}{2c} \sin \alpha d\alpha = \frac{Ia^2}{c}.$$

* Несмотря на особенность в точке катода, где и скорость и ускорение электрона равны нулю, электрон не “застревает” навсегда в этой точке, поскольку данную особенность нужно понимать в смысле физического предела.

Поле на больших расстояниях представляет собой суперпозицию поля бесконечного прямого провода и поля магнитного диполя:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{m_x}{r^3}\mathbf{e}_x + 3\frac{m_x x}{r^4}\mathbf{e}_r + \frac{2I}{cR}\mathbf{e}_\alpha,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Контрольная работа 1.2, вариант 2

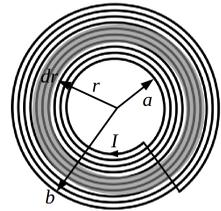
Решение задачи 1

Рассмотрим кольцо радиуса r толщиной dr . От этого кольца в центре наводится элементарное поле

$$dH_0(r) = \frac{2dI}{cr}.$$

Эффективный ток в кольце равен

$$dI = I \frac{dr}{d}.$$



Поле всей спирали получим интегрированием по радиусу *:

$$H_0 = \int dH_0 = \frac{2I}{cd} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2I}{cd} \ln \frac{b}{a}.$$

* Случай $b = a + d$ соответствует одному витку радиуса a :

$$H_0 = \frac{2I}{cd} \ln \frac{a+d}{a} = \frac{2I}{cd} \ln \left(1 + \frac{d}{a} \right) \approx \frac{2I}{cd} \cdot \frac{d}{a} = \frac{2I}{ca}.$$

Решение задачи 2

Пусть на электроды подано напряжение U . Тогда силовые линии электрического поля и плотности тока проходят по “меридианам” полусферы – такое распределение токов отвечает граничному условию $i_n = 0$ на границе полусферы. Линейная плотность тока зависит только от зенитного угла θ , и эта зависимость определяется условием непрерывности полного тока, текущего по полусфере:

$$2\pi a \sin \theta \cdot i(\theta) = I = \text{const},$$

откуда плотность тока

$$i(\theta) = \frac{I}{2\pi a \sin \theta}$$

и поле

$$E(\theta) = \frac{I}{2\pi\sigma^* a \sin \theta}.$$

Тогда падение напряжения между электродами можно записать как интеграл *

$$\begin{aligned} U = \int E(\theta) dl &= \int_{60^\circ}^{120^\circ} \frac{I}{2\pi\sigma^* a \sin \theta} a d\theta = \frac{I}{2\pi\sigma^*} \int_{60^\circ}^{120^\circ} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \\ &= \frac{I}{4\pi\sigma^*} \left(\ln \frac{1 - \cos 120^\circ}{1 + \cos 120^\circ} - \ln \frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ} \right) = \frac{I \ln 3}{2\pi\sigma^*}. \end{aligned}$$

Искомое сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln 3}{2\pi\sigma^* a}.$$

* Приведем вычисление интеграла $\int \frac{d\theta}{\sin \theta}$:

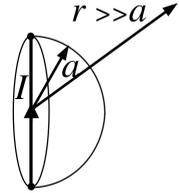
$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = - \int \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} = - \int \frac{d \cos \theta}{2 \cdot (1 - \cos \theta)} - \int \frac{d \cos \theta}{2 \cdot (1 + \cos \theta)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right|.$$

Решение задачи 3

Эта задача аналогична задаче 4 вар. 1 (см. решение на стр. 218) с той разницей, что теперь поле не включает вклада от бесконечного прямого провода с током:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{m_x}{r^3} \mathbf{e}_x + 3\frac{m_x x}{r^4} \mathbf{e}_r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



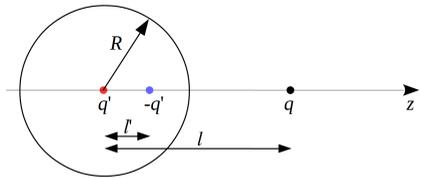
Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Внешнее по отношению к заряду q поле является суперпозицией поля заряда-изображения $-q' = -\frac{R}{l}q$, расположенного на расстоянии $l' = \frac{R^2}{l}$ от центра сферы, и заряда-изображения $+q' = \frac{R}{l}q$, расположенного в центре:

$$E(z) = \left(\frac{q'}{l'^2} - \frac{q'}{(l-l')^2} \right) = qR \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z(z - \frac{R^2}{z})^2} \right) = qR \left(\frac{1}{z^3} - \frac{z}{(z^2 - R^2)^2} \right).$$

Потенциал частицы в точке на расстоянии z от центра сферы определяется интегралом



$$\varphi(z) = \int_z^\infty E(z') dz'.$$

Неопределенный интеграл:

$$qR \left(\int \frac{dz'}{z'^3} - \int \frac{z' dz'}{(z'^2 - R^2)^2} \right) = -\frac{qR}{2z'^2} + \frac{qR}{2(z'^2 - R^2)}.$$

После подстановки пределов, получим

$$\varphi(z) = \frac{qR}{2z^2} - \frac{qR}{2(z^2 - R^2)} = \frac{qR}{2l^2} - \frac{qR}{2(l^2 - R^2)}.$$

Для сравнения приведем энергию взаимодействия пробного заряда с зарядами-изображениями:

$$\varphi^*(l) = \frac{q'}{l} - \frac{q'}{l-l'} = \frac{qR}{l^2} - \frac{qR}{l(l - R^2/l)} = \frac{qR}{l^2} - \frac{qR}{l^2 - R^2}.$$

Видно, что потенциал ровно в два раза меньше “энергии взаимодействия”.

Искомую скорость находим из условия

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{q^2R}{2l^2} - \frac{q^2R}{2(l^2 - R^2)} = 0 \Rightarrow v = \frac{qR}{l} \sqrt{\frac{R}{m(l^2 - R^2)}}.$$

Решение задачи 2

Искомая индуктивность задается формулой

$$W = \frac{LI^2}{2c^2},$$

где W – энергия магнитного поля, заключенная в объеме трубы единичной длины при однородно распределенном токе I :

$$W = \int_{a \leq R \leq b} \frac{H^2(\mathbf{R})}{8\pi} dS.$$

Поле находим по теореме Стокса:

$$2\pi RH(R) = \frac{4\pi I}{c\pi(b^2 - a^2)}\pi(r^2 - a^2) \Rightarrow H(R) = \frac{2I}{c(b^2 - a^2)} \frac{R^2 - a^2}{R}.$$

Подставляем в интеграл:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{(2I)^2}{8\pi(c(b^2-a^2))^2} \int_a^b \left(\frac{R^2-a^2}{R}\right)^2 2\pi R dR = \\
 &= \frac{4I^2}{4c^2(b^2-a^2)^2} \int_a^b \left(R^3 - 2a^2R + \frac{a^4}{R}\right) dR = \\
 &= \frac{I^2}{c^2(b^2-a^2)^2} \left(\frac{b^4-a^4}{4} - 2a^2\frac{b^2-a^2}{2} + a^4 \ln \frac{b}{a}\right) = \\
 &= \frac{I^2}{c^2(b^2-a^2)^2} \left(\frac{b^4-a^4-4a^2b^2+4a^4}{4} + a^4 \ln \frac{b}{a}\right) = \\
 &= \frac{I^2}{c^2(b^2-a^2)^2} \left(\frac{b^4-2a^2b^2+a^4}{4} - \frac{2a^2b^2-2a^4}{4} + a^4 \ln \frac{b}{a}\right) = \\
 &= \frac{I^2}{2c^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{b^2-a^2} + \frac{2a^4}{(b^2-a^2)^2} \ln \frac{b}{a}\right),
 \end{aligned}$$

откуда искомая удельная внутренняя индуктивность *:

$$L = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{b^2-a^2} + \frac{2a^4}{(b^2-a^2)^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Решение задачи 3

Способ 1.

Мысленно заполним промежуток между соленоидами двумя катушками длиной d , сечением S и плотностью намотки n со встречными токами I . Тогда искомое поле можно рассматривать

* В пределе $a \ll b$ получаем известный результат для сплошного провода круглого сечения (см. задачу 6.2 из [1]):

$$L|_{a=0} = \frac{1}{2}.$$

Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что $L = 0$ в пределе $a \rightarrow b$.

как суперпозицию полей бесконечного соленоида и одной катушки с обратным током. Бесконечный соленоид снаружи от себя поля не создает, а катушка наводит на больших расстояниях поле диполя:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где \mathbf{m} – магнитный дипольный момент катушки, равный

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c} \cdot nd \cdot \mathbf{e}_z = \frac{ISnd}{c} \mathbf{e}_z.$$

Способ 2.

Каждый полубесконечный соленоид создает на больших расстояниях поле кулоновского типа с эффективным магнитным зарядом $q_m = \frac{ISn}{c}$ (см. задачу 4.24 из [1]). Учитывая направления токов в соленоидах, заряд на правом конце промежутка положительный, на левом – отрицательный. Тогда вместе эти заряды на больших расстояниях создают поле диполя

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

с магнитным дипольным моментом $\mathbf{m} = q_m d \mathbf{e}_z = \frac{ISnd}{c} \mathbf{e}_z$.

Решение задачи 4

Опишем картину явления. Ток в кольце наводит в пространстве магнитное поле. Поток этого поля в неподвижном витке оказывается переменным во времени, поскольку изменяется угол между полем и плоскостью витка. Соответственно в витке наводится э. д. с. индукции и по витку течет ток.

Поток магнитного поля через сечение витка удобно представить в комплексном виде:

$$\hat{\Phi}_1 \approx \pi r_0^2 H_0 e^{i\omega t},$$

где $H_0 = \frac{2\pi I_0}{cr_1}$ – поле, наводимое током I_0 в центре кольца.

Э. д. с. индукции в витке равна

$$\hat{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{c \partial t} = \pi r_0^2 \cdot \frac{2\pi I_0}{c^2 r_1} \cdot (-i\omega) e^{i\omega t} = \frac{2\pi^2 r_0^2 I_0}{c^2 r_1} \cdot \omega e^{i\omega t - \pi/2}.$$

Ток в витке равен *

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R + i\frac{\omega L}{c}} = \frac{2\pi^2 \omega r_0^2 I_0}{c^2 r_1 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2}} e^{i\omega t - \pi/2 - \phi},$$

где $\phi = \text{arctg} \frac{\omega L}{R}$. Действительная часть полученного выражения дает временную зависимость тока:

$$I(t) = \frac{2\pi^2 \omega r_0^2 I_0}{c^2 r_1 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2}} \sin(\omega t - \phi).$$

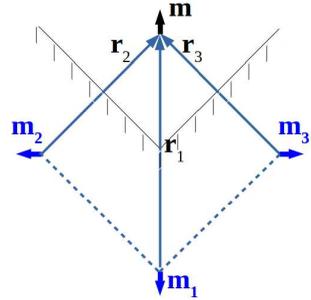
Решение задачи 5

Бусинка находится в магнитном поле, которое по методу изображений можно представить как образуемое тремя фиктивными диполями (см. рисунок):

$$m_1 = m_2 = m_3 = m.$$

Тогда суммарная сила, действующая на бусинку со стороны фиктивных диполей, рассчитывается по формуле

$$\mathbf{F}_m = \sum_{i=1,2,3} 3 \frac{(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}) \mathbf{r}_i}{r_i^5} + 3 \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m}_i}{r_i^5} + 3 \frac{(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{m}}{r_i^5} - 15 \frac{(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^7}.$$



* Это выражение является решением дифференциального уравнения

$$R\hat{I} + \frac{L}{c}\dot{\hat{I}} = \hat{\mathcal{E}},$$

записанного в соответствии со вторым законом Кирхгофа для эквивалентной электрической цепи.

Сила со стороны первого диполя направлена вверх и по модулю равна

$$F_{1z} = 6 \frac{m^2}{r_1^4}.$$

Вертикальные компоненты сил на бусинку со стороны диполей 2 и 3 равны друг другу и составляют

$$F_{2z} = -3 \frac{m^2 \sqrt{2}}{2r_2^4} + 15 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m^2}{r_2^4} = \frac{9m^2 \sqrt{2}}{4r_2^4} = \frac{9m^2 \sqrt{2}}{4r_1^4} 2^{4/2} = \frac{9m^2 \sqrt{2}}{r_1^4}.$$

Горизонтальная компонента результирующей силы равна нулю в силу симметрии задачи. Тогда полная сила на бусинку со стороны сверхпроводника направлена вверх и равна

$$F_m = \frac{(6 + 18\sqrt{2})m^2}{r_1^4}.$$

Условие равновесия сил

$$F_m = Mg,$$

откуда искомая высота

$$a = \frac{r_1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{(6 + 18\sqrt{2})m^2}{Mg}} = \sqrt[4]{\frac{3m^2(1 + 3\sqrt{2})}{8Mg}}.$$

Решение задачи 6

Решение задачи можно условно разбить на две части.

Первая часть состоит в определении амплитуды B переменного магнитного поля внутри большого шара вблизи его поверхности. В квазистационарном приближении эта задача сводится к соответствующей стационарной задаче (см. задачу 5.7 из [1]):

$$B_1 = \frac{3\mu B_0}{\mu + 2} e^{i\omega t}.$$

Вторая часть сводится к решению задачи о проводящем шаре, помещенном в переменное однородное магнитное поле, в случае сильного скин-эффекта. Соответствующая типовая задача разобрана в том же задачнике (Р62 [1], стр. 190). Отметим здесь ключевые моменты в решении.

Во-первых, условие сильного скин-эффекта предполагает возникновение вихревых токов в проводящем шаре, которые не только зануляют поле внутри шара, но и наводят дополнительное поле снаружи, имеющее вид поля магнитного диполя. В результате оказывается, что θ -компонента суммарного поля на поверхности равна

$$B_{s\tau} = B_{s\theta} = \frac{3}{2}B_1 \sin \theta.$$

Во-вторых, характеризуя тонкий скин-слой эффективной поверхностной плотностью тока $J(\theta)$, находим ее величину из граничного условия $\Delta H_{s\tau} = \frac{4\pi}{c} J$:

$$J(\theta) = \frac{3c}{8\pi\mu} B_1 \sin \theta.$$

Теперь, приписывая тонкой корке толщины δ на поверхности сферы радиуса a однородную объемную плотность тока $j = \frac{J}{\delta}$, рассчитываем мощность тепловых потерь как интеграл

$$W = \int \frac{j^2}{\sigma} \delta dS = \int \frac{j^2}{\sigma} 2\pi\delta \sin \theta d\theta,$$

который после усреднения по времени дает

$$\langle W \rangle = \frac{3}{8} |B_1|^2 \delta a^2 \mu \omega.$$

Решение задачи 7

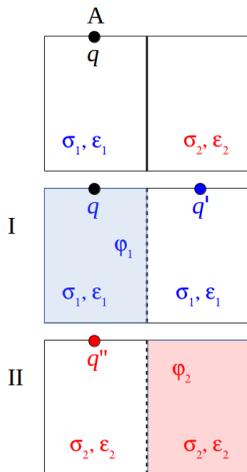
Способ 1.

