

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра общей физики

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2017–2020 гг.**

Учебное пособие

Новосибирск
2023

УДК 537 (075.8)
ББК В313 я 73-4
Э 360

Авторы:

Валериан Иванович Яковлев, Артур Григорьевич Погосов,
Станислав Леонидович Синецкий, Антон Викторович Богомяков,
Леонид Семенович Брагинский, Владимир Алексеевич Володин,
Евгений Юрьевич Жданов, Дмитрий Михайлович Казанцев,
Александр Васильевич Зайцев, Михаил Иванович Захаров,
Петр Валерьевич Калинин, Мария Станиславовна Котельникова,
Дмитрий Александрович Максимов, Павел Леонидович Новиков,
Дмитрий Александрович Похабов, Евгений Сергеевич Сандалов,
Андрей Артемович Симонов, Василий Дмитриевич Степанов,
Олег Алексеевич Шушаков.

Э 360 Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2017–2020 гг. : учеб. пособие / В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Синецкий и др.; Новосибир. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2023. – 152 с.

ISBN 978-5-4437-1344-1

В учебном пособии собраны задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на письменных контрольных и экзаменационных работах по электродинамике в 2017–2020 гг.

Предназначено для студентов-физиков, информатиков и геофизиков НГУ.

УДК 537 (075.8)
ББК В313 я 73-4

© Новосибирский государственный университет, 2023
ISBN 978-5-4437-1344-1

Оглавление

Предисловие	6
Условия задач	7
2017/2018 учебный год	7
Контрольная работа 1.1, вариант 1	7
Контрольная работа 1.1, вариант 2	8
Контрольная работа 1.2, вариант 1	9
Контрольная работа 1.2, вариант 2	10
Экзаменационная работа 1	12
Контрольная работа 2.1, вариант 1	14
Контрольная работа 2.1, вариант 2	15
Контрольная работа 2.2, вариант 1	16
Контрольная работа 2.2, вариант 2	18
Экзаменационная работа 2	19
2018/2019 учебный год	21
Контрольная работа 1.1, вариант 1	21
Контрольная работа 1.1, вариант 2	22
Контрольная работа 1.2, вариант 1	23
Контрольная работа 1.2, вариант 2	24
Экзаменационная работа 1	25
Контрольная работа 2.1, вариант 1	26
Контрольная работа 2.1, вариант 2	28

Контрольная работа 2.2, вариант 1	28
Контрольная работа 2.2, вариант 2	30
Экзаменационная работа 2	31
2019/2020 учебный год	33
Контрольная работа 1.1, вариант 1	33
Контрольная работа 1.1, вариант 2	34
Контрольная работа 1.2, вариант 1	35
Контрольная работа 1.2, вариант 2	36
Экзаменационная работа 1	37
Контрольная работа 2.1, вариант 1	38
Контрольная работа 2.1, вариант 2	40
Экзаменационная работа 2	41
Решения	44
2017/2018 учебный год	44
Контрольная работа 1.1, вариант 1	44
Контрольная работа 1.1, вариант 2	48
Контрольная работа 1.2, вариант 1	51
Контрольная работа 1.2, вариант 2	56
Экзаменационная работа 1	58
Контрольная работа 2.1, вариант 1	64
Контрольная работа 2.1, вариант 2	68
Контрольная работа 2.2, вариант 1	70
Контрольная работа 2.2, вариант 2	75
Экзаменационная работа 2	78
2018/2019 учебный год	84
Контрольная работа 1.1, вариант 1	84
Контрольная работа 1.1, вариант 2	87
Контрольная работа 1.2, вариант 1	89
Контрольная работа 1.2, вариант 2	91
Экзаменационная работа 1	94
Контрольная работа 2.1, вариант 1	102
Контрольная работа 2.1, вариант 2	106

Оглавление

Контрольная работа 2.2, вариант 1	108
Контрольная работа 2.2, вариант 2	113
Экзаменационная работа 2	115
2019/2020 учебный год	122
Контрольная работа 1.1, вариант 1	122
Контрольная работа 1.1, вариант 2	125
Контрольная работа 1.2, вариант 1	127
Контрольная работа 1.2, вариант 2	129
Экзаменационная работа 1	132
Контрольная работа 2.1, вариант 1	138
Контрольная работа 2.1, вариант 2	141
Экзаменационная работа 2	143

Список литературы

151

Предисловие

В данном издании собраны задачи, предлагавшиеся студентам физического и геолого-геофизического факультетов НГУ на потоковых контрольных и письменных экзаменационных работах по электродинамике в течение 2017–2020 годов. Задачи для вариантов отбирались всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6–7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 2–3 балла, очень трудные – 6–7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

При оценивании решения письменного экзамена предусмотрена оценка-автомат «отлично». Дело в том, что при сдаче устного экзамена учитываются результаты письменного. Получивший на письменном экзамене оценку-автомат «отлично» освобождается от устного экзамена, и ему выставляется итоговая оценка «отлично» в том случае, если студент написал работу на ступень выше «пятерки». При этом обязательным условием является получение оценки «отлично» за работу в семестре.

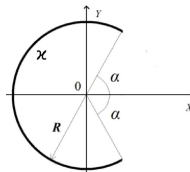
Условия задач

2017/2018 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

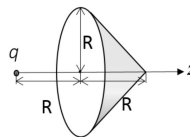
Задача 1

Дуга радиусом R с угловым размером, показанным на рисунке ($\alpha = 60^\circ$), равномерно заряжена с линейной плотностью заряда λ . Найти электрическое поле в центре координат (в точке O). (3 б.)



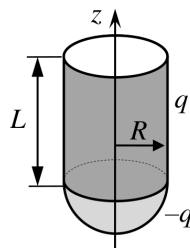
Задача 2

Вычислить поток поля \mathbf{E} от точечного заряда q через боковую поверхность конуса, показанного на рисунке (3 б.)



Задача 3

Боковая поверхность непроводящего цилиндра радиусом R длиной L равномерно заряжена зарядом q . К одному из оснований приклеена соосно непроводящая полусфера с тем же радиусом, равномерно заряженная зарядом $-q$. Найти дипольный момент получившейся системы зарядов. (4 б.)

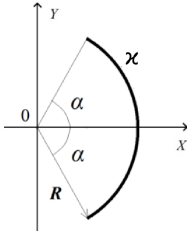


Задача 4

Внутри плоского конденсатора вставили электрет-брусочек, состоящий из частиц с дипольными моментами \mathbf{d}_0 , ориентированными одинаково и ортогонально пластинам конденсатора; площадь пластин S , а расстояние между ними $h \ll \sqrt{S}$. Число частиц в единице объема n_0 . Размеры электрета совпадают с размерами конденсатора. Пластины конденсатора замыкают проводником. Какой заряд протечет через проводник? (2 б.) Какое количество тепла выделится в проводнике? (+2 б.)

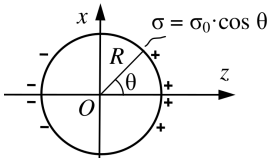
Указание. Считать, что потери энергии на излучении пренебрежимо малы.

Контрольная работа 1.1, вариант 2



Задача 1

Дуга радиусом R с угловым размером, показанным на рисунке ($\alpha = 60^\circ$), равномерно заряжена с линейной плотностью заряда ζ . Найти электрическое поле в центре координат (в точке O). (3 б.)

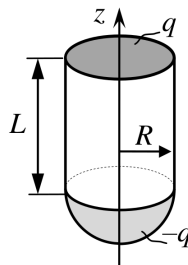


Задача 2

Непроводящая сфера радиусом R заряжена поверхностным зарядом, распределенным по закону $\sigma = \sigma_0 \times \cos \theta$ (угол θ отсчитывается от оси z). Центр сферы находится в начале координат – точке O . Найти поток электрического поля внутри сферы через плоскость $z = 0$. (3 б.)

Задача 3

Одно из оснований непроводящего цилиндра радиусом R длиной L равномерно заряжено зарядом q , а к другому приклеена соосно непроводящая полусфера с тем же радиусом, равномерно заряженная зарядом $-q$. Найти дипольный момент получившейся системы зарядов. (4 б.)



Задача 4

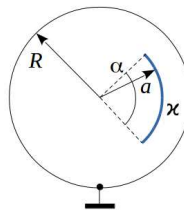
В незаряженный короткозамкнутый плоский конденсатор вставили электрет-брусочек, состоящий из частиц с дипольными моментами \mathbf{d}_0 , ориентированными ортогонально пластинам конденсатора; площадь пластин S , а расстояние между ними $h \ll \sqrt{S}$. Концентрация частиц n_0 . Размеры электрета совпадают с размерами конденсатора. Какой заряд протечет через проводник (2 б.)? Какая работа совершается на введении электрет-бруска в конденсатор (+2 б.)?

Указание. Считать, что потери энергии на излучении пренебрежимо малы.

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Задача 1

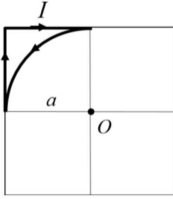
Внутри проводящей заземленной сферы радиусом R расположена дуга радиусом a и углового размера α , заряженная с плотностью χ . Сфера и дуга имеют общий центр. Найти потенциал в центре сферы. (3 б.)



Задача 2

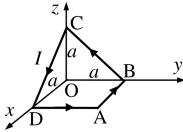
Ток бежит по замкнутому плоскому контуру, составленному из дуги окружности радиусом a и двух прямых

участков (на рисунке изображены толстыми линиями).



B_{II} через I и a . (+2 б.)

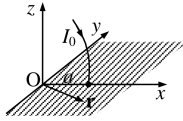
1) Найти величину и направление поля $\mathbf{B}(O)$ в точке O , если известно, что поля в центре кругового витка радиусом a и квадратного витка со стороной $2a$ при прохождении такого же тока равны соответственно B_O и B_{II} (1 б.). 2) Выразить



Задача 3

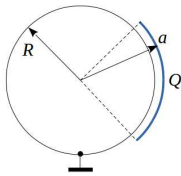
Ток I течет по контуру ABCDEA, как показано на рисунке (координаты точек A, B, C, D и E равны соответственно: $(a, a, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ и $(a, 0, 0)$). Используя калибровку $\text{div } \mathbf{A} = 0$ и условие $\mathbf{A}(\infty) = 0$, найти вектор-потенциал (A_x, A_y, A_z) в точке с координатами (b, b, b) , если $b \gg a$. (4 б.)

Задача 4



Конец провода с током I_0 касается полубесконечной тонкой однородной проводящей поверхности в точке, удаленной на расстояние a от ее края. Найти распределение поверхностных токов $\mathbf{i}(\mathbf{r})$. (4 б.)

Контрольная работа 1.2, вариант 2

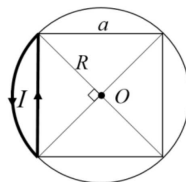


Задача 1

Снаружи от проводящей заземленной сферы радиусом R расположена дуга радиусом a с зарядом Q . Сфера и дуга имеют общий центр. Найти заряд на сфере. (3 б.)

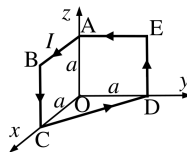
Задача 2

По замкнутому плоскому контуру, составленному из дуги окружности радиусом R и хорды, на которую опирается угол $\frac{\pi}{2}$ (на рисунке изображены толстыми линиями), бежит некоторый ток I . 1) Найти величину и направление поля $\mathbf{B}(O)$ в центре окружности, если известно, что поля в центре кругового витка радиусом R и квадратного витка со стороной $a = R\sqrt{2}$ при прохождении тока I равны соответственно B и B (1 б.). 2) Выразить B через I и a . (+2 б.)



Задача 3

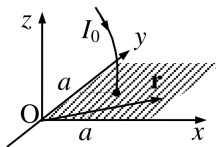
Ток I течет по контуру ABCDEA, как показано на рисунке (координаты точек A, B, C, D и E равны соответственно: $(0, 0, a)$, $(a, 0, a)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ и $(0, a, a)$). Найти вектор-потенциал (A_x, A_y, A_z) в точке с координатами $(b, b, 0)$, если $b \gg a$.



Примечание: Использовать калибровку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, а также считать, что на бесконечности вектор-потенциал стремится к нулю. (4 б.)

Задача 4

Конец провода, по которому течет ток I_0 , касается тонкой однородной проводящей поверхности, занимающей область $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ в точке, равноудаленной на расстояние a от ее краев. Найти распределение поверхностных токов $\mathbf{i}(\mathbf{r})$. (4 б.)



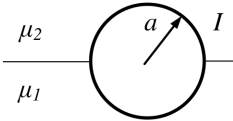
Экзаменационная работа 1

Задача 1

В соленоид длиной l с сечением S ($l \gg \sqrt{S}$) с числом витков N вставлен проводящий сердечник той же длины, с сечением $s < S$ с магнитной проницаемостью μ . Найти индуктивность соленоида а) для постоянного тока (1 б.); б) при сильном скин-эффекте (переменный ток). (+2 б.)

Задача 2

Цилиндр, однородно заряженный по объему (длина h , радиус a , заряд q), закрутили с частотой ω вокруг своей оси. Найти магнитный момент цилиндра (2 б.) и магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от цилиндра ($R \gg h, a$). (+1 б.)



Задача 3

Вдоль оси полого цилиндрического проводника радиусом a течет ток I , равномерно распределенный по поверхности. Ось проводника лежит на плоской границе двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 , а пространство внутри проводника заполнено воздухом. Найти распределение молекулярных токов J на границе проводника и магнетиков. (3 б.)



Задача 4

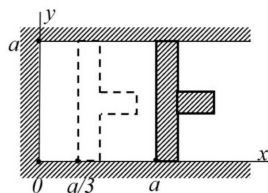
В воздухе над плоской границей раздела «воздух-сверхпроводник» расположена непроводящая спица, на концах которой находятся одинаковые по модулю и разные по знаку заряды. Один конец спицы вращают вокруг другого со скоростью $v \ll c$. Найти, каким будет относительное изменение $(\Delta F/F)$ силы притяжения



спицы к сверхпроводнику, если спицу остановить. Расстояние от спицы до границы раздела много больше длины спицы. Потерями энергии на излучение пренебречь. (5 б.)

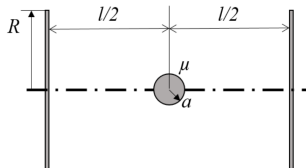
Задача 5

Бесконечная в направлении z (см. рисунок) полость с прямоугольным сечением образована сверхпроводящими стенками, одна из которых представляет собой плоский поршень, способный перемещаться по направлению x . В начальном положении поршня пустая область имеет размеры $a \times a$ и заполнена однородным магнитным полем $\mathbf{V} = B_0 \mathbf{e}_z$. Затем поршень движется влево до окончательного положения $a/3$, показанного пунктиром. Найти: 1) магнитное поле B_1 в полости $a \times a/3$ (1 б.); 2) работу, необходимую для приведения поршня в конечное положение. (+2 б.)



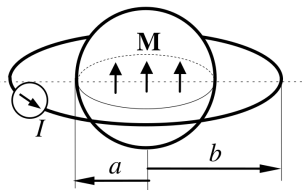
Задача 6

Два одинаковых соосных кольца радиусом R находятся на расстоянии l друг от друга. Найти изменение их взаимной индуктивности ΔL_{12} , если на оси между кольцами посередине поместить шарик радиусом $a \ll l, R$ с магнитной проницаемостью μ . (6 б.)



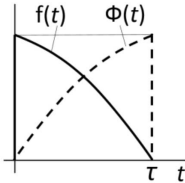
Задача 7

Вокруг постоянного магнита в форме шара радиусом a закреплён центрированный с ним виток тонкого провода радиусом b , в который встроен источник, поддерживающий постоянный ток I . Шар однородно намагничён, так что вектор



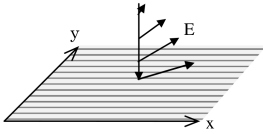
намагниченности \mathbf{M} внутри шара перпендикулярен плоскости витка. Какую работу совершит источник тока, если шар повернуть на 180° вокруг своей оси так, что вектор \mathbf{M} поменяет направление на противоположное? Ток I считать слабым и не влияющим на величину M . (6 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 1



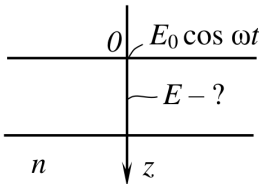
Задача 1

Зная спектральную плотность сигнала $f(\omega)$, задаваемого функцией $f(t)$ (сплошная линия), найти спектральную плотность $\Phi(\omega)$, «симметричного» сигнала $\Phi(t)$, представленного пунктирной кривой. (2 б.)



Задача 2

На бесконечно тонкую пластину падает по нормали волна с круговой поляризацией. На нее нанесены параллельные проводящие дорожки с шагом, много меньшим длины волны, так, что выполняется закон Ома (поверхностный ток $i_{x,y} = \sigma_{x,y} \cdot E_{x,y}$), а поверхностная проводимость анизотропна $\sigma_x = \sigma^*$, $\sigma_y = 0$. Найти коэффициент отражения волны по интенсивности. (3 б.)



Задача 3

Из воздуха на пластинку с показателем преломления n , покрытую просветляющим покрытием, падает по нормали (вдоль оси z) плоская электромагнитная волна. Показатель преломления и толщина покрытия выбраны так, чтобы отражённой волны не было (при этом толщина покрытия выбрана минимально возможной). На границе «воздух–покрытие» (при $z = 0$)

электрическое поле равно $E_0 \mathbf{e}_x \cos \omega t$. Найти электрическое поле в центре покрытия. (4 б.)

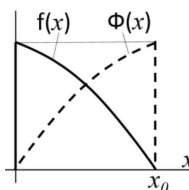
Задача 4

Левая часть ($z \leq 0$) длинного волновода прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками заполнена диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$ ($\mu = 1$), а правая часть ($z > 0$) – пуста. Слева, вдали от границы, возбуждают E_{11} -волну, распространяющуюся вдоль оси z на частоте $\omega = 2\omega_{11}$, где ω_{11} – критическая. Определите коэффициент отражения этой волны по интенсивности R от границы раздела «диэлектрик–пустота». (5 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 2

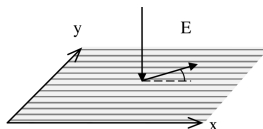
Задача 1

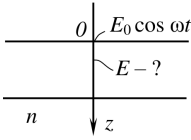
Зная спектральную плотность сигнала $f(k)$, задаваемого функцией $f(x)$ (сплошная линия), найти спектральную плотность $\Phi(k)$ «симметричного» сигнала $\Phi(x)$, представленного пунктирной кривой. (2 б.)