Пусть по цепи АВ протекает ток $I_{AB} = I$. Потенциал в точках М и N можно рассматривать как результат суперпозиции потенциалов, создаваемых в этих точках токами I_A и I_B по отдельности. Рассмотрим сначала вклад тока I_A .

Полный ток I_A можно записать как (см. задачу 1 на стр. 144)

$$I_A = \frac{q}{\tau} = \frac{4\pi\sigma_1}{(\varepsilon_1 + 1)}q,$$

где q – свободный заряд, сосредоточенный в точке А. Этот заряд создает в пространстве поле и токи, вызывающие появление нескомпенсированного заряда на границе раздела “1-2”. Задачу об определении поля (потенциала) в нижнем полупространстве будем решать методом изображений для точечного заряда, находящегося на плоской границе раздела “грунт-воздух” вблизи полуплоскости, разделяющей области 1 и 2. Рисунок I иллюстрирует



систему для определения потенциала φ_1 в области 1, рисунок II – для потенциала φ_2 в области 2. Граничные условия на границе раздела сред “1-2”:

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

При этом вдоль границы “грунт-воздух” автоматически выполняется условие $E_n = 0$, завершающее математически корректную постановку задачи об определении поля в нижнем полупространстве.

Решение, обусловленное током $I_A = I$:

$$I_A = \frac{4\pi\sigma_1}{(\varepsilon_1 + 1)}q,$$

$$q' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}q, \quad q'' = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{\varepsilon_2 + 1}{\varepsilon_1 + 1}q,$$

$$\varphi_M^I = \frac{2q}{(\varepsilon_1+1)r_{AM}} + \frac{2q(\sigma_1-\sigma_2)}{(\varepsilon_1+1)(\sigma_1+\sigma_2)r_{BM}} = \frac{I_A}{2\pi\sigma_1 r_{AM}} + \frac{I_A(\sigma_1-\sigma_2)}{2\pi\sigma_1(\sigma_1+\sigma_2)r_{BM}},$$

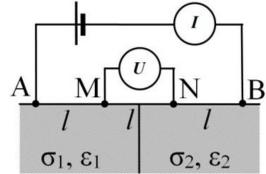
$$\varphi_N^I = q \frac{2(\varepsilon_2+1)\sigma_1 \cdot 2}{(\varepsilon_1+1)(\sigma_1+\sigma_2)(\varepsilon_2+1)r_{AN}} = I_A \frac{2}{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)r_{AN}}.$$

При записи потенциалов мы учли, что каждый раз точечный заряд находится на плоской границе раздела с воздухом (например, потенциал, создаваемый зарядом q на рисунке I, $\varphi = \frac{2q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)r} = \frac{2q}{(\varepsilon_1+1)r}$ — см. задачу 2.4 из [1]).

Решение, обусловленное током I_B , получается аналогично заменой $I_A \leftrightarrow I_B = -I$, $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $r_{AM} \leftrightarrow r_{BN}$ и $r_{AN} \leftrightarrow r_{BM}$:

$$\varphi_N^{II} = -\frac{I}{4\pi\sigma_2 r_{BN}} - \frac{I(\sigma_2-\sigma_1)}{4\pi\sigma_2(\sigma_1+\sigma_2)r_{AN}},$$

$$\varphi_M^{II} = -I \frac{2}{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)r_{BM}}.$$



Согласно принципу суперпозиции потенциалы в точках M и N равны соответственно

$$\varphi_M = \varphi_M^I + \varphi_M^{II} = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r_{AM}} \left(1 + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} - \frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} \right) = \frac{I}{4\pi\sigma_1 l},$$

$$\varphi_N = \varphi_N^I + \varphi_N^{II} = -\frac{I}{2\pi\sigma_2 r_{BN}} \left(1 + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} - \frac{2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} \right) = -\frac{I}{4\pi\sigma_2 l}.$$

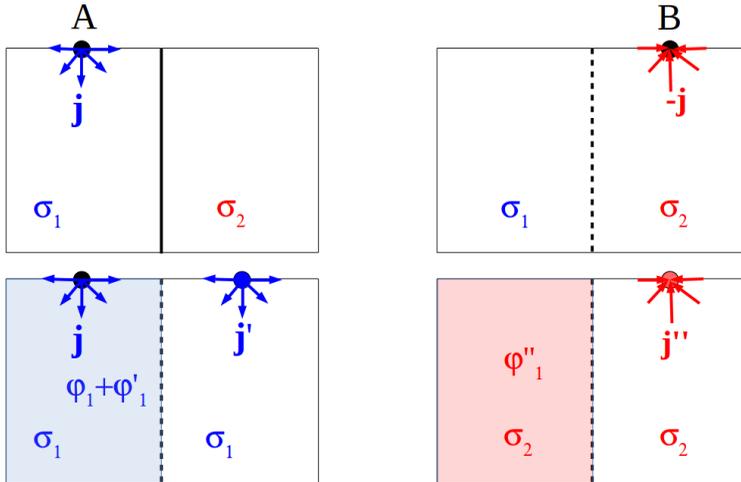
Тогда

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = I \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\pi\sigma_1\sigma_2 l} \Rightarrow R^* = \frac{U_{MN}}{I} = \frac{1}{4\pi l} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right).$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ кажущееся сопротивление $R^* = \frac{1}{2\pi l \sigma}$ (классическая формула для метода Веннера).

Способ 2.

Будем выражать поле и потенциал не через заряд $q_A = q$, а через ток, текущий по проводнику через точки А и В. Благодаря этому из всех выражений исчезнет явная зависимость от ϵ_1 и ϵ_2 .



Итак, пусть по цепи АВ протекает ток $I_{AB} = I$. Распределение тока в области 1 является суперпозицией тока I в точке А:

$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r^2} \mathbf{e}_r, \quad \varphi = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r},$$

тока-изображения $I' = I \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ ($\frac{I'}{I} = \frac{q'}{q}$, см. Способ 1):

$$\mathbf{j}' = \frac{I'}{2\pi r'^2} \mathbf{e}'_r, \quad \mathbf{E}' = \frac{I'}{2\pi\sigma_1 r'^2} \mathbf{e}'_r, \quad \varphi' = \frac{I'}{2\pi\sigma_1 r'}$$

(левая часть рисунка)

и тока-изображения $I'' = -I \cdot \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ от тока в точке В * (правая часть рисунка):

$$\mathbf{j}'' = \frac{I''}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}'' = \frac{I''}{2\pi\sigma_1 r^2} \mathbf{e}_r, \quad \varphi'' = \frac{I''}{2\pi\sigma_1 r}.$$

Заметим, что получающееся в результате суперпозиции поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и всем граничным условиям, отмеченным в решении по 1-му способу. Следовательно, решение верно и единственно. Тогда потенциал в точке М равен

$$\varphi_M = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r_{AM}} \left(1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} - \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} \right) = \frac{I}{4\pi\sigma_1 l}.$$

Потенциал в точке N рассчитывается аналогично и получается из φ_M заменой $I_A \leftrightarrow I_B = -I$, $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $r_{AM} \leftrightarrow r_{BN}$ и $r_{AN} \leftrightarrow r_{BM}$:

$$\varphi_N = -\frac{I}{2\pi\sigma_2 r_{BN}} \left(1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} - \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{l}{2l} \right) = -\frac{I}{4\pi\sigma_2 l}.$$

В остальном решение ничем не отличается от способа 1.

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = I \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\pi\sigma_1\sigma_2 l} \Rightarrow R^* = \frac{U_{MN}}{I} = \frac{1}{4\pi l} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right).$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ $R^* = \frac{1}{2\pi l \sigma}$ (формула для метода Веннера).

* Выражение для I'' получается из граничного условия $j_n + j'_n = j''_n$, записанного для системы с одним током $I_B = -I$. В отличие от системы с одним только током $I_A = I$, в выражении для j'_n меняются местами σ_1 и σ_2 , а также изменяется знак при I :

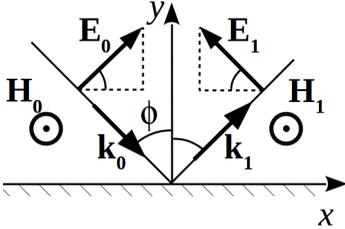
$$\frac{I''}{2\pi r^2} \cos \theta = \frac{I}{2\pi r^2} \cos \theta - \frac{I'}{2\pi r^2} \cos \theta,$$

$$I'' = -I \left(1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) = -I \cdot \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

Зеркало идеально проводящее, поэтому толщину скин-слоя считаем бесконечно малой. Тогда электрическое и магнитное поля в металле равны нулю. Граничные условия принимают вид:



$$H_0 + H_1 = \frac{4\pi}{c} J,$$

$$D_0 \cos 45^\circ + D_1 \cos 45^\circ = 4\pi\sigma,$$

где знаки при слагаемых, соответствующих отраженной волне, поставлены с учетом граничного условия $(E_0 - E_1) \sin 45^\circ = 0$ на тангенциальные компоненты электрического поля. Из этого условия следует также, что $E_1 = E_0 = D_0 = D_1 = H_0 = H_1$.

Тогда получаем искомые величины:

$$J = \frac{(H_0 + H_1)c}{4\pi} = \frac{c}{2\pi} E_0 m e^{i(k \sin 45^\circ x - \omega t)} = \frac{c E_0 m}{2\pi} e^{i(kx \frac{\sqrt{2}}{2} - \omega t)}, \quad \mathbf{J} = J \mathbf{e}_x,$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (D_0 \cos 45^\circ + D_1 \cos 45^\circ) = \frac{E_0 m \sqrt{2}}{4\pi} e^{i(kx \frac{\sqrt{2}}{2} - \omega t)}.$$

Решение задачи 2

Выполним вычисления:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\tau} f_0 \sin \omega t e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{f_0}{2i} \int_0^{\tau} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega t} dt = \frac{f_0}{2i} \int_0^{\tau} e^{i(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= -\frac{f_0}{2i} \int_0^{\tau} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = f_0 \frac{e^{i(\omega + \omega_0)\tau} - 1}{2i^2(\omega + \omega_0)} - f_0 \frac{e^{i(\omega - \omega_0)\tau} - 1}{2i^2(\omega - \omega_0)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f_0}{i} e^{i \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}}{\omega + \omega_0} - \frac{f_0}{i} e^{i \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\omega - \omega_0} = \\
 &= e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \operatorname{sinc} \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} + e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \operatorname{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} = \\
 &= e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \left(\operatorname{sinc} \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} + \operatorname{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right) = e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} F(\omega, \omega_0).
 \end{aligned}$$

$$\omega = 0: F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \frac{\omega_0\tau}{2} + \operatorname{sinc} \left(-\frac{\omega_0\tau}{2} \right) = 0,$$

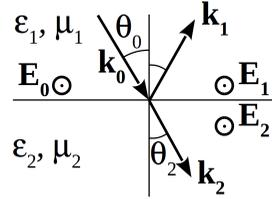
$$\omega = \omega_0: F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \pi + \operatorname{sinc} 0 = 1,$$

$$\omega = 2\omega_0: F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{3\pi}.$$

Решение задачи 3

Искомый коэффициент определяется по формуле Френеля для случая диэлектриков со свойствами магнетиков*:

$$\xi_{11} = \frac{\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0}{\mu_1} - \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_2}{\mu_2}}{\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0}{\mu_1} + \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_2}{\mu_2}}.$$



Поскольку показатели преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ обеих сред совпадают, то $\theta_2 = \theta_0$ и тогда:

$$\xi_{11} = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}.$$

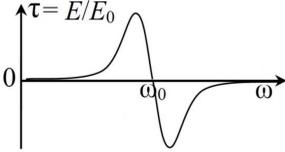
* В учебном пособии [5] та же формула приведена в другом виде:

$$\xi_{11} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_0 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2}.$$

Теперь учтем, что $n_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1 = 4\mu_1^2$, а $n_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2 = \mu_2^2$, откуда $\mu_2 = 2\mu_1$:

$$\xi_1 = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{2\mu_1}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{2\mu_1}} = \frac{1}{3}.$$

Решение задачи 4



Заданный волновой пакет может быть представлен в виде суперпозиции двух плоских монохроматических волн (применяем формулу произведения косинусов):

$$\begin{aligned} E(r, t) &= E_0 \cos(k_0 z - \omega_0 t) \cos(\Delta k z - \Delta \omega t) = \\ &= \frac{E_0}{2} \cos((k_0 + \Delta k)z - (\omega_0 + \Delta \omega)t) + \\ &+ \frac{E_0}{2} \cos((k_0 - \Delta k)z - (\omega_0 - \Delta \omega)t). \end{aligned}$$

Амплитуда каждой волны на выходе из фильтра домножается на АЧХ при соответствующей частоте:

$$\begin{aligned} E_2(z, t) &= \tau(\omega_0 + \Delta \omega) \frac{E_0}{2} \cos((k_0 + \Delta k)z - (\omega_0 + \Delta \omega)t) + \\ &+ \tau(\omega_0 - \Delta \omega) \frac{E_0}{2} \cos((k_0 - \Delta k)z - (\omega_0 - \Delta \omega)t). \end{aligned}$$

Учтем, что $\tau(\omega_0 - \Delta \omega) = -\tau(\omega_0 + \Delta \omega)$:

$$\begin{aligned} E_2(z, t) &= \tau(\omega_0 + \Delta \omega) \frac{E_0}{2} (\cos((k_0 + \Delta k)z - (\omega_0 + \Delta \omega)t) - \\ &- \cos((k_0 - \Delta k)z - (\omega_0 - \Delta \omega)t)). \end{aligned}$$

Применив формулу разности косинусов, получим

$$\begin{aligned} E_2(z, t) &= -\tau(\omega_0 + \Delta \omega) E_0 \sin(k_0 z - \omega_0 t) \sin(\Delta k z - \Delta \omega t) = \\ &= \sqrt{T} E_0 \sin(k_0 z - \omega_0 t) \sin(\Delta k z - \Delta \omega t). \end{aligned}$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Зеркало идеально проводящее, поэтому толщину скин-слоя считаем бесконечно малой. Тогда электрическое и магнитное поля в металле равны нулю. Граничные условия принимают вид:

$$D_{0n} + D_{1n} = 4\pi\sigma,$$

$$H_0 \cos 45^\circ - H_1 \cos 45^\circ = \frac{4\pi}{c} J.$$

Из граничного условия $\Delta E_\tau = E_0 + E_1 = 0$ следует, что

$$D_1 = E_1 = H_1 = -E_0 = -D_0 = -H_0.$$

Тогда получаем искомые величины:

$$J = \frac{(H_0 - H_1)c}{4\pi} \cos 45^\circ = \frac{cE_{0m}\sqrt{2}}{4\pi} e^{i(k \sin 45^\circ x - \omega t)} = \frac{cE_{0m}\sqrt{2}}{4\pi} e^{i(kx \frac{\sqrt{2}}{2} - \omega t)},$$