Задача 2

На бесконечно тонкую пластину падает по нормали линейно поляризованная волна. На пластину нанесены параллельные проводящие дорожки с шагом, много меньшим длины волны, так, что выполняется закон Ома (поверхностный ток $i_{x,y} = \sigma_{x,y} \cdot E_{x,y}$), а поверхностная проводимость анизотропна $\sigma_x = \sigma^*$, $\sigma_y = 0$. Найти коэффициент отражения волны по интенсивности, если волна поляризована под углом α к направлению дорожек. (3 б.)





Задача 3

Из воздуха на пластинку с показателем преломления n , покрытую просветляющим покрытием, падает по нормали (вдоль оси z) плоская электромагнитная волна. Показатель преломления и толщина покрытия выбраны так, чтобы отражённой волны не было (при этом толщина покрытия выбрана минимально возможной). На границе «воздух–покрытие» (при $z = 0$) электрическое поле равно $E_0 \mathbf{e}_x \cos \omega t$. Найти электрическое поле в точке с координатой z , равной $1/3$ толщины покрытия (см. рисунок). (4 б.)

Задача 4

Левая часть ($z \leq 0$) длинного волновода прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками заполнена диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$, ($\mu = 1$), а правая часть ($z > 0$) – пуста. Слева, вдали от границы, возбуждают E_{11} -волну, распространяющуюся вдоль оси z на частоте $\omega = 2\omega_{11}$, где ω_{11} – критическая. Определите коэффициент отражения этой волны по интенсивности R от границы раздела «диэлектрик–пустота». (5 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 1



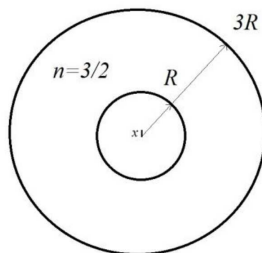
Задача 1

Коэффициент отражения ЭМ волны по интенсивности от полупрозрачной тонкой пластинки равен R , а коэффициент прохождения по интенсивности равен T . Часть энергии поглощается в пластинке ($R + T < 1$). ЭМ волна интенсивности I_0 падает слева на две такие пластинки, находящиеся на расстоянии много больше продольной длины когерентности

волны. Найти, какая интенсивность поглощается в первой пластинке. (3 б.)

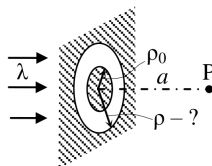
Задача 2

В центре стеклянного шара (радиус $3R$, показатель преломления $3/2$) находится воздушная полость радиусом R . В центре полости находится маленький предмет. Найти расстояние от предмета до его изображения и соотношение между размерами изображения и размерами самого предмета. (3 б.)



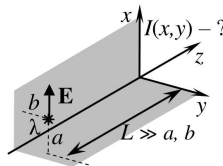
Задача 3

Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает по нормали на плоский непрозрачный экран с отверстием в виде кольца с внутренним радиусом $\rho_0 = \sqrt{\frac{\lambda a}{3}}$, где a – расстояние до точки наблюдения P . Найти минимальный внешний радиус кольца ρ , при котором интенсивность света в точке P в 4 раза больше, чем в отсутствие экрана. (4 б.)

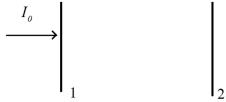


Задача 4

Точечный монохроматический источник света с длиной волны λ , линейно-поляризованного вдоль оси x , находится на расстоянии a от плоскости yz , b – от плоскости xz и L ($L \gg a, b$) – от плоскости xy (см. рисунок). Плоскости xz и yz – зеркальные. Найти распределение интенсивности $I(x, y)$ на плоскости xy , если интенсивность, создаваемая источником в отсутствие зеркал, равна I_0 . (5 б.)

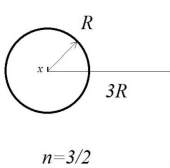


Контрольная работа 2.2, вариант 2



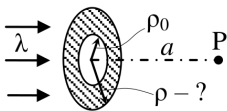
Задача 1

Коэффициент отражения ЭМ волны по интенсивности от полупрозрачной тонкой пластинки равен R , а коэффициент прохождения по интенсивности равен T . Часть энергии поглощается в пластинке ($R + T < 1$). ЭМ волна интенсивности I_0 падает слева на две такие пластинки, находящиеся на расстоянии много больше продольной длины когерентности волны. Найти, какая интенсивность поглощается во второй пластинке. (3 б.)



Задача 2

В полубесконечном пространстве, заполненном стеклом с показателем преломления $3/2$ находится воздушная полость радиусом R . Центр полости расположен на расстоянии $3R$ от поверхности стекла. В центре полости находится маленький предмет. Наблюдатель смотрит на предмет со стороны воздуха. Найти расстояние от поверхности стекла до изображения предмета и соотношение между размерами изображения и размерами самого предмета. (3 б.)

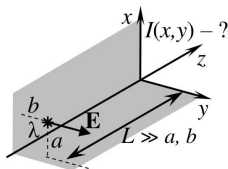


Задача 3

Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает по нормали к плоскости непрозрачного кольца с внутренним радиусом $\rho_0 = \sqrt{\frac{2\lambda a}{3}}$, где a – расстояние до точки наблюдения P . Найти минимальный внешний радиус кольца ρ , при котором интенсивность света в точке P будет такой же, как в отсутствие экрана. (4 б.)

Задача 4

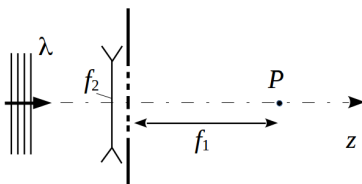
Точечный монохроматический источник света с длиной волны λ , линейно-поляризованного вдоль оси y , находится на расстоянии a от плоскости yz , b – от плоскости xz и L ($L \gg a, b$) – от плоскости xy (см. рисунок). Плоскости xz и yz – зеркальные. Найти распределение интенсивности $I(x, y)$ на плоскости xy , если интенсивность, создаваемая источником в отсутствие зеркал, равна I_0 . (5 б.)

**Экзаменационная работа 2****Задача 1**

Плоская монохроматическая волна падает по нормали из одного диэлектрика в другой с показателями преломления n_1, n_2 соответственно. Магнитные проницаемости обоих диэлектриков равны единице, на их плоской границе раздела находится бесконечно тонкий проводник, для него выполняется закон Ома $\mathbf{J} = \sigma^* \mathbf{E}$, σ^* – поверхностная проводимость. Найти коэффициент отражения (для интенсивности волны). (3 б.)

Задача 2

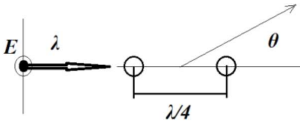
Плоская монохроматическая волна падает по нормали на экран с круглым отверстием. В отверстие вставлена зонная пластинка: система непрозрачных концентрических колец, закрывающих нечетные зоны Френеля для точки P , находящейся на оптической оси на расстоянии f_1 от отверстия. Перед отверстием поместили рассеивающую линзу с фо-



кусным расстоянием $f_2 > f_1$. Определить положение фокуса образованной оптической системы. (3 б.)

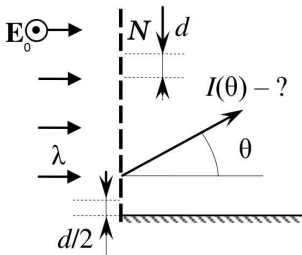
Задача 3

Монохроматическая волна с длиной волны λ интенсивностью I_0 падает на экран с круглым отверстием. Для точки P , находящейся за экраном, отверстие занимает первую и вторую зоны Френеля. Первую зону перекрыли прозрачным стеклянным диском с показателем преломления n . При какой минимальной толщине d диска интенсивность в точке P будет максимальной? (2 б.) Чему равна максимальная интенсивность? (+2 б.)



Задача 4

Линейно поляризованная монохроматическая волна (вектор электрического поля направлен по нормали к рисунку) с длиной волны λ и амплитудой E_0 падает на два диэлектрических шарика (диэлектрическая проницаемость ϵ), расположенных вдоль волнового вектора волны. Расстояние между шариками $\lambda/4$, радиусы шариков a ($a \ll \lambda$). Найти интенсивность рассеянной волны в зависимости от угла в плоскости рисунка $I(\theta)$. (4 б.)



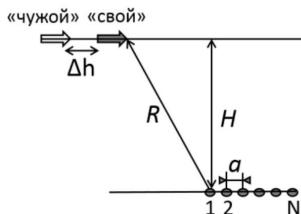
Задача 5

На периодическую дифракционную решетку из N щелей с периодом d падает линейно поляризованная плоская электромагнитная волна с длиной волны λ . Угловое распределение интенсивности излучения за решеткой равно $I_L(\theta)$. Найти угловое распределение интенсивности $I(\theta)$, если к краю дифракционной решетки поднести зеркало (см. рисунок)

так, что расстояние от середины крайней щели до плоскости зеркала равно $d/2$. (5 б.)

Задача 6

Узкий луч радиоизлучения от периодической решетки (период a) из N антенн должен быть направлен для радиосвязи со «своим». Как для этого должен зависеть сдвиг фаз тока в антеннах ϕ_j (j – номер антенны)? (2 б.) Какое минимальное количество антенн N надо взять, чтобы сигнал практически не попадал к «чужому», находящемуся на расстоянии Δh ? (+1 б.) Размеры решетки много меньше Δh , $\Delta h \ll H, R$.



Задача 7

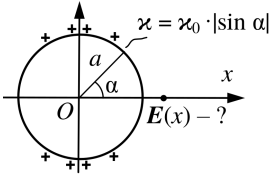
Ультрарелятивистский электрон с $\gamma \gg 1$ пролетает плоский резонатор длиной L вдоль линии, перпендикулярной его пластинам. В резонаторе возбуждена стоячая волна с большим числом пучностей и амплитудой электрического поля в пучности $2E_0$. Оценить потери энергии электрона на излучение и направление наибольшей интенсивности. (6 б.)

2018/2019 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Задача 1

В сферической системе координат плотность заряда зависит от расстояния до центра координат $\rho(r) = \frac{a^2}{r^2} \rho_0 \sin \frac{2\pi r}{a}$ при $0 \leq r \leq a$, $\rho(r) = 0$ при $r > a$. Найти напряженность электрического поля $\mathbf{E}(r)$. (3 б.)

**Задача 2**

Кольцо радиусом a заряжено с неоднородной линейной плотностью $\varkappa = \varkappa_0 |\sin \alpha|$, где α – угол с осью Ox , проходящей по диаметру кольца. Найти электрическое поле $E(x)$ на оси Ox . (4 б.)

Задача 3

Определить емкость на единицу длины (погонную емкость) цилиндрического конденсатора, радиусы обкладок которого равны a и b соответственно ($a < b$), а диэлектрическая проницаемость диэлектрика между ними зависит от расстояния до оси как $\varepsilon(r) = \frac{b}{r} \operatorname{tg} \frac{r}{a}$. (4 б.)

Контрольная работа 1.1, вариант 2**Задача 1**

В цилиндрической системе координат плотность заряда зависит от расстояния до оси координат как $\rho(r) = \frac{a}{r} \rho_0 \cos \frac{2\pi r}{a}$ при $0 \leq r \leq a$, $\rho(r) = 0$ при $r > a$. Найти напряженность электрического поля $E(r)$. (3 б.)

Задача 2

На большом расстоянии L от бесконечной равномерно заряженной нити (линейная плотность заряда \varkappa) находится незаряженный металлический шар радиусом R ($L \gg R$). Найти силу, с которой шар действует на нить. (5 б.)

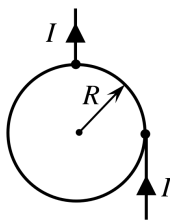
Задача 3

Определить емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны a и b соответственно ($a < b$), а диэлектрическая проницаемость диэлектрика между ними зависит от расстояния до оси как $\varepsilon(r) = \frac{b^2}{r^2} \operatorname{tg} \frac{r}{a}$. (4 б.)

Контрольная работа 1.2, вариант 1

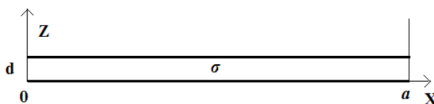
Задача 1

К кольцу радиусом R , изготовленному из однородной тонкой проводящей проволоки, в двух точках припаяны длинные прямые проводники, как показано на рисунке. По проводникам течет постоянный ток I (см. рисунок). Найти магнитное поле \mathbf{V}_0 в центре кольца. (3 б.)



Задача 2

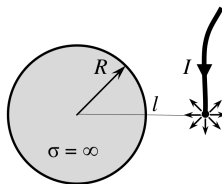
Найти ток утечки I в плоском конденсаторе с квадратными электродами размером $a \times a$, расстояние между пластинами $d \ll a$ (см. рисунок), разность потенциалов между пластинами U . Удельная проводимость материала между пластинами зависит от x как $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-\alpha x}$. (4 б.)



Найти ток утечки I в плоском конденсаторе с квадратными электродами размером $a \times a$, расстояние между пластинами $d \ll a$ (см. рисунок), разность потенциалов между пластинами U . Удельная проводимость материала между пластинами зависит от x как $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-\alpha x}$. (4 б.)

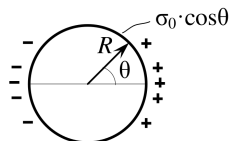
Задача 3

Оголенный конец изолированного провода, по которому течет ток I , погружен в проводящую жидкость, занимающую все пространство. Ток из провода растекается на бесконечность. На расстоянии l от конца провода находится идеально проводящий ($\sigma = \infty$) шар радиусом R ($R < l$). Найти объемную плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в жидкости. (4 б.)



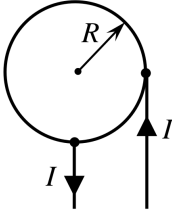
Задача 4

Поверхность непроводящей ($\epsilon = 1$) сферы радиусом R заряжена по закону $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$. Какое итоговое количество теплоты выделится после того, как сфера из непроводящего состояния перейдет в проводящее состояние, если



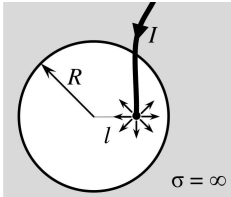
известно, что в незаряженной сфере такой переход не приводит к выделению теплоты? (5 б.)

Контрольная работа 1.2, вариант 2



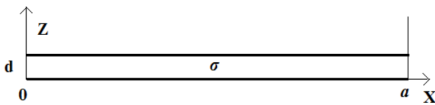
Задача 1

К кольцу радиусом R , изготовленному из однородной тонкой проводящей проволоки, в двух точках припаяны длинные прямые проводники, как показано на рисунке. По проводникам течет постоянный ток I (см. рисунок). Найти магнитное поле \mathbf{B}_0 в центре кольца. (3 б.)



Задача 2

Оголенный конец изолированного провода, по которому течет ток I , погружен в проводящую жидкость, занимающую сферическую полость радиусом R внутри идеального проводника, и находится на расстоянии l от центра сферической полости ($l < R$). Ток из провода растекается на бесконечность. Найти объемную плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ во всем пространстве. (4 б.)



Задача 3

Найти плотность заряда $\rho(z)$ в плоском конденсаторе с квадратными электродами размером $a \times a$, расстоянием между пластинами $d \ll a$ (см. рисунок), разностью потенциала между пластинами U . Удельная проводимость материала между пластинами зависит от z как $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-\alpha z}$. (4 б.)

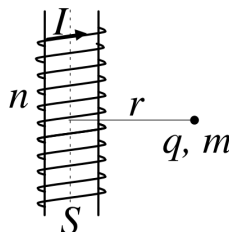
Экзаменационная работа 1

Задача 1

Ток I течет по замкнутому контуру, содержащему два круглых витка радиусов a и b соответственно. Контур целиком лежит в плоскости (xy) . Расстояние между параллельными проводами, соединяющими круглые витки, пренебрежимо мало. Найти магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в центре витков и на расстояниях $r \gg b$. (3 б.)

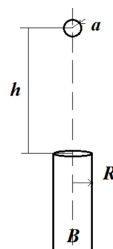
Задача 2

По бесконечному соленоиду с круглым сечением площадью S и плотностью намотки n течёт ток I . Снаружи соленоида на расстоянии r от его оси находится небольшое тело массы m с зарядом q . Ток выключают, так что за очень короткое время он убывает до нуля. Найти скорость v , приобретаемую телом после выключения тока ($v \ll c$). (4 б.)



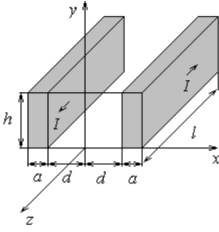
Задача 3

Над торцом полубесконечного соленоида радиусом R на высоте $h \gg R$ на его оси расположен сверхпроводящий шар радиусом $a \ll h$. Магнитное поле в соленоиде (далеко от его торца) равно B . Найти силу, действующую на шар со стороны соленоида. (4 б.)



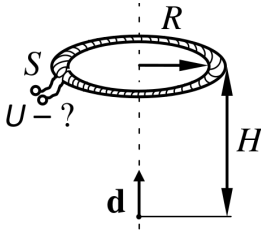
Задача 4

Какую работу нужно совершить, чтобы привести во вращение с частотой ω вокруг собственной оси симметрии лёгкую сферу радиусом R , равномерно заряженную зарядом Q ? (5 б.)



Задача 5

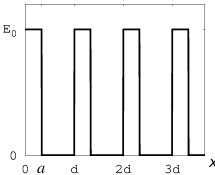
По двум параллельным металлическим пластинам размерами $a \ll h \ll l$ вдоль наибольших сторон пропускается переменный ток в противоположных направлениях. Расстояние между пластинами $2d \ll h$. Найти разность между индуктивностью системы при низких частотах тока (скин-эффект слабый) и индуктивностью системы при высоких частотах тока (скин-эффект сильный). (5 б.)