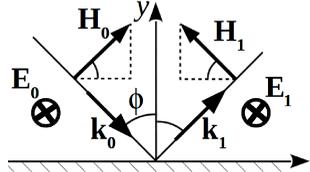
$$\mathbf{J} = J\mathbf{e}_x,$$

$$\sigma = 0.$$

Решение задачи 2

Выполним вычисления:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\tau}^0 f_0 \sin \omega t e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{f_0}{2i} \int_{-\tau}^0 (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega t} dt = \frac{f_0}{2i} \int_{-\tau}^0 e^{i(\omega+\omega_0)t} dt - \frac{f_0}{2i} \int_{-\tau}^0 e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \\ &= f_0 \frac{1 - e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}}{2i^2(\omega+\omega_0)} - f_0 \frac{1 - e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}}{2i^2(\omega-\omega_0)} = \\ &= \frac{f_0}{i} e^{i\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}} \frac{\sin \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}}{\omega+\omega_0} - \frac{f_0}{i} e^{i\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}} \frac{\sin \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}}{\omega-\omega_0} = \end{aligned}$$



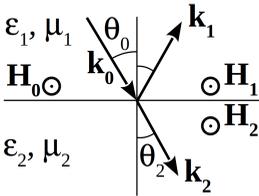
$$\begin{aligned}
 &= e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \operatorname{sinc} \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2} + e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \operatorname{sinc} \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} = \\
 &= e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} \left(\operatorname{sinc} \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2} + \operatorname{sinc} \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \right) = e^{i\omega\tau/2} \frac{f_0\tau}{2} F(\omega, \omega_0).
 \end{aligned}$$

$$\omega = 0 : F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \frac{\omega_0\tau}{2} + \operatorname{sinc} \left(-\frac{\omega_0\tau}{2} \right) = 0,$$

$$\omega = \omega_0 : F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \pi + \operatorname{sinc} 0 = 1,$$

$$\omega = 2\omega_0 : F(\omega, \omega_0) = \operatorname{sinc} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{3\pi}.$$

Решение задачи 3



Искомый коэффициент определяется по формуле Френеля для случая диэлектриков со свойствами магнетика *:

$$\xi_1 = \frac{\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0}{\mu_2} - \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_2}{\mu_1}}{\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0}{\mu_2} + \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_2}{\mu_1}}.$$

Поскольку показатели преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ обеих сред совпадают, то $\theta_2 = \theta_0$ и тогда:

$$\xi_1 = \frac{\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}}.$$

Теперь учтем, что $n_2^2 = \epsilon_2\mu_2 = 4\mu_2^2$, а $n_1^2 = \epsilon_1\mu_1 = \mu_1^2$, откуда $\mu_1 = 2\mu_2$:

$$\xi_1 = \frac{\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{2\mu_2}}{\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{2\mu_2}} = \frac{1}{3}.$$

* В учебном пособии [5] та же формула приведена в другом виде:

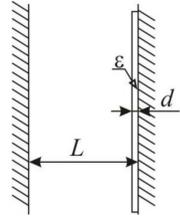
$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_0 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_2}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_2}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Число пучностей* равно числу полуволин, укладываемых на длине L . Отсюда длина волны до напыления слоя диэлектрика:

$$\lambda_0 = \frac{2L}{m},$$



а частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{\pi m c}{L}.$$

Слой диэлектрика толщиной d накладывает дополнительные граничные условия на поля на границе “вакуум-диэлектрик”:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (1)$$

Ищем решение в виде, обеспечивающем условие $E_x = 0$ на стенках резонатора:

$$E_x(z) = \begin{cases} A \sin(k'z), & 0 \leq z < L - d \\ B \sin(\sqrt{\epsilon}k'(z - L)), & L - d \leq z \leq L \end{cases}$$

$$H_y(z) = \begin{cases} A \cos(k'z), & 0 \leq z < L - d \\ \sqrt{\epsilon}B \cos(\sqrt{\epsilon}k'(z - L)), & L - d \leq z \leq L \end{cases}$$

* По умолчанию имеются в виду пучности E в волне. Для H и положения пучностей и их число будут другими. В частности, в отличие от магнитного поля, электрическое на стенках резонатора имеет не пучность, а узел.

Граничные условия (1) принимают вид

$$\begin{cases} A \sin(k'(L - d)) = -\sqrt{\varepsilon} B \sin(\sqrt{\varepsilon} k' d), \\ k' A \cos(k'(L - d)) = \sqrt{\varepsilon} k' B \cos(\sqrt{\varepsilon} k' d) \end{cases} \quad (2)$$

Делением первого уравнения в (2) на второе получаем уравнение на k' :

$$\operatorname{tg}(k'(L - d)) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon} k' d). \quad (3)$$

В уравнении (3) $k' = k_0 + \Delta k$, Δk мало, а $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ удовлетворяет условию $k_0 L = \pi m$. Тогда имеем

$$\operatorname{tg}(\Delta k L - k_0 d - \Delta k d) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon}(k_0 d + \Delta k d)).$$

Для того, чтобы получить первую ненулевую поправку к k_0 , необходимо разложить тангенс по малому аргументу до членов третьего порядка малости:

$$\begin{aligned} & (\Delta k L - k_0 d - \Delta k d) + \frac{(\Delta k L - k_0 d - \Delta k d)^3}{3} = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{\varepsilon}(k_0 d + \Delta k d) + \frac{\varepsilon^{3/2}(k_0 d + \Delta k d)^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Удерживаем в уравнении члены до третьего порядка по $(k_0 d)$ и члены первого порядка по Δk , пренебрегая при этом членами $\sim L(k_0 d)^2 \Delta k$ и $\sim d(k_0 d)^2 \Delta k$ с учетом условия $\frac{\pi m d}{L} \ll 1$:

$$L \Delta k - k_0 d - d \Delta k - \frac{(k_0 d)^3}{3} = -k_0 d - d \Delta k - \varepsilon \frac{(k_0 d)^3}{3},$$

откуда выражаем

$$\Delta k = -(\varepsilon - 1) \frac{(k_0 d)^3}{3L} = (1 - \varepsilon) \frac{(\pi m d)^3}{3L^4}.$$

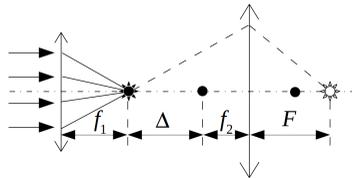
Соответствующее изменение частоты:

$$\Delta \omega = c \Delta k = \frac{c(1 - \varepsilon)(\pi m d)^3}{3L^4}.$$

Решение задачи 2

Раздвинем две “половинки” линзы на расстояние $\Delta + (f_1 + f_2)$, где f_1 и f_2 – их фокусные расстояния. Пусть пучок лучей, параллельный оси системы, и найдем фокусное расстояние F образовавшегося телескопа, отсчитываемое от второй “половинки”. Изображение пучка для первой линзы, лежащее в ее фокусе, является предметом для второй. Тогда изображение пучка для телескопа (фокус телескопа) совпадает с изображением предмета для второй линзы. Положение последнего подчиняется уравнению, записанному для второй линзы:

$$\frac{1}{\Delta + f_2} + \frac{1}{F} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{\Delta}{f_2(\Delta + f_2)}.$$



В условиях нашей задачи $\Delta = -(f_1 + f_2)$. Получаем

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

то есть оптическая сила данной линзы равна сумме оптических сил элементов, из которых она состоит. Фокусное расстояние:

$$F = \frac{R_1 R_2}{R_2(n_1 - 1) + R_1(n_2 - 1)} > 0 \text{ — линза собирающая.}$$

Решение задачи 3

При отражении от обеих границ возникает скачок по фазе на π . Тогда условие максимума m -го порядка в отраженном свете:

$$d_1 = \frac{m\lambda_1}{2n}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для наименьшей длины волны $\lambda_1 = 625$ нм, соответствующей красному цвету, имеем

$$d_1 = \frac{m \cdot 625}{2 \cdot 1.46} \approx 214m.$$

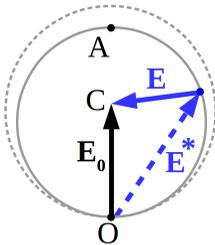
По условию, эта толщина не превышает 300 нм, откуда $m = 1$. Тогда для увеличенной толщины окисла имеем

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{2n}.$$

Искомое увеличение толщины окисла равно

$$\Delta d = \frac{\Delta\lambda}{2n} = \frac{90}{2 \cdot 1.46} = 30.8 \text{ нм}.$$

Решение задачи 4



Дополнительным к диску является экран с отверстием в форме круга с вырезанным сектором. Поле $\hat{E}^*(z_p)$ на оси за дополнительным экраном зависит от числа зон Френеля, укладываемых в отверстие для данного расстояния z_p до точки наблюдения. На диаграмме Френеля поле $\hat{E}^*(z_p)$ изображается вектором с началом в точке O и концом в некоторой точке дуги радиуса $\frac{3E_0}{4}$ (см. рисунок) *.

Согласно принципу Бабинне поле за диском равно

$$\hat{E}(z_p) = \hat{E}_0 - \hat{E}^*(z_p).$$

Из диаграммы Френеля следует, что минимальной амплитуде поля соответствует вектор **AC**, а максимальной – вектор **OC**:

$$E_{min} = AC = 2 \cdot \frac{7}{8} E_0 - E_0 = \frac{3}{4} E_0, \quad E_{max} = OC = E_0.$$

В случае минимума в диск укладывается нечетное число зон Френеля, максимума – четное †.

* По условию z_p много больше размера диска, поэтому $\cos \psi \approx 1$ и внутренние витки спирали на диаграмме Френеля не рассматриваются.

† В частности, максимуму соответствует поле в бесконечно удаленной точке, для которой число зон Френеля равно нулю. В этом случае для наблюдателя диск представляет собой мелкую неоднородность и никак не проявляется в величине поля.

Для интенсивности света имеем:

$$I_{min} = \frac{9}{16}I_0, \quad I_{max} = I_0.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 2

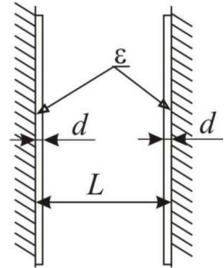
Решение задачи 1

Число узлов на 1 превышает число полуволн, укладываемых на длине L . Отсюда длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2L}{m-1},$$

а частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{\pi(m-1)c}{L}.$$



При наличии двух слоев диэлектрика толщиной d и нечетном числе узлов можно воспользоваться аналогией с задачей 1 КР2.2 вар.1 (см. решение на стр. 238) с той разницей, что первое граничное условие теперь наложим не на $z = 0$, а на $z = \frac{L}{2}$. Тогда решение получается заменой $L \rightarrow L^* = \frac{L}{2}$ в формуле для Δk :

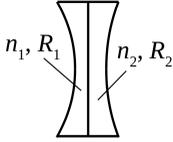
$$\Delta k = -(\varepsilon - 1) \frac{(k_0 d)^3}{3L^*} = (1 - \varepsilon) \frac{2(\pi m d)^3}{3L^4}.$$

Соответствующее изменение частоты:

$$\Delta \omega = \frac{2c(1 - \varepsilon)(\pi m d)^3}{3L^4}.$$

Решение задачи 2

Применим матричный формализм. Матрица составной линзы равна произведению двух матриц: $A = M_2 M_1$, где $M_{1,2}$ – матрицы преломления на первой и второй границах линзы соответственно.



$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n_2}{-|R_2|} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_1-1}{-|R_1|} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элемент

$$a_{21} = -\frac{1-n_2}{|R_2|} + \frac{n_1-1}{|R_1|} = -\frac{(1-n_1)|R_2| - (1-n_2)|R_1|}{|R_1| \cdot |R_2|}.$$

С другой стороны $a_{12} = -\frac{1}{f}$, откуда фокусное расстояние

$$f = \frac{|R_1| \cdot |R_2|}{(1-n_1)|R_2| + (1-n_2)|R_1|} < 0 - \text{линза рассеивающая.}$$

В случае $|R_1| = |R_2| = R$ фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{R}{2 \cdot \left(\frac{n_1+n_2}{2} - 1\right)}.$$

Решение задачи 3

Условие максимума m -го порядка в отраженном свете с учетом того, что скачок по фазе, равный π , возникает только при отражении от передней границы:

$$d_1 = \frac{(2m-1)\lambda_1}{4n}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для наименьшей длины волны $\lambda_1 = 500$ нм, соответствующей зеленому цвету, имеем

$$d_1 = \frac{(2m-1) \cdot 500}{4 \cdot 1.33} \approx 94 \cdot (2m-1).$$

По условию, эта толщина не превышает 200 нм, откуда $m = 1$. Тогда для нижней части пленки имеем

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{4n}.$$

Искомая разность толщин равна

$$\Delta d = \frac{\Delta\lambda}{4n} = \frac{50}{4 \cdot 1.33} = 9.4 \text{ нм.}$$

Экзаменационная работа 2**Решение задачи 1**

Разрешение, ограниченное размером δx пикселя, оправдано, когда этот размер не меньше размера дифракционного пятна в фокальной плоскости:

$$\delta x \geq f \cdot \theta = f \cdot \frac{\lambda}{d} = \lambda \cdot \frac{f}{d}.$$

Тогда условие на размер матрицы, содержащей N пикселей вдоль одной стороны:

$$X \geq N \cdot \delta x = N\lambda \cdot \frac{f}{d}.$$

Минимальные размеры матрицы, обеспечивающие заданное разрешение во всем интервале параметров, отвечают значениям $\lambda = 600$ нм, $\frac{f}{d} = 22$:

$$Y = N_y \lambda \cdot \frac{f}{d} = 4000 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{22}{1} = 5.28 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 5.3 \text{ см},$$

$$X = N_x \lambda \cdot \frac{f}{d} = 6000 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{22}{1} = 7.92 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 8 \text{ см}.$$

Решение задачи 2

Эффективное число зон Френеля, укладывающихся в отверстии (для наблюдателя в точке P), определяется выражением

$$m = \frac{a^2}{\lambda z_p}.$$

Отсюда видно, что одновременное увеличение вдвое диаметра a отверстия и расстояния z_p до точки P приводит к удвоению эффективного числа зон Френеля.

Построим диаграмму Френеля для произвольного начального размера отверстия:

\mathbf{E}_0 – поле падающей волны,

\mathbf{E} – поле волны в точке P при начальном числе зон Френеля,

\mathbf{E}' – поле волны в точке P при конечном числе зон Френеля.

Имеем:

$$E = 2E_0 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad E' = 2E_0 \sin \alpha,$$

$$\frac{E'^2}{E^2} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \left(1 - \frac{E^2}{4E_0^2} \right).$$

Отсюда для интенсивности получим

$$I' = I \left(4 - \frac{I}{I_0} \right).$$

Решение задачи 3

Поле за стандартной дифракционной решеткой складывается из N слагаемых вида

$$\hat{E}_n = \hat{E}_1 e^{i(nkd \sin \theta + kz_p - \omega t)},$$

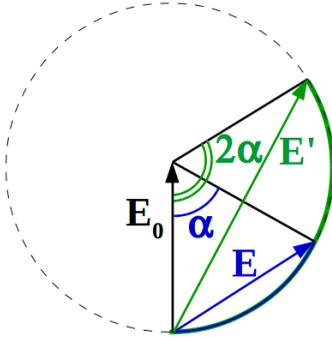
где θ – угол наблюдения, \hat{E}_1 – общий для всех щелей предэкспоненциальный множитель.