Задача 6

На высоте h над точечным переменным электрическим диполем $\mathbf{d} = d_0 e^{i\omega t} \mathbf{e}_z$ в плоскости, перпендикулярной оси z , расположен соленоид, свёрнутый в тор радиусом R . Число витков в соленоиде N , площадь сечения S ($\sqrt{S} \ll R, h$). Найти ЭДС, возникающую в соленоиде. (6 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 1



Задача 1

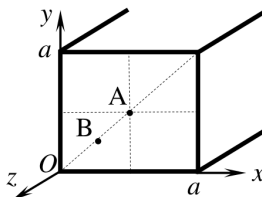
Найти спектральную плотность энергии сигнала, представляющего собой функцию $f(x) = \begin{cases} E_0, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < d \end{cases}$, повторенную N раз с периодом d . Как изменится эта величина при модуляции исходного сигнала экспонентой e^{ik_0x} ? (3 б.)

Задача 2

Найти степень поляризации естественного (неполяризованного) света в воздухе ($n = 1$) после отражения под углом $\theta_0 = 45^\circ$ от плоской границы среды с показателем преломления $n = \sqrt{2}$. Степень поляризации принять равной $K = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$, где I_s, I_p – интенсивности соответственно s (TE) и p (TM)-поляризованного света. (3 б.)

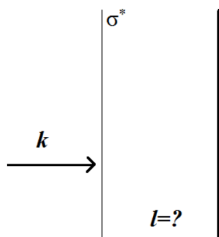
Задача 3

В пустом волноводе квадратного сечения $a \times a$ с идеально проводящими стенками возбуждена электромагнитная волна. Известно, что в точке А с координатами $(a/2, a/2, 0)$ электрическое поле направлено вдоль оси волновода и меняется по закону $\mathbf{E}_A = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) \cdot \mathbf{e}_z$. Определите электрическое поле $\mathbf{E}_B(t)$ в точке В с координатами $(a/4, a/4, 0)$. (4 б.)

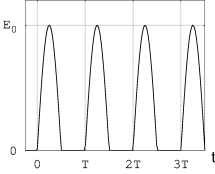


Задача 4

Интерферометр состоит из идеально отражающей поверхности (зеркала) и расположенной перед ним на расстоянии l проводящей плоскости, поверхностный ток в которой удовлетворяет закону Ома, то есть $J = \sigma^* E$. При каких значениях σ^* и l интерферометр не отражает (коэффициент отражения $R = 0$) падающую по нормали плоскую монохроматическую волну с волновым вектором \mathbf{k} ? (5 б.)



Контрольная работа 2.1, вариант 2



Задача 1

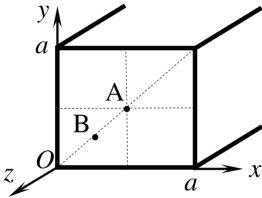
Найти спектральную плотность сигнала, представляющего собой функцию

$$f(t) = \begin{cases} E_0 \sin \omega_0 t, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases},$$

повторенную N раз с периодом $2\pi/\omega_0$. (3 б.)

Задача 2

Найти степень поляризации естественного (неполяризованного) света в воздухе ($n = 1$) после отражения под углом $\theta_0 = 60^\circ$ от плоской границы среды с показателем преломления $n = \sqrt{3}$. Степень поляризации принять равной $K = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$, где I_s, I_p – интенсивности соответственно s (TE) и p (TM)-поляризованного света. (3 б.)

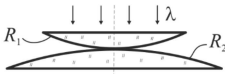


Задача 3

В пустом волноводе квадратного сечения $a \times a$ с идеально проводящими стенками возбуждена электромагнитная волна. Известно, что в точке A с координатами $(a/2, a/2, 0)$

электрическое поле направлено вдоль оси волновода и меняется по закону $\mathbf{E}_A = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) \cdot \mathbf{e}_z$. Определите магнитное поле $\mathbf{H}_B(t)$ в точке B с координатами $(a/4, a/4, 0)$. (4 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 1



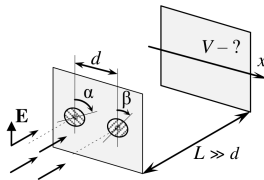
Задача 1

Найти радиусы интерференционных колец Ньютона в отраженном свете с длиной волны λ на воздушном клине между двумя плоско-выпуклыми

линзами (см. рисунок) с радиусами кривизны R_1 и R_2 .
(3 б.)

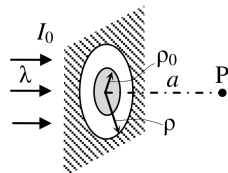
Задача 2

Плоская линейно-поляризованная электромагнитная волна падает по нормали на непрозрачный экран, в котором проделаны два точечных отверстия. Перед отверстиями поместили тонкие поляроиды, оси которых параллельны плоскости поляризации падающей волны. На проекционном экране, расположенном на большом (по сравнению с шириной между отверстиями) расстоянии, наблюдается интерференционная картина. Найти видность V интерференционной картины, если один поляроид повернуть на угол α , а другой — на угол β . (4 б.)



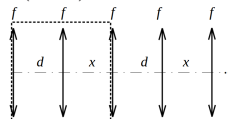
Задача 3

Плоская электромагнитная волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает по нормали на непрозрачный экран, в котором имеется круглое прозрачное окно радиусом $\rho = \sqrt{\lambda a}$ (где a — расстояние до точки наблюдения), на которое наклеена тонкая круглая полупрозрачная (т. е. пропускающая половину интенсивности) плёнка радиусом $\rho_0 = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$ (см. рисунок). Определите интенсивность в точке наблюдения. (4 б.)



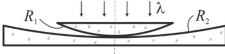
Задача 4

Периодическая цепочка тонких аксиальных линз имеет следующий период: собирающая линза с фокусным расстоянием 1 см, пустой промежуток длиной 1 см, собирающая линза с фокусным расстоянием 1 см, пустой промежуток длиной x .



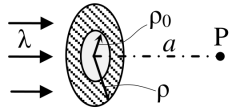
При каких значениях x в системе будет наблюдаться жёсткая фокусировка? (То есть траектория входящего луча не будет монотонно отклоняться от оптической оси, а будет колебаться). (5 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 2



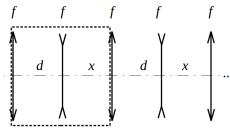
Задача 1

Найти радиусы интерференционных колец Ньютона в отраженном свете с длиной волны λ на воздушном клине между плоско-выпуклой и плоско-вогнутой линзами (см. рисунок) с радиусами кривизны R_1 и R_2 . (3 б.)



Задача 2

Плоская электромагнитная волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает по нормали к плоскости непрозрачного кольца с внутренним радиусом $\rho_0 = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$ и внешним радиусом $\rho = \sqrt{\lambda a}$ (где a – расстояние до точки наблюдения). Отверстие в кольце закрыто тонкой полупрозрачной (т. е. пропускающей половину интенсивности) пленкой (см. рисунок). Определите интенсивность в точке наблюдения. (4 б.)



Задача 3

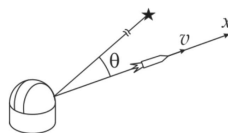
Периодическая цепочка тонких аксиальных линз имеет следующий период: собирающая линза с фокусным расстоянием 1 см, пустой промежуток длиной 1 см, рассеивающая линза с фокусным расстоянием 1 см, пустой промежуток длиной x . При каких значениях x в системе будет наблюдаться жесткая фокусировка? (То есть траектория входящего луча не

будет монотонно отклоняться от оптической оси, а будет колебаться). (5 б.)

Экзаменационная работа 2

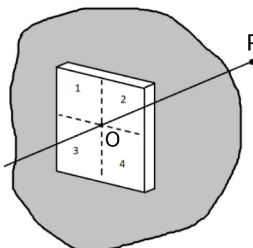
Задача 1

Наблюдатель в наземной обсерватории видит космический корабль, движущийся прямо от него со скоростью v вдоль оси x , а также далекую звезду под углом θ к оси x . Под каким углом θ' к оси x видна эта звезда для космонавта, находящегося на космическом корабле? (3 б.)



Задача 2

В непрозрачном экране имеется квадратное отверстие, в которое вставлена достаточно толстая квадратная стеклянная пластина с размерами, как у отверстия. Показатель преломления стеклянной пластины $n = 2$. На экран падает плоская ЭМ волна по нормали с длиной волны λ . На оси z , проходящей через центр квадратного отверстия, перпендикулярно плоскости экрана, в точке P регистрируется излучение интенсивностью I_0 . Стеклянную пластину отшлифовали (сделали тоньше) следующим образом: у первой четверти квадрата толщину стекла уменьшили на $\frac{\lambda}{8}$, у второй четверти – на $\frac{2\lambda}{8} = \frac{\lambda}{4}$, у третьей – на $\frac{3\lambda}{8}$, у четвертой – на $\frac{4\lambda}{8} = \frac{\lambda}{2}$. Какой стала интенсивность в точке P ? (4 б.)



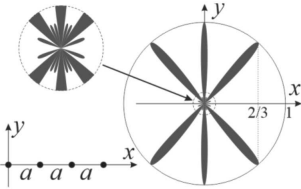
Задача 3

На периодическую дифракционную решетку из $2N$ щелей (ширина щелей a) с периодом d падает по нормали плоская ЭМ волна с амплитудой E_0 и длиной волны λ . В

нижние N щелей вставили прозрачные пластинки толщиной h с показателем преломления n . Найти угловое распределение интенсивности $I(\theta)$, отражением от пластинки пренебречь. (4 б.)

Задача 4

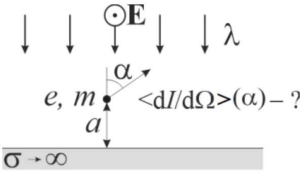
Заряд e движется вдоль оси z по закону $z(t) = 2a \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\Delta\omega t)$. Найти усредненное по времени угловое распределение мощности излучения $\langle \frac{dI}{d\Omega} \rangle$. (4 б.)



Задача 5

Периодическая решетка из четырех одинаковых синфазных штыревых антенн, ориентированных перпендикулярно плоскости рисунка, имеет диаграмму направленности излучения на длине волны λ , показанную на рисунке. Определите расстояние a между двумя соседними антеннами. (4 б.)

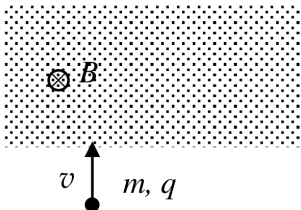
Задача 6



Плоская линейно поляризованная электромагнитная волна с амплитудой E_0 и длиной волны λ падает по нормали на идеально проводящую плоскость.

На расстоянии a от нее находится свободный заряд e массой m . Найти усредненное по времени угловое распределение интенсивности рассеянного света $\langle \frac{dI}{d\Omega} \rangle$ в плоскости, перпендикулярной \mathbf{E} . (5 б.)

Задача 7



Частица массы m с зарядом q влетает со скоростью v ($v \ll c$) под прямым углом в область постоянного перпендикулярного

магнитного поля B . Найти потери на излучение ΔE , считая их малыми по сравнению с кинетической энергией частицы. (4 б.)

2019/2020 учебный год

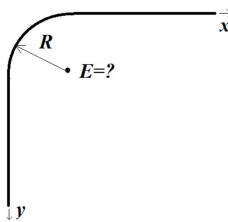
Контрольная работа 1.1, вариант 1

Задача 1

Бесконечный плоский слой толщины $2a$ ($-a \leq z \leq a$) заряжен с объёмной плотностью заряда $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{a}$. Найти напряжённость электрического поля $\mathbf{E}(z)$ внутри и вне слоя. (4 б.)

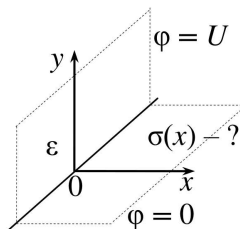
Задача 2

Однородно заряженная с линейной плотностью заряда λ нить согнута, как показано на рисунке (её изгиб образует четверть окружности радиусом R). Найти значение вектора напряжённости электрического поля \mathbf{E} в центре этой дуги. (4 б.)



Задача 3

Двугранный угол образован проводящими плоскостями $y = 0, x > 0$ и $x = 0, y > 0$. Плоскости электрически изолированы вдоль соединяющего ребра, а между ними приложена разность потенциалов U . Внутренняя часть двугранного угла заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти поверхностную плотность свободного заряда $\sigma(x)$ ($x > 0$) в плоскости $y = 0$. (5 б.)



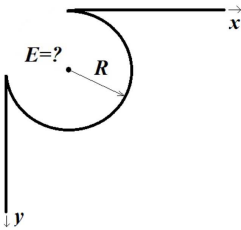
Задача 4

Шар радиусом a заряжен с объёмной плотностью $\rho(\theta) = \rho_0 \cos \theta$, где θ – угол с осью Oz , проходящей через центр O шара. Найти электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ во всём пространстве. (6 б.)

Контрольная работа 1.1, вариант 2

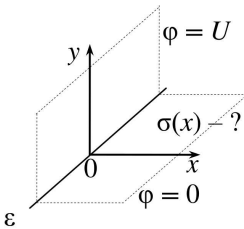
Задача 1

Бесконечный плоский слой толщины $2a$ ($-a \leq z \leq a$) заряжен с объёмной плотностью заряда $\rho(z) = \rho_0 \sin(\pi z/a)$. Найти напряжённость электрического поля $\mathbf{E}(z)$ внутри и вне слоя. (4 б.)



Задача 2

Однородно заряженная с линейной плотностью заряда λ нить согнута, как показано на рисунке (её изгиб образует четверть окружности радиусом R). Найти значение вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} в центре этой дуги. (4 б.)



Задача 3

Двугранный угол образован проводящими плоскостями $y = 0, x > 0$ и $x = 0, y > 0$. Плоскости электрически изолированы вдоль соединяющего ребра, а между ними приложена разность потенциалов U . Внешняя часть двугранного угла заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти поверхностную плотность свободного заряда $\sigma(x)$ ($x > 0$) в плоскости $y = 0$. (5 б.)

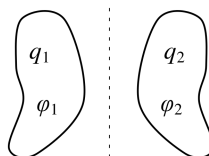
Контрольная работа 1.2, вариант 1

Задача 1

По сторонам равностороннего треугольника со стороной a бежит ток I . Найти магнитное поле \mathbf{B} в центре треугольника. (4 б.)

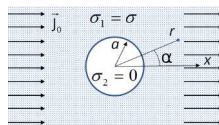
Задача 2

Два одинаковых симметрично расположенных проводника имеют заряды q_1, q_2 и потенциалы φ_1, φ_2 соответственно. Найти матрицу емкостных коэффициентов такой системы проводников. (4 б.)



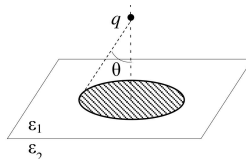
Задача 3

По бесконечной тонкой проводящей пластинке с круговым вырезом бежит ток, поверхностная плотность которого вдали от выреза $\mathbf{J}_0 = J_0 \mathbf{e}_x$. Найти распределение тока на всей пластине $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \alpha)$. (5 б.)



Задача 4

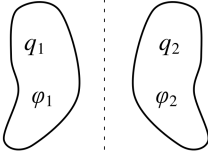
На некотором расстоянии от плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 находится точечный заряд q (в среде с проницаемостью ε_1). Найти поток Φ напряженности электрического поля \mathbf{E} через область границы (включая границу), имеющую форму круга с осью, проходящей через источник, и угловой радиус, видимый из источника, равный θ . (5 б.)



Контрольная работа 1.2, вариант 2

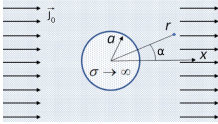
Задача 1

По сторонам квадрата со стороной a бежит ток I . Найти магнитное поле \mathbf{B} в центре квадрата. (4 б.)



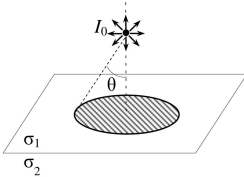
Задача 2

Два одинаковых симметрично расположенных проводника имеют заряды q_1, q_2 и потенциалы φ_1, φ_2 соответственно. Найти матрицу потенциальных коэффициентов такой системы проводников. (4 б.)



Задача 3

Круговой вырез в бесконечной тонкой проводящей пластине заполнен идеально проводящим тонким диском. По пластине бежит ток, поверхностная плотность, которого вдали от выреза $\mathbf{J}_0 = J_0 \mathbf{e}_x$. Найти распределение тока на всей пластине $\mathbf{J}(r, \alpha)$. (5 б.)



Задача 4

На некотором расстоянии от плоской границы раздела двух проводящих сред с проводимостями σ_1 и σ_2 находится точечный источник тока I_0 (в среде с проводимостью σ_1). Найти ток I , протекающий через область границы, имеющую форму круга с осью, проходящей через источник, и угловой радиус, видимый из источника, равный θ . (5 б.)

Экзаменационная работа 1

Задача 1

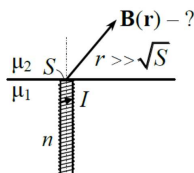
Внутри длинного соленоида радиусом a с равномерной намоткой, по которой течет постоянный ток, находится соосный с ним сердечник той же длины радиусом b , ($b < a$) с магнитной проницаемостью μ . Чему равно отношение W/W магнитной энергии, сосредоточенной в сердечнике, к полной магнитной энергии? (2 б.)

Задача 2

Шар радиусом R с магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$, заряженный равномерно по поверхности суммарным зарядом Q , вращается с угловой скоростью $\omega \mathbf{e}_z$, относительно оси, проходящей через центр шара. Найти поле \mathbf{B} внутри и снаружи шара. (4 б.)

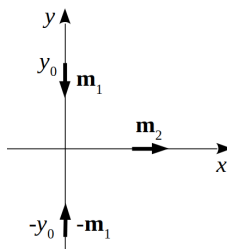
Задача 3

Ось полубесконечного соленоида с током I и плотностью намотки n перпендикулярна плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 , а торец соленоида находится на границе. Внутри соленоида среда с μ_1 . Найти магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в обеих средах на большом расстоянии r от торца ($\gg \sqrt{S}$, где S – площадь сечения соленоида). (4 б.)