В случае максимума m -го порядка $kd \sin \theta = 2\pi m$ и суммарное поле складывается из N синфазных волн:

$$\hat{E} = N \hat{E}_1 e^{i(kz_p - \omega t)}.$$

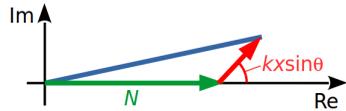
Тогда интенсивность выражается как

$$I \propto E_1^2 N^2. \tag{1}$$



Добавление одной щели на расстоянии x от первой щели дает слагаемое $\hat{E}_1 e^{ikx \sin \theta}$ в выражении для поля \hat{E} :

$$\hat{E}' = \hat{E}_1 \left(N + e^{ikx \sin \theta} \right).$$



Квадрат модуля \hat{E}' находим по теореме косинусов

$$|\hat{E}'|^2 = E_1^2 \left(N^2 + 2N \cos(kx \sin \theta) + 1 \right),$$

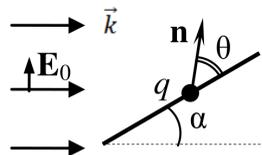
$$\text{откуда } I' \propto E_1^2 \left(N^2 + 2N \cos(kx \sin \theta) + 1 \right).$$

Сравнивая с I из (1) и учитывая условие на θ , находим *

$$I' = I \left(1 + 2 \frac{\cos(2\pi m \frac{x}{d})}{N} + \frac{1}{N^2} \right).$$

Решение задачи 4

Кратко опишем картину явления. Под действием силы со стороны электрического поля падающей волны заряд приобретает ускорение, а вместе с ним $\ddot{\mathbf{d}}$. Таким образом, заряд становится источником излучения, то есть на нем происходит рассеяние.



Мощность, излучаемая в элементарный телесный угол в волновой зоне, в дипольном приближении равна

$$dJ = \frac{c}{4\pi} \left| \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} \right|^2 r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} E_0^2 d\sigma,$$

где $\ddot{\mathbf{d}} = \frac{q^2}{m} \mathbf{E}_0$.

* Условие $x = -d$ соответствует стандартной дифракционной решетке с числом штрихов $N + 1$. Видно, что в этом случае $\frac{I'}{I} = \frac{(N+1)^2}{N^2}$.

Тогда дифференциальное сечение рассеяния без спицы

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \sin^2 \theta,$$

со спицей, учитывая $\left| \ddot{\mathbf{d}} \right| = \frac{q^2}{m} E_0 \sin \alpha$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta,$$

где эффективный радиус частицы $r_e = \frac{q^2}{mc^2}$.

Решение задачи 5

Для одного заряда мощность излучения в полный телесный угол равна

$$\langle J \rangle = \frac{2(er\omega^2)^2}{3c^3} = \frac{2e^2 r^2 \omega^4}{3c^3} \propto r^2 \omega^4.$$

Для двух зарядов, вращающихся по орбитам с разными частотами, интенсивности (мощности) складываются:

$$\langle J' \rangle \propto a^2 \omega_1^4 + b^2 \omega_2^4 = a^2 \omega_1^4 + b^2 \left(\omega_1 \frac{a}{b} \right)^4 = \omega_1^4 a^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Для двух зарядов, вращающихся по орбитам с равными частотами, складываются поля:

$$\langle J'' \rangle \propto (a\omega^2 + b\omega^2)^2 = \omega_1^4 (a + b)^2,$$

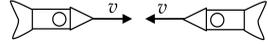
откуда искомое отношение

$$\frac{\langle J'' \rangle}{\langle J' \rangle} = \frac{(a + b)^2}{a^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} = \frac{\left(1 + \frac{b}{a} \right)^2}{1 + \frac{a^2}{b^2}}. \quad (1)$$

Полученный результат неприменим к случаю $a = b$, когда $\langle J' \rangle$ должна рассчитываться так же, как и $\langle J'' \rangle$ (через сложение полей, а не интенсивностей). В то же время при сколь угодно близких, но не равных a и b , формула (1) продолжает работать.

Решение задачи 6Способ 1.

Частота излучения от левого корабля, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета, находится по формуле продольного Доплер-эффекта:



$$\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

В системе отсчета, связанной с правым кораблем, это излучение будет восприниматься с частотой, равной

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \omega_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Способ 2.

В системе отсчета правого корабля источник излучения движется к нему навстречу с относительной скоростью:

$$v' = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}, \quad \beta' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

Тогда в этой системе наблюдаемая частота определяется как

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta'}{1 - \beta'}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2 + 2\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta}} = \omega_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Решение задачи 7

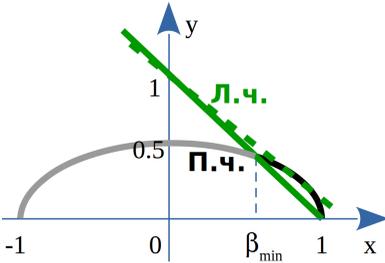
Интенсивность в точке P станет равной нулю, когда отверстие займет две зоны Френеля. Число зон (параметр Френеля) равно

$$n = \frac{D^2}{\lambda_n z_p}.$$

Отсюда видно, что длина волны должна стать вдвое меньше первоначальной. Тогда условие на частоту:

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta \cos \theta) = \frac{\omega}{2}, \quad (1)$$

где ω и ω' – частоты излучения в лабораторной и сопутствующей системах соответственно, β – безразмерная скорость источника, θ – угол между скоростью источника и направлением наблюдения.



Чтобы определить θ , для которого возможно удовлетворить уравнению (1) при минимальной β , перепишем уравнение в виде:

$$1 - \beta \cos \theta = \frac{1}{2\gamma}$$

и применим графический метод. Правая часть как функция β представляет собой дугу эллипса $4y^2 + x^2 = 1$, левая – прямую $y = 1 - x \cos \theta$, наклон которой определяется значением $\cos \theta$. Поскольку излучение приходит слева, то $0 \leq \cos \theta \leq 1$. Пересечение с дугой возможно, если наклон прямой заключен между положениями, показанными сплошной и пунктирной зелеными линиями. При этом участок дуги эллипса, где возможно пересечение, показан черным цветом. Видно, что $\beta > 0$, а ее минимальное абсолютное значение отвечает условию $\cos \theta = 1$. Это означает, что имеет место продольный эффект Доплера. Для сближающихся объектов

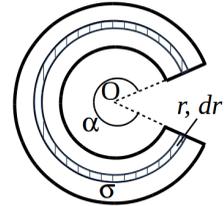
$$\frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = 2, \text{ откуда } \beta = \frac{3}{5}.$$

2016/2017 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Пусть внутренний радиус сектора кольца равен a , внешний – $b = a + w$. Выделим на заряженной фигуре элементарную область радиуса r толщиной dr (см. рисунок). Элементарная область создает в точке O потенциал



$$d\varphi_0 = \frac{dq}{r} = \frac{\sigma \alpha r dr}{r} = \alpha \sigma dr.$$

Согласно принципу суперпозиции полный потенциал получим интегрированием по r :

$$\varphi_0 = \int_a^b \alpha \sigma dr + \text{const} = \alpha \sigma (b - a) + \text{const} = \alpha \sigma w + \text{const}.$$

При этом потенциал на бесконечности равен

$$\varphi(\infty) = \frac{q}{r} + \text{const} = \text{const},$$

где q – полный заряд заряженной системы и учтено, что для бесконечно удаленной точки любая ограниченная в пространстве заряженная система эквивалентна точечному заряду.

С другой стороны по условию

$$\varphi(\infty) = 0,$$

откуда $\text{const} = 0$ и

$$\varphi_0 = \alpha \sigma w.$$

Решение задачи 2

На больших расстояниях основной вклад в потенциал дают полный заряд Q и полный дипольный момент \mathbf{d} системы:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}.$$

Поэтому, во-первых, величина заряда q должна удовлетворять условию

$$Q = q_1 + q_2 + q = 0,$$

откуда $q = -(q_1 + q_2)$.

Во-вторых, положение точечного заряда q должно удовлетворять условиям

$$d_x = 0 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + x \cdot q = 0,$$

$$d_y = y_1 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + y \cdot q = 0,$$

$$d_z = 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + z \cdot q = 0,$$

откуда

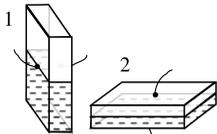
$$x = -\frac{x_2 \cdot q_2}{-(q_1 + q_2)} = \frac{x_2 \cdot q_2}{q_1 + q_2},$$

$$y = -\frac{y_1 \cdot q_1}{-(q_1 + q_2)} = \frac{y_1 \cdot q_1}{q_1 + q_2},$$

$$z = 0.$$

Нетрудно убедиться, что все три заряда оказываются лежащими на одной прямой.

Решение задачи 3



Рассмотрим геометрию конденсатора, показанную на рисунке 1. Пусть на электроды нанесены заряды $\pm Q$. На основной части площади пластин, вдали от краев конденсатора работает модель поля между двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями. Решение $\varphi(z) = U - \frac{U}{d}z$ удовлетворяет

уравнению Лапласа и граничным условиям $\varphi(0) = U$, $\varphi(d) = 0$. Тогда по теореме единственности это решение является верным. Отсутствие связанных зарядов на границе “вакуум-диэлектрик” и в объеме диэлектрика согласуется с этим решением, поэтому использование уравнения Лапласа оправдано. Тогда силовые линии напряженности электрического поля прямые, ориентированы по нормали к пластинам, и ее величина определяется выражением

$$E = \frac{U}{d},$$

где U – напряжение между пластинами конденсатора, d – расстояние между ними.

Для электрической индукции имеем

$$D_1 = E = \frac{U}{d} \text{ в вакууме,}$$

$$D_2 = \varepsilon E = \frac{\varepsilon U}{d} \text{ в диэлектрике.}$$

Заряд на пластинах характеризуется поверхностной плотностью свободных зарядов, удовлетворяющей соотношению

$$D_{1,2} = 4\pi\sigma_{1,2}.$$

Абсолютная величина заряда

$$Q = \sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \frac{U}{4\pi d} \frac{S}{2} (1 + \varepsilon).$$

Емкость

$$C_I = \frac{Q}{U} = \frac{S}{8\pi d} (1 + \varepsilon).$$

Для геометрии конденсатора, показанной на рис. 2, силовые линии поля вдали от краев также прямые и ориентированы по

нормали к плоскости пластин. Поэтому вектор электрической индукции однороден на всем промежутке между пластинами. Тогда имеем

$$E = D \text{ в вакууме,}$$

$$E_\varepsilon = \frac{D}{\varepsilon} \text{ в диэлектрике.}$$

Напряжение между пластинами выражается как

$$U = \frac{d}{2}D + \frac{dD}{2\varepsilon} = \frac{d \cdot D(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

С другой стороны

$$D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi Q}{S}.$$

Тогда напряжение равно

$$U = \frac{4\pi Qd(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon S},$$

а емкость

$$C_{II} = \frac{Q}{U} = \frac{2\varepsilon S}{4\pi d(1 + \varepsilon)}.$$

Таким образом, емкости в двух геометриях относятся как

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{S(1 + \varepsilon)}{8\pi d} \frac{4\pi d(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon S} = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{4\varepsilon} = \frac{4}{3},$$

откуда $\varepsilon = 3$.

Решение задачи 4

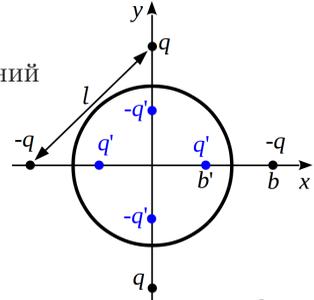
С учетом зарядов, индуцированных на поверхности сферы, потенциал за пределами сферы можно искать как суперпозицию потенциалов, создаваемых самими точечными зарядами вместе с их

зарядами-изображениями (см. рисунок).

Величина и положения зарядов-изображений задаются следующими параметрами:

$$b' = \frac{a^2}{b},$$

$$q' = \pm \frac{a}{b} q.$$



Заряд-изображение в центре сферы равен нулю, поскольку сфера в целом нейтральна. Тогда и полный заряд системы равен нулю. Полный дипольный момент системы также равен нулю.

Вычислим компоненты тензора квадрупольных моментов системы:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= q \cdot (b^2 - 3b^2) - q \cdot (-3b^2) + q \cdot (b^2 - 3b^2) - q \cdot (-3b^2) + \\ &+ q' \cdot (b^2 - 3b^2) - q' \cdot (-3b^2) + q' \cdot (b^2 - 3b^2) - q' \cdot (-3b^2) = \\ &= 2q \left(b^2 - \frac{a}{b} \left(\frac{a^2}{b} \right)^2 \right) = 2q \left(b^2 - \frac{a^5}{b^3} \right), \end{aligned}$$

$$D_{yy} = -2q(b^2 - 3b^2) - 2q \cdot 3b^2,$$

$$D_{zz} = -(D_{xx} + D_{yy}) = 0,$$

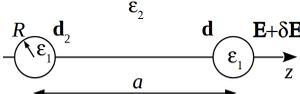
$$D_{ij} = 0 \text{ для всех } i \neq j.$$

На больших расстояниях имеем потенциал квадруполья:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2}{2r^5} = q \left(b^2 - \frac{a^5}{b^3} \right) \frac{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{r^5} = \\ &= q \left(b^2 - \frac{a^5}{b^3} \right) \frac{\sin^2 \theta \cos 2\alpha}{r^3}. \end{aligned}$$

Решение задачи 5

Дипольный момент, приобретаемый одним диэлектрическим шаром во внешнем поле \mathbf{E} , равен (см. задачу P.22. из [1])



$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 \mathbf{E}$$

Будем считать, что поднесенный шар приобретает такой же момент $\mathbf{d}_2 \approx \mathbf{d}$ (то есть пренебрежем добавкой к этому моменту со стороны первого шара). Тогда дополнительное поле, которое наводит этот шар в центре второго шара, равно *

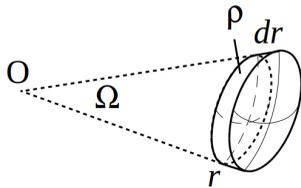
$$\delta \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{d}_2}{a^3} + 3\frac{d_2 a \cdot \mathbf{a}}{a^5} \mathbf{e}_z = 2\frac{d}{a^3} \mathbf{e}_z = 2\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{R^3}{a^3} \mathbf{E}.$$

Добавка к дипольному моменту шара

$$\delta \mathbf{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 \delta \mathbf{E} = 2\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 \frac{d}{a^3} \mathbf{e}_z = 2\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right)^2 \frac{R^6}{a^3} \mathbf{E}.$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1



Выделим на теле элемента объема, ограниченный радиусами r и $r + dr$. Заряд, сосредоточенный в элементе объема, создает в точке O потенциал

$$d\varphi_0 = \frac{dq}{r} = \frac{\rho \Omega r^2 dr}{r} = \Omega \rho r dr.$$

Согласно принципу суперпозиции полный потенциал получим интегрированием по r :

$$\varphi_0 = \int_a^b \Omega \rho r dr + \text{const} = \Omega \rho \frac{b^2 - a^2}{2} + \text{const}.$$

* Видно, что $\frac{\delta E}{E} \sim \frac{R^3}{a^3} \ll 1$, поэтому приближение $\mathbf{d}_2 \approx \mathbf{d}$ оправдано.

При этом потенциал на бесконечности равен

$$\varphi(\infty) = \frac{q}{r} + \text{const} = \text{const},$$

где q – полный заряд заряженной системы и учтено, что для бесконечно удаленной точки любая ограниченная в пространстве заряженная система эквивалентна точечному заряду.

С другой стороны по условию

$$\varphi(\infty) = 0,$$

откуда $\text{const} = 0$ и

$$\varphi_0 = \Omega \rho \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Решение задачи 2

На больших расстояниях основной вклад в потенциал дают полный заряд Q и полный дипольный момент \mathbf{d} системы:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}.$$

Поэтому, во-первых, величина заряда q должна удовлетворять условию

$$Q = q_1 + q_2 + q = 0,$$

откуда $q = -(q_1 + q_2)$.

Во-вторых, положение точечного заряда q должно удовлетворять условиям

$$d_x = x_1 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + x \cdot q = 0,$$

$$d_y = 0 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y \cdot q = 0,$$

$$d_z = 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + z \cdot q = 0,$$

откуда

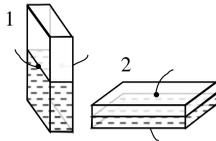
$$x = -\frac{x_1 \cdot q_1}{-(q_1 + q_2)} = \frac{x_1 \cdot q_1}{q_1 + q_2},$$

$$y = -\frac{y_2 \cdot q_2}{-(q_1 + q_2)} = \frac{y_2 \cdot q_2}{q_1 + q_2},$$

$$z = 0.$$

Нетрудно убедиться, что все три заряда оказываются лежащими на одной прямой.

Решение задачи 3



См. решение задачи 3 КР1.1 вар.1 на стр.

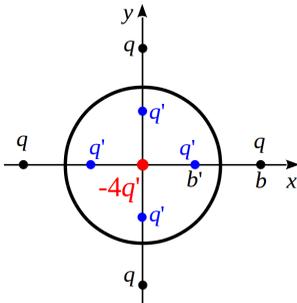
250:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{(1 + \epsilon)^2}{4\epsilon} = \frac{9}{8},$$

откуда $\epsilon = 2$.

Решение задачи 4

Изменение потенциала обусловлено поляризацией сферы, которое описывается четырьмя точечными зарядами-изображениями q' и одним точечным зарядом-изображением $-4q'$ в центре сферы (см. рисунок). Величина и положения зарядов-изображений задаются следующими параметрами:



$$b' = \frac{a^2}{b},$$

$$q' = -\frac{a}{b}q.$$

Суммарный заряд системы зарядов-изображений и их дипольный момент равны нулю. Вычислим компоненты тен-

зона квадрупольных моментов системы зарядов-изображений:

$$D_{xx} = 2q' \cdot (b'^2 - 3b'^2) - q' \cdot 3b'^2 = -7q'b'^2 = 7q\frac{a}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7\frac{a^5}{b^3}q,$$

$$D_{yy} = D_{xx} = 7\frac{a^5}{b^3}q,$$

$$D_{zz} = -(D_{xx} + D_{yy}) = -14\frac{a^5}{b^3}q,$$

$$D_{ij} = 0 \text{ для всех } i \neq j.$$

Искомое изменение потенциала записывается в виде квадрупольного разложения:

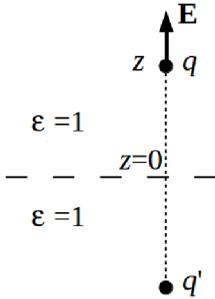
$$\begin{aligned} \delta\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2 + D_{zz}z^2}{2r^5} = \frac{7qa^5}{2b^3} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5} = \\ &= \frac{7qa^5}{2b^3} \cdot \frac{r^2(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)}{r^5} = \frac{7qa^5(1-3\cos^2\theta)}{2b^3r^3}. \end{aligned}$$

Подставляя $b = \frac{l}{\sqrt{2}}$, получим:

$$\delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{7\sqrt{2}qa^5(1-3\cos^2\theta)}{l^3r^3}.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1



Внешнее поле, в котором находится точечный заряд, определяется стандартным методом изображений и равно (см. вспомогательный рисунок, где $q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} q$)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{q}{(2z)^2} \mathbf{e}_z,$$

где z – расстояние от точечного заряда до плоской границы раздела.

Действующая на заряд внешняя сила равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{q^2}{4z^2} \mathbf{e}_z.$$

Работа сил поля на перемещении заряда из точки В в точку А равна *

$$A = \int_{z_B}^{z_A} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = - \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{q^2}{4z} \Big|_b^a = \frac{\epsilon - 1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{b - a}{4ab} q^2.$$

Работа внешней силы на этом перемещении противоположна по знаку работе сил поля.

* Работа сил поля оказывается вдвое меньше разности энергий $U = \frac{qq'}{r}$ взаимодействия заряда со своим изображением. При этом U рассчитывается как потенциальная энергия заряда q в поле неподвижного заряда q' . На самом деле работа на перемещении заряда q включает в себя также и работу на изменении распределения связанных зарядов на границе раздела. Последняя противоположна по знаку разности энергий ΔU и поэтому вычитается из нее.

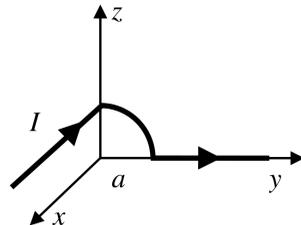
Решение задачи 2

Участок провода, параллельный оси x , наводит половину поля бесконечного прямого провода с током:

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{I}{ca} \mathbf{e}_y.$$

Участок в виде дуги наводит четверть поля кругового кольца с током:

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{\pi I}{2ca} \mathbf{e}_x.$$



Участок провода, лежащий на оси y , не дает вклада в поле. Суммарное поле равно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = -\frac{\pi I}{2ca} \mathbf{e}_x - \frac{I}{ca} \mathbf{e}_y.$$

Решение задачи 3

Рассчитаем полный заряд, падающий в единицу времени на площадку сечением S :

$$I(S) = S \cdot j = \pi r^2 j = \pi a^2 \sin^2 \theta j.$$

Из непрерывности тока следует, что линейная плотность тока $i(\theta)$ по верхней полусфере задается условием

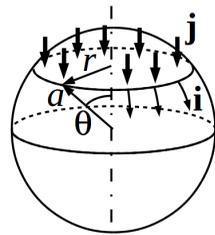
$$\pi a^2 \sin^2 \theta j = 2\pi r i(\theta),$$

откуда

$$i(\theta) = \frac{\pi a^2 \sin^2 \theta j}{2\pi r} = \frac{a^2 \sin^2 \theta j}{2a \sin \theta} = \frac{ja \sin \theta}{2} = \frac{Ia \sin \theta}{2\pi a^2} = \frac{I \sin \theta}{2\pi a}.$$

На нижней полусфере ток I равномерно распределяется по “параллели”, положение и длина которой задается углом θ :

$$I = 2\pi r i(\theta) = 2\pi a \sin \theta i(\theta),$$

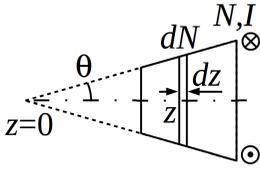


откуда

$$i(\theta) = \frac{I}{2\pi a \sin \theta}$$

(линейная плотность тока всюду имеет только θ -компоненту).

Решение задачи 4



Пусть ось z совпадает с осью конуса, а ее начало лежит в его вершине. Тогда в интервале dz содержится $\frac{\text{tg } \theta dz}{b-a} N$ витков радиуса $R(z) = z \text{tg } \theta$. Элементарный магнитный момент составляет

$$dm_z = -\frac{I\pi z^2 \text{tg}^2 \theta}{c} \cdot \frac{\text{tg } \theta dz}{b-a} N = -\frac{\pi I N \text{tg}^3 \theta z^2 dz}{c(b-a)},$$

а полный

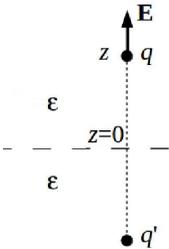
$$m_z = -\frac{\pi I N \text{tg}^3 \theta}{c(b-a)} \int_{a \text{ctg } \theta}^{b \text{ctg } \theta} z^2 dz = -\frac{\pi I N \text{tg}^3 \theta \text{ctg}^3 \theta (b^3 - a^3)}{3c(b-a)} = -\frac{\pi I N (b^2 + ab + a^2)}{3c}.$$

На больших расстояниях имеем поле магнитного диполя:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = \frac{m_z}{r^3} \mathbf{e}_z - 3\frac{m_z z}{r^4} \mathbf{e}_r.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1



Внешнее поле, в котором находится точечный заряд, определяется стандартным методом изображений (см. вспомогательный рисунок, где $q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q = \frac{\epsilon - 1}{1 + \epsilon} q$) и равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon(\epsilon + 1)} \cdot \frac{q}{(2z)^2} \mathbf{e}_z,$$

где z – расстояние от точечного заряда до плоской границы раздела.

Действующая на заряд внешняя сила равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \cdot \frac{q^2}{4z^2} \mathbf{e}_z.$$

Работа сил поля на перемещении заряда из точки В в точку А равна

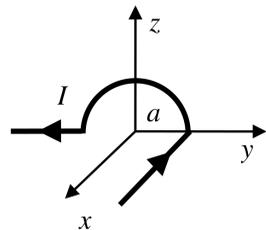
$$A = \int_{z_B}^{z_A} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = - \frac{\varepsilon - 1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{q^2}{4\varepsilon z} \Big|_b^a = - \frac{\varepsilon - 1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{b - a}{4\varepsilon ab} q^2.$$

Работа внешней силы на этом перемещении противоположна по знаку работе сил поля.

Решение задачи 2

Участок провода, параллельный оси x , наводит половину поля бесконечного прямого провода с током:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I}{ca} \mathbf{e}_z.$$



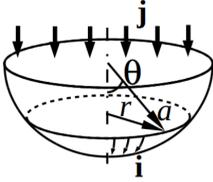
Участок в виде дуги наводит половину поля кругового кольца с током:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_x.$$

Участок провода, лежащий на оси y , не дает вклада в поле. Суммарное поле равно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{\pi I}{ca} \mathbf{e}_x + \frac{I}{ca} \mathbf{e}_z.$$

Решение задачи 3



Ток, измеряемый амперметром, равен заряду, падающему в единицу времени на круг радиуса a . Рассмотрим окружность радиуса $r < a$. Заряд, попадающий в единицу времени на полусферу за пределами этой окружности, равен току, протекающему через окружность:

$$j \cdot (\pi a^2 - \pi r^2) = 2\pi r i(r).$$

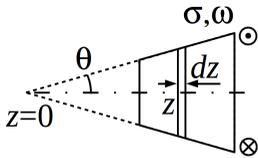
Учтем, что $r = a \sin \theta$ и $j = \frac{I}{\pi a^2}$:

$$\frac{I}{\pi a^2} \cdot (\pi a^2 - \pi a^2 \sin^2 \theta) = 2\pi a \sin \theta i(\theta),$$

откуда

$$i(\theta) = \frac{I \cos^2 \theta}{2\pi a \sin \theta}.$$

Решение задачи 4



Пусть ось z совпадает с осью конуса, а ее начало лежит в его вершине. Тогда боковая поверхность конуса в интервале dz вблизи точки z содержит заряд, равный

$$dq = 2\pi z \operatorname{tg} \theta \frac{dz}{\cos \theta} \sigma.$$

Эквивалентный ток по элементу боковой поверхности, возникающий при вращении конуса, равен

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos \theta} \sigma \omega z dz.$$

Соответствующий элементарный магнитный момент:

$$dm_z = \frac{dI \pi z^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{c} = \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{c \cos \theta} \sigma \omega z^3 dz,$$

а полный

$$m_z = \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{c \cos \theta} \sigma \omega \int_{a \operatorname{ctg} \theta}^{b \operatorname{ctg} \theta} z^3 dz = \frac{\operatorname{tg}^3 \theta \operatorname{ctg}^4 \theta}{4c \cos \theta} \sigma \omega (b^4 - a^4) = \frac{\sigma \omega (b^4 - a^4)}{4c \sin \theta}.$$

На больших расстояниях имеем поле магнитного диполя:

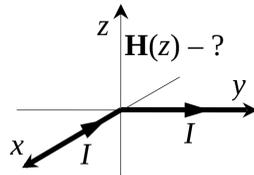
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{m_z}{r^3} \mathbf{e}_z + 3\frac{m_z z}{r^4} \mathbf{e}_r.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Каждая полупрямая создает половину поля соответствующей бесконечной заряженной прямой:

$$\mathbf{H}(z) = \frac{I}{cz} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$



Решение задачи 2

Способ 1.

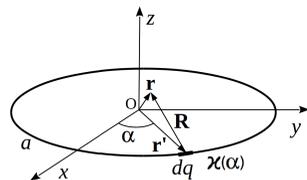
Определим полный заряд и дипольный момент кольца относительно его центра:

$$Q = \int \varkappa(\alpha) dl = \int \varkappa(\alpha) 2\pi a d\alpha = 2\pi a \varkappa_0 + 2\pi a \varkappa_1 \sin \alpha \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a \varkappa_0,$$

$$d_x = \int \varkappa(\alpha) x dl = \int_0^{2\pi} \varkappa_1 \cos \alpha \cdot a \cos \alpha d\alpha = \pi \varkappa_1 a^2, \quad d_y = 0, \quad d_z = 0.$$

Общая формула для потенциала, создаваемого кольцом в точке \mathbf{r} *:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\varkappa(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$



* Такое выражение для потенциала отвечает условию $\varphi(\infty) = 0$.

где $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$. Малыми параметрами являются x_i .

Нужно разложить по ним функцию $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. Используем формулу разложения скалярной функции от векторного аргумента:

$$f(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + (\nabla f \cdot \delta\mathbf{r}),$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0}$. В нашем случае $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}'$, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}$, $\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\mathbf{r}=0} = \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}$, ПОЭТОМУ

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r'} + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{r'^3} = \frac{1}{a} + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{a^3}.$$

Нулевой член разложения потенциала:

$$\varphi_0 = \int \frac{\varkappa(\mathbf{r}') dl'}{r'} = \frac{1}{a} \int \varkappa(\mathbf{r}') dl' = \frac{Q}{a}.$$

Для первого члена разложения потенциала имеем

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \int \varkappa(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{r'^3} dl' = \frac{1}{a^3} \int \varkappa(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dl' \cdot \mathbf{r} = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{a^3}.$$

Таким образом, искомый потенциал описывается выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{2\pi a \varkappa_0}{a} + \frac{\pi \varkappa_1 a^2 x}{a^3} = 2\pi \varkappa_0 + \frac{\pi \varkappa_1 x}{a}.$$

Способ 2.