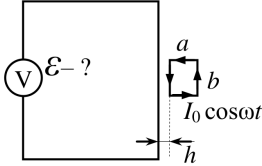


Задача 4

Два одинаковых магнита с моментами \mathbf{m}_1 и $-\mathbf{m}_1$, направленными вдоль оси y навстречу друг другу, закреплены на оси y в точках $(0, y_0)$ и $(0, -y_0)$. Третий магнит с моментом \mathbf{m}_2 , направленным по x , расположен на оси x и может переме-

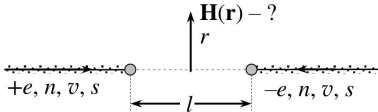


щаться только вдоль оси x . Найти положение устойчивого равновесия магнита с моментом \mathbf{m}_2 на оси x . (4 б.)



Задача 5

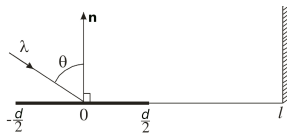
По маленькому прямоугольному контуру длиной b и шириной a течёт переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Найти ЭДС, наводимую в большом прямоугольном контуре, лежащем в плоскости маленького слева от него так, что правая его сторона параллельна левой стороне b маленького контура и находится на расстоянии h от неё. Расстояния от маленького контура до углов большого контура много больше a , b и h . (5 б.)



Задача 6

На два маленьких проводящих шарика, закреплённых на расстоянии l друг от друга, направлены узкие пучки заряженных частиц. Плотность частиц в пучках n , скорость частиц v , площадь сечения пучков s , заряды частиц в пучках $+e$ и $-e$, соответственно. Пучки распространяются по оси, соединяющей центры шариков, в противоположных направлениях. При попадании на шарики заряды накапливаются на них. Определите напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в плоскости, проходящей посередине между шариками перпендикулярно оси, на расстоянии r от оси. Отталкиванием частиц от заряженных шариков пренебречь. (6 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 1



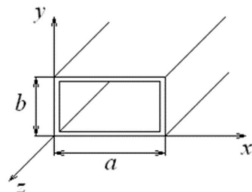
Задача 1

На плоское зеркало в виде длинной полосы шириной d под уг-

лом θ к его нормали падает плоская монохроматическая волна с длиной волны λ . Варьируя размер d , найти минимальный поперечный размер светового пятна на экране, удаленном от центра зеркала на расстояние $l \gg d$ (см. рисунок). (3 б.)

Задача 2

В прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками сечением a на b ($a=3$ см, $b=1$ см) распространяется волна с частотой ω . Данная частота является максимальной для одномодового режима волновода (то есть если частоту немного увеличить, то с такой частотой возможно распространение более чем одной моды). Найти групповую скорость распространения такой волны. (3 б.)

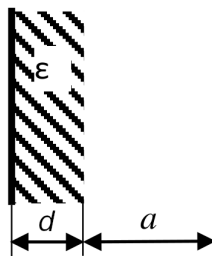


Задача 3

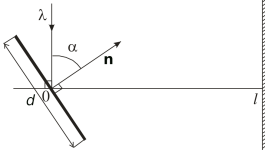
Плоская линейно-поляризованная волна падает на плоскую границу раздела двух сред. Коэффициент её отражения по интенсивности равен r , а составляющих её s - и p -волн, соответственно, r_s и r_p . Найти угол между плоскостью поляризации падающей волны и плоскостью падения. (4 б.)

Задача 4

На одну из двух бесконечных идеально проводящих параллельных пластин нанесён слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ толщиной d . В оставшемся слое толщиной a диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$. При каких a заданная частота ω окажется резонансной для электромагнитных колебаний с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , параллельными пластинам? (5 б.)

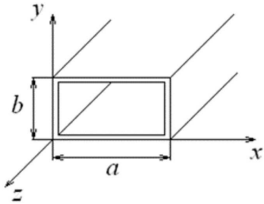


Контрольная работа 2.1, вариант 2



Задача 1

На плоское зеркало в виде длинной полосы шириной d падает по вертикали плоская монохроматическая волна с длиной волны λ . Нормаль зеркала наклонена под углом α к направлению распространения волны (см. рисунок). Варьируя размер d , найти минимальный поперечный размер светового пятна на экране, удаленном от центра зеркала на расстояние $l \gg d \cos \alpha$. (3 б.)



Задача 2

В прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками сечением a на b ($a = 3$ см, $b = 1$ см) распространяется волна с частотой ω . Данная частота является максимальной для одномодового режима волновода (то есть если частоту немного увеличить, то с такой частотой возможно распространение более чем одной моды). Найти фазовую скорость распространения такой волны. (3 б.)

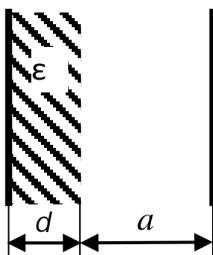
Задача 3

Плоская линейно-поляризованная волна падает на плоскую границу раздела двух сред. Коэффициент её прохождения по интенсивности равен d , а составляющих её s - и p -волн, соответственно, d_s и d_p . Найти угол между плоскостью поляризации падающей волны и плоскостью падения. (4 б.)

Задача 4

На одну из двух бесконечных идеально проводящих параллельных пластин нанесён слой диэлектрика с диэлек-

трической проницаемостью ε толщиной d . В оставшемся слое толщиной a диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$. При каких d заданная частота ω окажется резонансной для электромагнитных колебаний с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , параллельными пластинам? (5 б.)



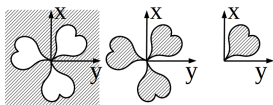
Экзаменационная работа 2

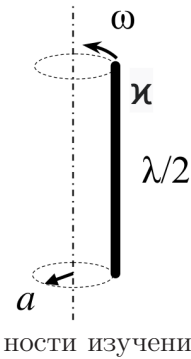
Задача 1

В плоскости $z = 0$ находится пленка (транспарант), амплитудный коэффициент пропускания которого имеет вид $\tau(x) = 1 - b + b \cos \alpha x$, где $0 < b \leq 0,5$. На транспарант слева нормально падает плоская монохроматическая волна, амплитуда которой равна E_0 , а длина волны $\lambda \ll 2\pi/\alpha$. Под какими углами к оси z распространяются волны на выходе из транспаранта? (3 б.)

Задача 2

Вдоль оси z распространяется плоская электромагнитная волна, интенсивность которой, регистрируемая в некоторой точке P , лежащей на оси z (при $z > 0$), равна I_0 . Если в плоскости xy поместить экран 1 с отверстием в виде трех одинаковых сердечек (см. рисунок), то интенсивность в точке P станет равна I_1 . Если же вместо экрана 1 поместить дополнительный к нему экран 2, то интенсивность станет равна I_2 . Чему будет равна интенсивность I_3 в точке P , если вместо экрана 2 поставить его треть (экран 3)? (4 б.)



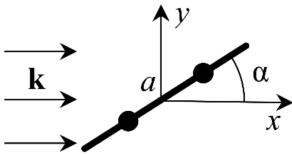


Задача 3

Тонкая палочка длиной $\lambda/2$, равномерно заряженная с линейной плотностью заряда κ , вращается с угловой скоростью $\omega = 2\pi c/\lambda$ вокруг оси, расположенной на расстоянии $a \ll \lambda$, всё время оставаясь ей параллельной. Найти усреднённое по времени угловое распределение $dI/d\Omega$ мощности излучения. (4 б.)

Задача 4

Солнечный парус представляет собой плоскую поверхность из пленки, хорошо отражающей свет. Какова должна быть толщина пленки, чтобы такой парус мог выйти за пределы солнечной системы (то есть сила давления солнечного света превышала силу гравитационного притяжения)? Плотность пленки $1,5 \text{ г/см}^3$, полная мощность излучения Солнца $3,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$, масса Солнца $2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, гравитационная постоянная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$. (4 б.)

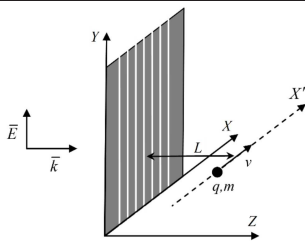


Задача 5

Два точечных заряда могут скользить без трения вдоль непроводящей спицы, закреплённой в плоскости xy под углом α к оси x (вблизи начала координат). Среднее расстояние между зарядами равно a . Вдоль оси x на заряды падает плоская электромагнитная волна с волновым вектором k , поляризованная вдоль y . Найти отношение I_x/I_y интенсивностей света, рассеянного вдоль осей x и y (интенсивности измеряются на одном и том же расстоянии). Взаимодействием зарядов между собой и с рассеянной волной пренебречь. (5 б.)

Задача 6

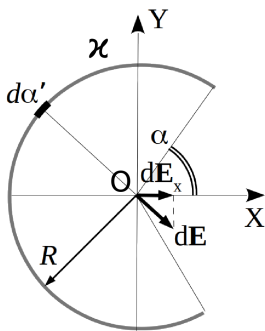
Непрозрачный бесконечный экран расположен в плоскости XU . В экране прорезано N щелей ($N \gg 1$), параллельных оси Y . Ширина щелей a , период расположения $b \gg a$. Экран освещается электромагнитной волной вида $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$. С другой стороны от экрана, на расстоянии L от него $\sqrt{\lambda L} \gg Nb$, параллельно оси X летит заряженная частица (заряд q , масса m , скорость $v \ll c$). Максимальная интенсивность, создаваемая излучением из щелей на траектории частицы, равна I_0 . Оценить полные потери энергии частицы на излучение ($\Delta \mathcal{E} \ll mv^2$). (5 б.)