Нулевой член разложения равен потенциалу в центре кольца:

$$\varphi_0 = \oint_{r'=a} \frac{(\varkappa_0 + \varkappa_1 \cos \alpha)}{a} a d\alpha = \frac{2\pi a \varkappa_0}{a} = 2\pi \varkappa_0.$$

Первую поправку находим как

$$\varphi_1 = -E_{0x} x,$$

где E_{0x} – поле в центре кольца (с учетом геометрии задачи это поле имеет только x -компоненту).

Вычислим E_{0x} прямым интегрированием:

$$E_{0x} = - \oint_{r'=a} \frac{(\varkappa_0 + \varkappa_1 \cos \alpha)}{a^2} \cos \alpha \cdot a d\alpha = - \frac{\pi \varkappa_1}{a}.$$

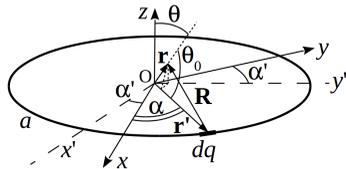
Окончательно получаем:

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx 2\pi \varkappa_0 + \frac{\pi \varkappa_1 x}{a}.$$

Способ 3.

Общая формула для потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\varkappa(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$



С учетом теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}} = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0)^{-1/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r \cos \theta_0}{a} \right). \end{aligned}$$

Пусть плоскость, в которой лежат вектор \mathbf{r} и ось z , образует с осью y угол α' . Тогда выполняется соотношение

$$\cos \theta_0 = \sin \theta \sin(\alpha + \alpha') \text{ и } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r \sin \theta \sin(\alpha + \alpha')}{a} \right).$$

Для потенциала имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \int (\varkappa_0 + \varkappa_1 \cos \alpha) \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r \sin \theta \sin(\alpha + \alpha')}{a} \right) a d\alpha = 2\pi \varkappa_0 + \frac{\pi \varkappa_1 x}{a}.$$

Решение задачи 3

Нанесем на левый и правый шарики заряды q и $-q$ соответственно. В пространстве возникнет некоторое распределение электрического поля, потекут токи, а на границе раздела появятся свободные заряды. Вклад последних в полный ток через замкнутые поверхности электродов равен нулю – это следует из теоремы Гаусса. Тогда полный ток, вытекающий из левого электрода, определится как

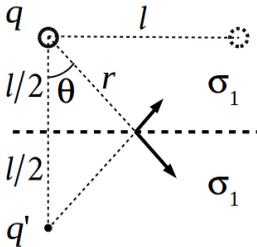
$$I = \iint j(a) dS = \iint \sigma_1 E(a) dS = \sigma_1 \frac{q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi \sigma_1 q.$$

Такой же ток будет втекать в правый электрод. Поэтому ток I можно рассматривать как текущий в электрической цепи через искомое сопротивление. Тогда сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I},$$

где U – разность потенциалов между электродами.

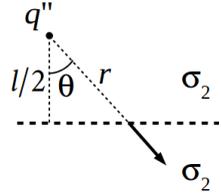
Для определения U воспользуемся принципом суперпозиции. Рассмотрим сначала только левый электрод, несущий на себе заряд q . Под действием этого заряда на границе раздела наводятся свободные заряды.



Для описания поля, формируемого свободными зарядами в верхнем полупространстве, введем заряд-изображение q' , расположенный симметрично оригиналу относительно плоскости раздела, и припишем всему пространству проводимость σ_1 (см. рисунок). Для плотности тока и поля в произвольной точке границы со стороны верхнего полупространства имеем:

$$E_{1\tau} = \frac{q}{r^2} \sin \theta + \frac{q'}{r^2} \sin \theta, \quad j_{1n} = \sigma_1 \left(\frac{q}{r^2} \cos \theta - \frac{q'}{r^2} \cos \theta \right).$$

Для описания поля, формируемого свободными зарядами в нижнем полупространстве, заменим оригинал зарядом-изображением q'' и припишем всему пространству проводимость σ_2 (см. рисунок). Для плотности тока и поля на границе со стороны нижнего полупространства имеем:



$$E_{2\tau} = \frac{q''}{r^2} \sin \theta, \quad j_{2n} = \sigma_2 \frac{q}{r^2} \cos \theta.$$

Из граничных условий $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ и $j_{1n} = j_{2n}$ получим

$$q' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} q.$$

Заряды q и q' создают на левом электроде потенциал

$$\varphi_{\text{л}} \approx \frac{q}{a} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{q}{l},$$

а в точке, совпадающей с центром правого электрода,

$$\varphi_{\text{п}} \approx \frac{q}{l} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{q}{l\sqrt{2}},$$

Разность потенциалов между электродами, формирующаяся за счет заряда на левом электроде, равна

$$U_I = \varphi_{\text{л}} - \varphi_{\text{п}} = q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{l} \right).$$

В силу симметрии задачи при нанесении на правый электрод заряда $-q$ разность потенциалов между электродами удвоится:

$$U = 2q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{l} \right).$$

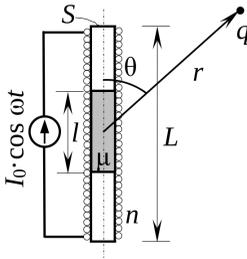
Искомое сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{l} \right) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{2}}{2l} \right).$$

Решение задачи 4

а). Магнитный момент одного витка пустого соленоида и одного витка соленоида с сердечником равны соответственно

$$\mathbf{m}_1^* = \frac{IS}{c} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{m}_2^* = \frac{\mu IS}{c} \mathbf{e}_z.$$



Полный момент соленоида находим как сумму моментов каждого витка:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m}_1^* n(L-l) + \mathbf{m}_2^* nl = \\ &= \left(\frac{nIS}{c}(L-l) + \frac{\mu nISl}{c} \right) \mathbf{e}_z = \frac{nIS(L+(\mu-1)l)}{c} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

б). На больших расстояниях от сердечника имеем вектор-потенциал магнитного диполя:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\mathbf{m}(t) \times \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{nI(t)S(L+(\mu-1)l) \sin \theta}{cr^2} \mathbf{e}_\alpha.$$

в). Электрическое поле переменного магнитного диполя вычисляем по формуле *

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} = -\frac{nI(t)S(L+(\mu-1)l) \omega \sin \theta}{c^2 r^2} \mathbf{e}_\alpha.$$

* Если уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t}$ переписать как

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} \right) = 0,$$

то получим решение для \mathbf{E} в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} - \nabla \phi,$$

где ϕ – произвольная скалярная функция пространственных координат. В отсутствие пространственных зарядов $\nabla \phi = 0$. Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t}.$$

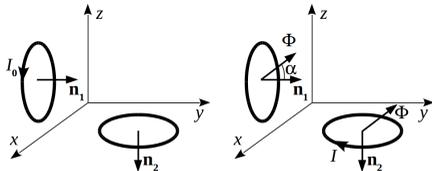
Сила на заряд q вдали от зазора равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{nqI(t)S(L + (\mu - 1))\omega \sin \theta}{c^2 r^2} \mathbf{e}_\alpha.$$

Решение задачи 5

По закону сохранения магнитного потока через первый и второй витки:

$$\frac{LI_0}{c} = \frac{L'I}{c} + \Phi_0 \cos \alpha \quad (1)$$



$$\frac{L'I_0}{c} = \frac{LI}{c} - \Phi_0 \sin \alpha \quad (2)$$

Умножив (1) на $\sin \alpha$, а (2) — на $\cos \alpha$ и вычтя одно из другого, выразим искомую L' :

$$L' = \frac{I \cdot \cos \alpha - I_0 \cdot \sin \alpha}{I_0 \cdot \cos \alpha - I \cdot \sin \alpha} \cdot L.$$

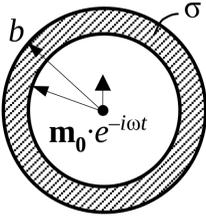
Примечание: С учетом условия $0 < L' \leq 1$ при заданных I_0 и α имеется ограниченный интервал допустимых значений I :

$$I_{min/max} = I_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad I_{max/min} = I_0.$$

Если I оказался за пределами этого интервала, значит, нужно искать ошибку в измерениях.

В частности, при $\alpha = 45^\circ$ $I = I_0$, какой бы ни была L' . Определить L' в этом случае с помощью описанного эксперимента невозможно.

Решение задачи 6



Рассмотрим круглый контур, расположенный на расстоянии r от центра, на угловом расстоянии θ от оси (направленной вдоль магнитного момента). Вектор-потенциал в этом контуре равен:

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = \frac{[\mathbf{m}(t) \times \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{m(t)}{r^2} \cdot \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\alpha.$$

Вихревое электрическое поле в данном контуре:

$$\mathbf{E}(r, \theta, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\dot{m}(t)}{cr^2} \cdot \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\alpha$$

Мощность тепловыделения находится интегрированием по объему сферического слоя:

$$\begin{aligned} P &= \iiint \sigma \langle \mathbf{E}^2(r, \theta) \rangle_t dV = \int_a^b \int_0^\pi \sigma \frac{\langle \dot{m}^2 \rangle_t}{c^2 r^4} \sin^2 \theta \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \\ &= \frac{2\pi\sigma\omega^2 m_0^2}{c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \end{aligned}$$

здесь множитель $1/2$ получается в результате усреднения по времени, $4/3$ — в результате интегрирования $\sin^3 \theta$.

Ответ: $\bar{P} = \frac{4\pi\sigma\omega^2 m_0^2}{3c^2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$

Решение задачи 7

В исходном состоянии (бусинка на бесконечном расстоянии от контура) магнитный поток через контур равен нулю. В конечном (бусинка в точке A) — поток от бусинки $\Phi = \oint \mathbf{A} d\ell$ компенсируется потоком $\frac{LI}{c}$, возникающим от индуцируемого в контуре тока. Векторный потенциал бусинки направлен вдоль контура и равен

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad A = \frac{ma}{r^3}.$$

Здесь \mathbf{r} – вектор, направленный от бусинки в некоторую точку на контуре. Таким образом, ток в контуре равен

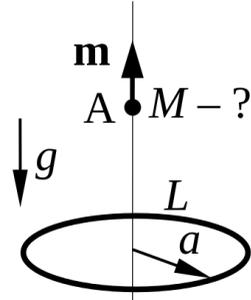
$$I = \frac{2\pi c m a^2}{L r^3}.$$

Создаваемое им магнитное поле в точке А равно

$$H = \frac{2\pi I a^2}{c r^3} = \frac{4\pi^2 m a^4}{L r^6}.$$

Магнитная сила $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mH})$, действующая на бусинку, направлена вверх и равна

$$F = \frac{24\pi^2 m^2 a^4}{L r^8} z = \frac{24\pi^2 m^2}{L a^3} \cdot \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^4}.$$



Здесь z -расстояние от бусинки до центра контура, $\xi = z/a$.

Бусинка движется вверх, если $F > Mg$ или вверх, если $F < Mg$.

Функция $\frac{\xi}{(1+\xi^2)^4}$ равна нулю при $\xi = 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Ее максимум имеет место при $\xi = 1/\sqrt{7}$. Таким образом, магнитная сила, удерживающая бусинку имеет максимум

$$F_{max} = \frac{3 \cdot 7^{7/2} \pi^2 m^2}{2^9 L a^3}.$$

Условие $Mg > F_{max}$ означает, что бусинка упадет при любом положении точки А. В противном случае возможны варианты.

$$M_{min} = \frac{3 \cdot 7^{7/2} \pi^2 m^2}{2^9 L a^3 g}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

При отражении ТЕ-волны от оптически менее плотной среды сдвига по фазе не происходит. Поэтому граничное условие имеет вид

$$E_0 + E_1 = E_2. \quad (1)$$

Разделим обе части уравнения на E_0 :

$$1 + \frac{E_1}{E_0} = \frac{E_2}{E_0}. \quad (2)$$

Теперь учтем, что коэффициенты отражения по мощности и по амплитуде связаны соотношением

$$R = \frac{E_1^2}{E_0^2}, \quad (3)$$

откуда получим

$$\frac{E_2}{E_0} = 1 + \sqrt{R}.$$

Решение задачи 2

Поляризованную по кругу волну можно представить в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн одинаковой амплитуды (сдвиг по фазе на $\frac{\pi}{2}$ для данной задачи не существен). Поскольку эти волны не интерферируют, то интенсивность падающей волны равна сумме интенсивностей каждой из них в отдельности. При падении под углом Брюстера в отражении ТМ-волны нет. Тогда для коэффициента отражения по интенсивности имеем

$$R = \frac{I_{TE1}}{I_{TE0} + I_{TM0}} = \frac{I_{TE1}}{2I_{TE0}} = \frac{1}{8}.$$

Отсюда коэффициент отражения ТЕ-волны по интенсивности равен

$$R_{TE} = \frac{I_{TE1}}{I_{TE0}} = \frac{1}{4},$$

а по амплитуде с учетом сдвига по фазе на π при отражении

$$\xi_{TE} = -\sqrt{R_{TE}} = -\frac{1}{2}.$$

С другой стороны

$$\xi_{TE} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}.$$

Учтем, что для $\theta_0 = \theta_{\text{Бр}}$ выполняется равенство $\theta_0 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\xi_{TE} = -\sin(\theta_0 - \theta_2) = -\sin(2\theta_0 - \frac{\pi}{2}) = \cos 2\theta_0 = -\frac{1}{2},$$

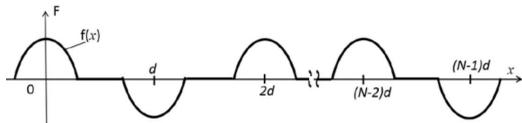
откуда $\theta_0 = \theta_{\text{Бр}} = \frac{\pi}{3}$, а показатель преломления диэлектрика $n = \text{tg } \theta_{\text{Бр}} = \sqrt{3}$.

Коэффициент отражения при нормальном падении равен

$$R_N = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Решение задачи 3

С учетом теоремы о сдвиге фурье-образы последующего и предыдущего импульсов отлича-



ются множителем $q = -e^{ikd}$. Тогда суммарный фурье-образ равен сумме членов геометрической прогрессии:

$$\tilde{F}(k) = \tilde{f}(k) \frac{1-q^N}{1-q} = \tilde{f}(k) \frac{1-(-1)^N e^{iNkd}}{1+e^{ikd}}.$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного N .

I. N четно:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k) &= \tilde{f}(k) \frac{1-e^{iNkd}}{1+e^{ikd}} = \tilde{f}(k) \frac{e^{i\frac{k d N}{2}}}{e^{i\frac{k d}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{N k d}{2}} - e^{i\frac{N k d}{2}}}{e^{-i\frac{k d}{2}} + e^{i\frac{k d}{2}}} = \\ &= -i \tilde{f}(k) e^{i\frac{k d (N-1)}{2}} \frac{\sin \frac{N k d}{2}}{\cos \frac{k d}{2}}. \end{aligned}$$

II. N нечетно:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(k) &= \tilde{f}(k) \frac{1+e^{iNkd}}{1+e^{ikd}} = \tilde{f}(k) \frac{e^{-i\frac{k d N}{2}}}{e^{-i\frac{k d}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{Nkd}{2}} + e^{i\frac{Nkd}{2}}}{e^{-i\frac{k d}{2}} + e^{i\frac{k d}{2}}} = \\ &= \tilde{f}(k) e^{-i\frac{k d(N-1)}{2}} \frac{\cos \frac{Nkd}{2}}{\cos \frac{k d}{2}}.\end{aligned}$$

Решение задачи 4

Воспользуемся выражением для групповой скорости волны в волноводе:

$$v_g(\omega^*) = \frac{c^2 k_z}{\omega^*} = \frac{c \sqrt{\omega^{*2} - \omega_{min}^2}}{\omega^*}.$$

В случае lm -волны $\omega_{min}^2 = c^2 \left(\left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right)$. Поэтому, в соответствии с условием задачи,

$$\omega^{*2} = \omega_{11min}^2 = c^2 \left(\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right),$$

$$\omega_{10min}^2 = c^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \quad \omega^{*2} - \omega_{10min}^2 = c^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2,$$

$$\omega_{01min}^2 = c^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2, \quad \omega^{*2} - \omega_{01min}^2 = c^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2.$$

Получаем:

$$v_{g10}(\omega^*) = \frac{c \frac{\pi}{b}}{\omega^*}, \quad v_{g01}(\omega^*) = \frac{c \frac{\pi}{a}}{\omega^*}, \quad \frac{v_{g10}}{v_{g01}} = \frac{a}{b}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

При отражении ТЕ-волны от оптически более плотной среды возникает сдвиг по фазе на π . Поэтому граничное условие имеет вид

$$E_0 - E_1 = E_2. \quad (1)$$

Разделим обе части уравнения на E_0 :

$$1 - \frac{E_1}{E_0} = \frac{E_2}{E_0}. \quad (2)$$

Теперь учтем, что коэффициенты отражения по мощности и по амплитуде связаны соотношением

$$R = \frac{E_1^2}{E_0^2}. \quad (3)$$

Тогда

$$d = \frac{E_2}{E_0} = 1 - \sqrt{R},$$

откуда $R = (1 - d)^2$, а искомый коэффициент пропускания по мощности

$$T = 1 - R = 1 - (1 - d)^2 = 2d - d^2.$$

Решение задачи 2

Как и в задаче 1-го вар., коэффициент отражения ТЕ-волны по интенсивности равен

$$R_{TE} = \frac{I_{TE1}}{I_{TE0}} = \frac{1}{4},$$

а по амплитуде

$$\xi_{TE} = \sqrt{R_{TE}} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны

$$\xi_{TE} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}.$$

С учетом равенства $\theta_0 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$:

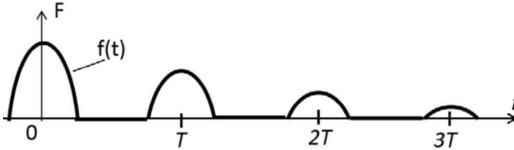
$$\xi_{TE} = -\sin(\theta_0 - \theta_2) = -\sin(2\theta_0 - \frac{\pi}{2}) = \cos 2\theta_0 = \frac{1}{2},$$

откуда $\theta_0 = \theta_{\text{Бр}} = \frac{\pi}{6}$, а отношение показателей преломления диэлектриков $\frac{n_2}{n_1} = \text{tg } \theta_{\text{Бр}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Угол полного внутреннего отражения находим из соотношения

$$\sin \theta_{\text{по}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta_{\text{по}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение задачи 3



С учетом теоремы о сдвиге фурье-образы последующего и предыдущего импульсов отличаются множителем

$q = \frac{1}{2} e^{ikd}$. Тогда суммарный фурье-образ равен сумме членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$\tilde{F}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{1 - q} = \frac{\tilde{f}(k)}{1 - 0.5 e^{ikd}} = \frac{2\tilde{f}(k)}{2 - e^{ikd}}.$$

Решение задачи 4

С учетом соотношения

$$v_{\Gamma} = \frac{c^2}{v_{\Phi}}$$

искомое отношение фазовых скоростей обратно отношению групповых (см. решение задачи 4 вар. 1 на стр. 274)

$$\frac{v_{\Phi 10}}{v_{\Phi 01}} = \frac{b}{a}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1**Решение задачи 1**

В процессе перемещения экрана увеличивается на единицу число m зон Френеля для точки наблюдения, укладываемое в отверстие. Внешний радиус зоны Френеля задается формулой

$$\rho_m^2 = m\lambda z_p.$$

По условию задачи имеем

$$\rho_{m+1}^2 = (m+1)\lambda z_{p1},$$

$$\rho_m^2 = m\lambda z_{p0},$$

$$\frac{m}{m+1} = \frac{z_{p1}}{z_{p0}} = \frac{3}{4} \rightarrow m = 3.$$

Теперь находим диаметр отверстия

$$a = 2\rho_m = 2\sqrt{m\lambda z_{p0}} = 2\sqrt{3\lambda L}.$$

Решение задачи 2

Матрица оптической системы (тонкой линзы) в нашем случае получается перемножением двух матриц преломления:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n_L}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_L-n}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n_L-(n+1)}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{24} & 1 \end{pmatrix}$$

Способ 1.

Выражение для расстояния до изображения для случая, когда оптическая система находится в воздухе (см. [6], стр. 93 - в других обозначениях):

$$\tilde{d}_2 = -\frac{\tilde{d}_1 m_{11} + m_{12}}{\tilde{d}_1 m_{21} + m_{22}}$$

(\tilde{d}_1 отсчитывается от линзы в сторону воды, а \tilde{d}_2 – воздуха).

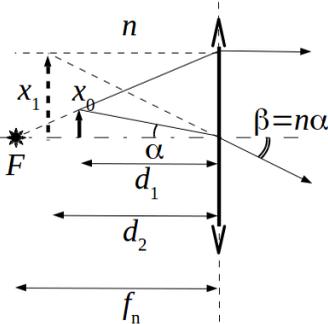
Поскольку при этом \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 входят в выражения как элементы матрицы пустого промежутка, то в нашем случае в уравнении нужно выполнить замену $\tilde{d}_1 \rightarrow \frac{d_1}{n}$, $\tilde{d}_2 \rightarrow d_2$, откуда получим

$$d_2 = -\frac{\frac{d_1}{n}m_{11} + m_{12}}{\frac{d_1}{n}m_{21} + m_{22}}.$$

Подставляем числа:

$$d_2 = -\frac{\frac{20 \cdot 3}{4}}{-\frac{20 \cdot 3}{4} \cdot \frac{1}{24} + 1} = -\frac{15}{-\frac{5}{8} + 1} = -15 \cdot \frac{8}{3} = -40 \text{ см.}$$

Изображение находится в воде (мнимое).



Способ 2 (геометрический).

Определим положение изображения верхней точки предмета. Оно находится на пересечении любых двух лучей (или их продолжений), исходящих из точки-оригинала. Один луч лежит на прямой, проходящей через левый фокус. На выходе из линзы справа этот луч направлен горизонтально (слева пунктиром показано его продолжение). Другой луч проходит через центр линзы. На выходе из линзы справа этот луч испытывает преломление, так что $\beta = n\alpha$. Изображение находится на продолжениях первого и второго лучей, выходящих из линзы. Видно, что изображение расположено слева от линзы.

Левое фокусное расстояние $f_n = -\frac{n}{m_{21}} = \frac{24 \cdot 4}{3} = 32$ см. Из геометрических соотношений находим увеличение:

$$K = \frac{x_1}{x_0} = \frac{f_n}{f_n - d_1} = \frac{32}{32 - 20} = \frac{8}{3}.$$

Расстояние от линзы до изображения находим из пропорции

$$\frac{x_1}{d_2} = n \frac{x_0}{d_1} \rightarrow d_2 = \frac{x_1}{n x_0} d_1 = \frac{K d_1}{n} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 20}{3 \cdot 4} = 40 \text{ см.}$$

Решение задачи 3

Отраженная волна отсутствует, если выполняются два условия:

$$\begin{aligned} \text{а). } 2dn_2 &= (2m - 1) \frac{\lambda}{2}. \\ \text{б). } n_1 n_3 &= n_2^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ – длина волны той же частоты в вакууме.

Первое условие записано с учетом того, что волны, отраженные от верхней и нижней границ, обе испытывают скачок по фазе на π , поэтому разности фаз за счет отражения не возникает. Второе соответствует условию просветленной оптики.

Тогда показатель преломления среды 2 находим из уравнения

$$2dn_2 = \frac{\lambda(2m-1)}{2} \rightarrow n_2 = \frac{\lambda(2m-1)}{4d} = \frac{400 \cdot (2m-1)}{4 \cdot 600} = \frac{2m-1}{6}. \quad (2)$$

Поскольку $n_2 > 1$, то $m > 3$. А из $n_2 < n_1 = \frac{4}{3}$ следует, что $m < 5$. Таким образом, $m = 4$ и тогда

$$n_2 = \frac{2 \cdot 4 - 1}{6} = \frac{7}{6} = 1.17, \quad n_3 = \frac{n_2^2}{n_1} = \frac{49 \cdot 3}{36 \cdot 4} = \frac{49}{48} = 1.02 \quad (3)$$

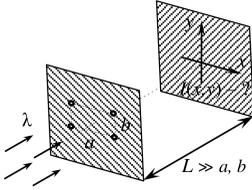
Решение задачи 4

Сначала получим некоторые общие выражения. Пусть положение отверстия на первом экране задается координатами (x_0, y_0) , а положение точки наблюдения на втором экране – (x, y) . Тогда для длины хода луча из отверстия в точку наблюдения имеем

$$r^2 = L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

$$r = \sqrt{L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = L \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{L^2}} \approx$$

$$\approx L \left(1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L^2} \right) = L + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L}.$$



Теперь пронумеруем отверстия на первом экране следующим образом:

$$(x_{01}, y_{01}) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad (x_{02}, y_{02}) = \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right),$$

$$(x_{03}, y_{03}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad (x_{04}, y_{04}) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Тогда оптические длины хода лучей из разных отверстий в точку наблюдения можно представить как

$$r_1 = r_0 + \frac{a \cdot x + b \cdot y}{2L}, \quad r_2 = r_0 + \frac{-a \cdot x + b \cdot y}{2L},$$

$$r_3 = r_0 + \frac{-a \cdot x - b \cdot y}{2L}, \quad r_4 = r_0 + \frac{a \cdot x - b \cdot y}{2L}.$$

Суммарная амплитуда волны в точке наблюдения равна

$$E(x, y) = E_0 \left(e^{i(kr_1 - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t)} + e^{i(kr_3 - \omega t)} + e^{i(kr_4 - \omega t)} \right) =$$

$$= E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(e^{ik \frac{a \cdot x + b \cdot y}{2L}} + e^{ik \frac{-a \cdot x + b \cdot y}{2L}} + e^{ik \frac{-a \cdot x - b \cdot y}{2L}} + e^{ik \frac{a \cdot x - b \cdot y}{2L}} \right) =$$

$$= E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(e^{ik \frac{a \cdot x}{2L}} \left(e^{ik \frac{b \cdot y}{2L}} + e^{-ik \frac{b \cdot y}{2L}} \right) + e^{-ik \frac{a \cdot x}{2L}} \left(e^{ik \frac{b \cdot y}{2L}} + e^{-ik \frac{b \cdot y}{2L}} \right) \right) =$$

$$= 4E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \cos \left(k \frac{a \cdot x}{2L} \right) \cos \left(k \frac{b \cdot y}{2L} \right).$$

Интенсивность волны равна:

$$I(x, y) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ E(x, y) H^*(x, y) \} = 16 \frac{c}{8\pi} E_0^2 \cos^2 \left(k \frac{a \cdot x}{2L} \right) \cos^2 \left(k \frac{b \cdot y}{2L} \right) =$$

$$= 16 I_0 \cos^2 \left(k \frac{a \cdot x}{2L} \right) \cos^2 \left(k \frac{b \cdot y}{2L} \right),$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Контрольная работа 2.2, вариант 2**Решение задачи 1**

В процессе перемещения экрана уменьшается на единицу число m зон Френеля для точки наблюдения, укладываемое в отверстие. Внешний радиус зоны Френеля задается формулой

$$\rho_m^2 = m\lambda z_p,$$

где λ – длина волны, z_p – расстояние от плоскости отверстия до точки наблюдения.

По условию задачи имеем

$$\rho_{m-1}^2 = (m-1)\lambda z_{p1},$$

$$\rho_m^2 = m\lambda z_{p0},$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{z_{p1}}{z_{p0}} = \frac{5}{4} \rightarrow m = 5.$$

Теперь находим диаметр отверстия

$$2\rho_m = 2\sqrt{m\lambda z_{p0}} = 2\sqrt{5\lambda L}.$$

Решение задачи 2

Применяем те же рассуждения, что и в задаче 2, вар. 1 (стр. 277). В матрице оптической системы формально нужно в выражении для m_{21} поменять местами $n \leftrightarrow 1$, при этом значение элемента m_{21} остается неизменным:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n_L - (n+1)}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2 \cdot 2 - \frac{7}{3}}{40} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{24} & 1 \end{pmatrix}$$

Способ 1.

Замена $\tilde{d}_1 \rightarrow d_1$, $\tilde{d}_2 \rightarrow \frac{d_2}{n}$ даст

$$\frac{d_2}{n} = -\frac{d_1 m_{11} + m_{12}}{d_1 m_{21} + m_{22}}.$$

Подставляем числа:

$$d_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{20}{-20 \cdot \frac{1}{24} + 1} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{20}{\frac{1}{6}} = -160 \text{ см.}$$

Изображение находится на оси линзы в воздухе (мнимое).

Увеличение находим по формуле

$$K = m_{11} + \frac{d_2}{n} m_{21} = 1 + \frac{160 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 - \frac{7}{3}}{40} = 1 + 5 = 6.$$

Способ 2.

Элемент m_{21} матрицы оптической системы равен $-\frac{n}{f}$, где f – фокусное расстояние в среде с показателем преломления n . Тогда уравнение тонкой линзы с учетом сделанных выше замен имеет вид

$$\frac{1}{d_1} + \frac{n}{d_2} = -m_{21},$$

откуда

$$\frac{n}{d_2} = -m_{21} - \frac{1}{d_1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{120}, \quad d_2 = -\frac{4 \cdot 120}{3} = -160 \text{ см.}$$

Решение задачи 3

Задача полностью аналогична задаче 3 вар. 1 (см. на стр. 279).

$$n_2 = (2m - 1) \frac{\lambda}{4d} = \frac{400}{4 \cdot 800} (2m - 1) = \frac{2m - 1}{8}.$$

Из условия $n_2 > 1$ следует, что $m > 4$, а из условия $n_2 < n_1 = \frac{6}{5}$ – что $m < 6$. Таким образом, $m = 5$ и тогда

$$n_2 = \frac{2 \cdot 5 - 1}{8} = \frac{9}{8} = 1.125,$$

$$n_3 = \frac{n_2^2}{n_1} = \frac{81 \cdot 5}{64 \cdot 6} = 1.055$$

Решение задачи 4

Сначала получим некоторые общие выражения. Пусть положение отверстия на первом экране задается координатами (x_0, y_0) , а положение точки наблюдения на втором экране – (x, y) . Тогда для длины хода луча из отверстия в точку наблюдения имеем

$$r^2 = L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

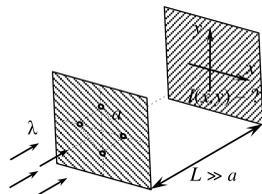
$$r = \sqrt{L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = L \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{L^2}} \approx$$

$$\approx L \left(1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L^2} \right) = L + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L}.$$

Теперь пронумеруем отверстия на первом экране следующим образом:

$$(x_{01}, y_{01}) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad (x_{02}, y_{02}) = \left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(x_{03}, y_{03}) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad (x_{04}, y_{04}) = \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$



Тогда оптические длины хода лучей из разных отверстий в точку наблюдения можно представить как

$$r_1 = r_0(x, y) + \frac{a \cdot x}{\sqrt{2}L}, \quad r_2 = r_0(x, y) + \frac{a \cdot y}{\sqrt{2}L},$$

$$r_3 = r_0(x, y) - \frac{a \cdot x}{\sqrt{2}L}, \quad r_4 = r_0(x, y) - \frac{a \cdot y}{\sqrt{2}L},$$

где $r_0(x, y) = L + \frac{x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2}{2L} = L + \frac{2x^2 + 2y^2 + a^2}{4L}$.

$$\begin{aligned}
& \text{Суммарная амплитуда волны в точке наблюдения равна} \\
E(x, y) &= E_0 \left(e^{i(kr_1 - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t)} + e^{i(kr_3 - \omega t)} + e^{i(kr_4 - \omega t)} \right) = \\
&= E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(e^{ik \frac{ax}{\sqrt{2L}}} + e^{ik \frac{ay}{\sqrt{2L}}} + e^{-ik \frac{ax}{\sqrt{2L}}} + e^{-ik \frac{ay}{\sqrt{2L}}} \right) = \\
&= 2E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(\cos \left(k \frac{ax}{\sqrt{2L}} \right) + \cos \left(k \frac{ay}{\sqrt{2L}} \right) \right) = \\
&= 4E_0 e^{i(kL - \omega t)} \cos \left(k \frac{a(x+y)}{2\sqrt{2L}} \right) \cos \left(k \frac{a(x-y)}{2\sqrt{2L}} \right).
\end{aligned}$$

Интенсивность волны равна:

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ E(x, y) H^*(x, y) \} = \\
&= 16 \frac{c}{8\pi} E_0^2 \cos^2 \left(k \frac{a(x+y)}{2\sqrt{2L}} \right) \cos^2 \left(k \frac{a(x-y)}{2\sqrt{2L}} \right) = \\
&= 16I_0 \cos^2 \left(k \frac{a(x+y)}{2\sqrt{2L}} \right) \cos^2 \left(k \frac{a(x-y)}{2\sqrt{2L}} \right),
\end{aligned}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

В системе отсчета планеты частота падающей и отраженной волн определяется по формуле продольного Доплер-эффекта:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega.$$

Частоту отраженной волны в системе корабля определяем аналогично:

$$\omega'' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega' = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \omega.$$

Тогда имеем

$$\frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega''} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta},$$

откуда искомая скорость равна

$$\beta = \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda + \lambda''} = \frac{650 - 550}{650 + 550} = \frac{1}{12}, \quad v = \frac{c}{12}.$$

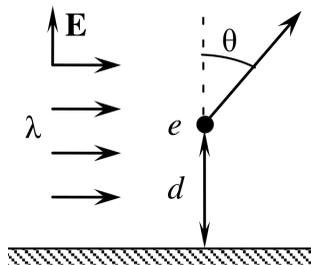
Решение задачи 2

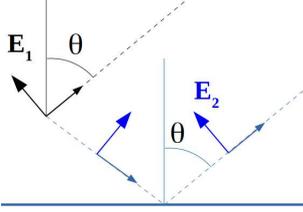
Поле в минимуме можно рассматривать как поле от одной щели, сложенное в противофазе с суммарным полем остальных щелей. Поэтому последнее равно по абсолютной величине и противоположно по знаку полю одной щели (пока ее не закрыли). В силу условия $a \ll d$ поле от одной щели, пропорциональное $\text{sinc} \frac{ka\theta}{2}$, слабо зависит от направления в интервале углов θ от главного максимума до ближайшего минимума. С учетом этих соображений для ответа на вопрос задачи достаточно определить интенсивность от одной щели в направлении главного максимума. Она равна

$$I' = CE_0^2 = C \left(\frac{E_{max}}{N} \right)^2 = \frac{I}{N^2}.$$

Решение задачи 3

Картина явления состоит в том, что под действием электрического поля падающей волны частица приобретает ускорение, а вместе с ним переменный дипольный момент. Вследствие этого возникает дипольное излучение. В точке наблюдения дипольного излучения интерферируют прямая волна и волна, отраженная от проводящей плоскости. Последняя в заданной геометрии задачи обла-





дает ТМ-поляризацией. При отражении между ней и прямой волной скачка по фазе не возникает (см. рисунок, где \mathbf{E}_1 обозначает прямую волну, \mathbf{E}_2 – отраженную). Разность фаз этих волн обусловлена только разностью хода до точки наблюдения

($-d \cos \theta$ для прямой волны и $+d \cos \theta$ – для отраженной). Тогда для суммарной волны в точке наблюдения \mathbf{r} имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}}{c^2 r} = -\frac{\omega^2 d_0 \sin \theta (e^{i(k(r-d \cos \theta) - \omega t)} + e^{i(k(r+d \cos \theta) - \omega t)})}{c^2 r} \mathbf{e}_\theta = \\ &= -2 \frac{\omega^2 d_0}{c^2 r} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \cos(kd \cos \theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{E} &= -\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 2 \frac{\omega^2 d_0}{c^2 r} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \cos(kd \cos \theta) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Средний по времени вектор Пойнтинга в точке наблюдения равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{4\omega^4 d_0^2}{c^4 r^2} \sin^2 \theta \cos^2(kd \cos \theta) \mathbf{n}.$$

Средний по времени вектор Пойнтинга для падающей волны равен

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2.$$

Амплитудное значение дипольного момента электрона:

$$d_0 = e \frac{e E_0}{m \omega^2}.$$

Искомое дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{r^2 S}{S_0} = \frac{4e^4}{m^2} \sin^2 \theta \cos^2(kd \cos \theta) \frac{1}{c^4} = 4r_e^2 \sin^2 \theta \cos^2(kd \cos \theta).$$

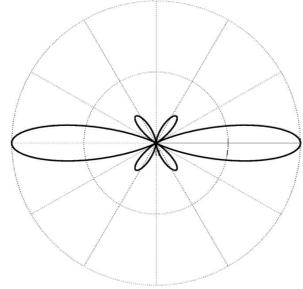
В случае $d = \frac{\lambda}{2}$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = 4r_e^2 \sin^2 \theta \cos^2(\pi \cos \theta).$$

Для построения качественной диаграммы направленности определим значения $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ для нескольких углов в пределах первого квадранта:

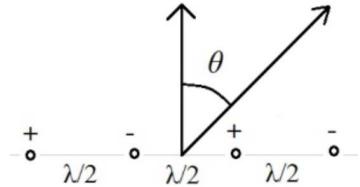
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = 0 \text{ при } \theta = 0, \pi/3,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \text{max при } \theta = \pi/2.$$



Решение задачи 4

Поле в точке наблюдения является результатом интерференции полей от каждого излучателя:



$$\begin{aligned} \hat{E}_P &= E_0 \left(e^{i(kr_1 - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t + \pi)} + e^{i(kr_3 - \omega t)} + e^{i(kr_4 - \omega t + \pi)} \right) = \\ &= E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \left(1 + e^{i(-k\frac{\lambda}{2} \sin \theta + \pi)} + e^{i(-k\frac{2\lambda}{2} \sin \theta)} + e^{i(-k\frac{3\lambda}{2} \sin \theta + \pi)} \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -e^{-ik\frac{\lambda}{2} \sin \theta} = -e^{-i\pi \sin \theta}$. Тогда

$$\hat{E}_P = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{1 - q^4}{1 - q} = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{1 - e^{-4i\pi \sin \theta}}{1 - e^{-i\pi \sin \theta}}.$$

Интенсивность сигнала в точке наблюдения пропорциональна квадрату модуля поля:

$$\begin{aligned} I_P &= I_0 \frac{\sin^2(2\pi \sin \theta)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta)} = I_0 \frac{4 \sin^2(\pi \sin \theta) \cos^2(\pi \sin \theta)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta)} = \\ &= I_0 \frac{16 \sin^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta) \cos^2(\pi \sin \theta)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta)} = 16 I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \right) \cos^2(\pi \sin \theta). \end{aligned}$$

Интенсивность равна нулю в направлениях $\theta = 0, \pi/6$ и максимальна при $\theta = \pi/2$.

Решение задачи 5

Поле на экране формируется как результат интерференции прямой волны и волны, отраженной от водной поверхности. В параксиальном приближении можно считать, что отражение происходит в волновой зоне. Тогда в точках отражения волна локально ничем не отличается от плоской ТЕ-волны, и к ней применимы формулы Френеля. При скользющем отражении коэффициент отражения по амплитуде близок к единице и возникает сдвиг по фазе на π . Для интенсивности на экране имеем

$$I(x) = 2I_0 \left(1 - \cos \frac{2k_h x}{L} \right),$$

где $I_0 = \frac{c}{8\pi} H^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{q^2 a^2 \omega^4}{c^4 r^2} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{8c^3 L^2}$ – интенсивность излучения одиночного линейного диполя в волновой зоне.

Решение задачи 6

Запишем граничные условия на первой поверхности:

$$E_0 + E_1 = E_2 + E_3$$

$$H_0 - H_1 = H_2 - H_3 + \frac{4\pi}{c} J_1,$$

где E_0, H_0 – поля в падающей волне,

E_1, H_1 – поля в отраженной волне,

E_2, H_2 – поля в прошедшей волне,

E_3, H_3 – поля в волне, отраженной от второй плоскости и падающей снизу на первую,

J_1 – линейная плотность тока в первой плоскости.

Граничные условия на второй поверхности:

$$E_2 e^{ik\lambda} + E_3 e^{-ik\lambda} = E_4 + E_5$$

$$H_2 e^{ik\lambda} - H_3 e^{-ik\lambda} = H_4 - H_5 + \frac{4\pi}{c} J_2,$$

где E_4, H_4 – поля в прошедшей волне,
 E_5, H_5 – поля в волне, отраженной от третьей плоскости и падающей снизу на вторую,
 J_2 – линейная плотность тока во второй плоскости.

Граничные условия на третьей поверхности:

$$E_4 e^{ik\lambda} + E_6 e^{-ik\lambda} = E_7$$

$$H_4 e^{ik\lambda} - H_6 e^{-ik\lambda} = H_7 + \frac{4\pi}{c} J_3,$$

где E_7, H_7 – поля в прошедшей волне,
 J_3 – линейная плотность тока во второй плоскости.

Поскольку $e^{ik\lambda} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\lambda} = e^{2\pi i} = 1$, то в уравнениях ничего не изменится, если сделать зазор между пластинами равным нулю. Но тогда задача сводится к случаю трех (в общем случае – N) пластин, уложенных вплотную в стопку. Эквивалентная проводимость стопки равна $3\sigma^*$. Подставляя ее в известный результат из задачи 1.28 [2], получаем

$$\frac{I_{\text{прош}}}{I_0} = \frac{1}{(1 + \frac{6\pi}{c}\sigma^*)^2}.$$

Решение задачи 7

H_{01} -волна имеет составляющие

$$\hat{H}_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad H_z(\mathbf{r}, t) = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos(k_z z - \omega t),$$

$$E_z(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\hat{H}_y = \frac{i}{\varkappa^2} k_z \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial y} = -\frac{i}{\varkappa^2} k_z \frac{\pi}{b} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} =$$

$$= -\frac{ibk_z}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad H_y(\mathbf{r}, t) = \frac{bk_z}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin(k_z z - \omega t),$$

$$\hat{H}_x = \frac{i}{\varkappa^2} k_z \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x} = 0,$$

$$\hat{E}_x = \frac{i}{\varkappa^2} \frac{\omega}{c} \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\pi}{b} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} =$$

$$= -\frac{ib\omega}{c\pi} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad E_x(\mathbf{r}, t) = \frac{b\omega}{c\pi} B_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin(k_z z - \omega t),$$

$$\hat{E}_y = -\frac{i}{\varkappa^2} \frac{\omega}{c} \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x} = 0.$$

На оси волновода $y = \frac{b}{2}$ имеются две ненулевые составляющие полей:

$$H_y(t) = \frac{bk_z}{\pi} B_0 \sin(k_z z - \omega t),$$

$$E_x(t) = \frac{b\omega}{c\pi} B_0 \sin(k_z z - \omega t).$$

Искомые потери энергии выражаются формулой

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \gamma^2 \int_0^{L/v} \{(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2\} dt =$$

$$= \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \gamma^2 \int_0^L (E_x - \beta H_y)^2 \frac{dz}{v} =$$

$$= \frac{2e^4}{3m^2 v c^3} \gamma^2 \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{\omega}{c} - k_z\right)^2 B_0^2 \int_0^L \sin^2(k_z z - \omega t) dz =$$

$$= \frac{2e^4 b^2 B_0^2}{3m^2 \pi^2 v c^3} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - k_z\right)^2 \int_0^L \sin^2(k_z z - \omega z/v) dz =$$

$$= \frac{e^4 b^2 L B_0^2}{3m^2 \pi^2 v c^3} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - k_z\right)^2,$$

где при взятии интеграла учтено, что $L \gg \frac{v}{\omega - k_z v}$. Также учтена связь между координатой z электрона и временем t излучения им электромагнитной волны: $t = \frac{z}{v}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 1. Электродинамика частиц и полей. 82, 90, 132, 136, 144, 177, 186, 210, 223, 224, 226, 227, 229, 254
2. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. 119, 155, 289
3. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. Москва: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 82
4. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. Электричество и магнетизм. 146
5. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 2. Электромагнитные волны. 98, 233, 236
6. Гинзбург И. Ф., Погосов А. Г. Электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2010. Релятивистское описание. Волновые явления. 118, 277