Решения

2017/2018 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1



и 1

Из симметрии задачи следует, что искомое электрическое поле направлено по оси x . Поэтому согласно принципу суперпозиции его абсолютная величина равна интегралу по длине дуги от x -проекций полей, создаваемых в точке O элементарными заряженными отрезками на дуге.

Выделим элементарный отрезок длиной $Rd\alpha'$ в окрестности точки дуги с координатами (R, α') . На нем сосредоточен точечный заряд $\kappa Rd\alpha'$, создающий в точке O поле

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\kappa R d\alpha'}{R^2} \mathbf{e}_r = \frac{\kappa d\alpha'}{R} \mathbf{e}_r$$

с проекцией на ось x

$$dE_x = -\frac{\kappa d\alpha'}{R} \cos \alpha'.$$

Суммарное поле равно

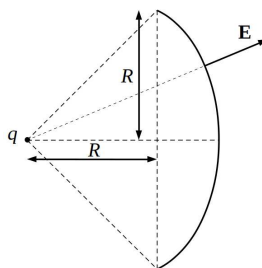
$$E_x = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} dE_x = -\frac{\varkappa}{R} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \cos \alpha' d\alpha' = 2\frac{\varkappa}{R} \sin \alpha = \frac{\varkappa\sqrt{3}}{R}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E} = \frac{\varkappa\sqrt{3}}{R} \mathbf{e}_x.$$

Решение задачи 2

Искомый поток не зависит от формы поверхности, натянутой на окружность в основании конуса. Поэтому выберем в качестве такой поверхности часть сферы радиусом $R\sqrt{2}$, ограниченную указанной окружностью. Применим формулу для площади части сферы:



$$S = 2\pi r h,$$

где $r = R\sqrt{2}$ – радиус, $h = R(\sqrt{2}-1)$ – высота части сферы.

Всюду на сфере поле направлено по нормали и равно по модулю $E = \frac{q}{2R^2}$. Поэтому поток поля равен

$$\Phi = S \cdot E = 2\pi R\sqrt{2}R(\sqrt{2}-1) \frac{q}{2R^2} = (2 - \sqrt{2})\pi q.$$

Решение задачи 3

Поскольку заданная система в целом нейтральна, ее дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Поместим плоскость $z = 0$ на границу между цилиндром и полусферой. Дипольный момент вычисляем по формуле

$$\mathbf{d} = (q \cdot z_{c1} - q \cdot z_{c2}) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

где z_{c1} и z_{c2} – координаты «центров тяжести» цилиндра и сферы соответственно; $z_{c1} = \frac{L}{2}$, а $z_{c2} = -\frac{R}{2}$. Последнее можно получить без интегрирования, воспользовавшись тем геометрическим свойством, что площадь сферической поверхности шарового сегмента линейна по его высоте:

$$S(h) = 2\pi R h. \quad (2)$$

Итак,

$$\mathbf{d} = q \left(\frac{L}{2} + \frac{R}{2} \right) \mathbf{e}_z = \frac{q}{2}(L + R)\mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Решение задачи 4

До замыкания пластин поле в конденсаторе можно найти из граничного условия на нормальные составляющие вектора поляризации:

$$\Delta P_n = -\sigma_{св},$$

где $\sigma_{св}$ – плотность связанных зарядов электрета.

Внутри электрета

$$P_{1n} = d_0 n_0,$$

снаружи (в пространстве между электретом и пластинами конденсатора)

$$P_{2n} = 0.$$

В электрете имеются только связанные заряды. Отсюда поверхностная плотность зарядов на границах электрета

$$\sigma_0 = d_0 n_0.$$

Тогда поле внутри электрета определяется как суперпозиция полей от двух противоположно заряженных бесконечных плоскостей *:

$$E_0 = 4\pi\sigma_0 = 4\pi d_0 n_0,$$

а разность потенциалов в зазоре конденсатора

$$U_0 = E_0 h = 4\pi\sigma_0 h = 4\pi d_0 n_0 h.$$

После замыкания пластин разность потенциалов между пластинами равна нулю. Это означает, что поле электрета компенсируется полем зарядов, натекших на пластины конденсатора. Плотность этих зарядов

$$\sigma = -\sigma_0 = -d_0 n_0,$$

а полный натекший заряд

$$Q = S\sigma = -Sd_0 n_0$$

(отрицательный заряд образуется на пластине, в сторону которой направлен вектор \mathbf{d}_0 , положительный – на противоположной).

В конечном состоянии поле внутри конденсатора равно нулю, поэтому и энергия системы равна нулю. В начальном состоянии напряженность поля равна

$$E_0 = 4\pi d_0 n_0,$$

плотность энергии равна

$$w = \frac{E_0^2}{8\pi} = 2\pi d_0^2 n_0^2,$$

* Объемная плотность заряда в электрете равна нулю, поскольку частицы с дипольными моментами электрически нейтральны.

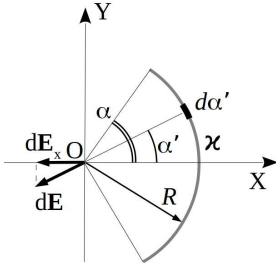
полная энергия

$$W = whS = 2\pi h S d_0^2 n_0^2. \quad (1)$$

Система «конденсатор – электрет» замкнутая. Поэтому разность энергий равна количеству теплоты, выделившемуся в проводнике.

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1



Ход решения идентичен тому, который применялся в задаче 1 варианта 1 (см. на с. 44).

Поэтому суммарное поле равно

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x,$$

где пределы интегрирования $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = \alpha$.

$$E_x = -\frac{\varkappa}{R} \sin \alpha' \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = -\frac{2\varkappa}{R} \sin \alpha = -\frac{\varkappa\sqrt{3}}{R}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\varkappa\sqrt{3}}{R} \mathbf{e}_x.$$

Решение задачи 2

Из задач, решаемых на семинарах или входящих в месячные задания (см., например, задачи 2.8, P20 из [1], 91

из [3]), известно, что поле внутри заданной сферы однородно и равно *

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0 \cdot \mathbf{e}_z.$$

Поток поля через плоскость $z = 0$ равен

$$\Phi = \pi R^2 E_1 = -\frac{4\pi^2 R^2}{3}\sigma_0.$$

Примечание. Полный заряд системы равен нулю. Поэтому из теоремы Гаусса следует, что снаружи от сферы нет силовых линий, уходящих на бесконечность. Это означает, что все они замыкаются с одной полусферы на другую. Отсюда следует, что в плоскости $z = 0$ полный поток поля снаружи равен потоку внутри сферы и отличается от него по знаку.

Решение задачи 3

Поскольку заданная система в целом нейтральна, ее дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Пусть тогда плоскость $z = 0$ будет пограничной между цилиндром и полусферой. Дипольный момент вычисляем по формуле

$$\mathbf{d} = (q \cdot z_{c1} - q \cdot z_{c2})\mathbf{e}_z,$$

где z_{c1} и z_{c2} – координаты «центров тяжести» основания цилиндра и сферы соответственно. $z_{c1} = L$, а $z_{c2} = -\frac{R}{2}$ (см. решение задачи 3 варианта 1 на с. 46).

Итак,

$$\mathbf{d} = q \left(L + \frac{R}{2} \right) \mathbf{e}_z = \frac{q}{2}(2L + R)\mathbf{e}_z.$$

*К этому результату приводит также решение с помощью полиномов Лежандра. Угловая зависимость плотности заряда указывает на то, что выражения для потенциала внутри и снаружи сферы содержат полиномы Лежандра 1-й степени.

Решение задачи 4

Исходно заряд на конденсаторе равен нулю. Поле в конденсаторе с электретом также равно нулю, но оно складывается из поля электрета и поля, создаваемого зарядами на пластинах конденсатора. Последний определяется, как в задаче 4 варианта 1 (см. на с. 48):

$$Q = S\sigma = -Sd_0n_0$$

(отрицательный заряд образуется на пластине, в сторону которой направлен вектор \mathbf{d}_0 , положительный – на противоположной).

Конечная энергия поля системы «конденсатор – электрет» меньше, чем начальная. Поэтому работа внешних сил на перемещении электрета отрицательна (электрет втягивается внутрь конденсатора). Соединительный провод считаем идеальным проводником, поэтому на джоулево тепло энергия не расходуется. Тогда по закону сохранения энергии работа равна разности энергий системы в конечном и начальном состояниях:

$$A = W' - W_0 = -2\pi h S d_0^2 n_0^2,$$

где энергия W_0 , запасенная в электрете, определяется так же, как в задаче 4 варианта 1 (см. на с. 48).

Примечание. Полный заряд, протекающий через проводник, здесь тот же, что и в варианте 1. При этом количество теплоты, выделившееся на активном сопротивлении проводника, оказывается разным. Противоречия нет, поскольку количество теплоты, выделяющееся на нагрузке, не задается однозначно сопротивлением нагрузки и величиной прошедшего через нее заряда. В общем случае количество джоулева тепла определяется также зависимостью тока от времени.

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1

Потенциал в центре создается зарядами на дуге и на сфере. Учитывая равноудаленность всех точек дуги и сферы от центра, этот потенциал выражается как

$$\varphi_0 = \frac{a\alpha\kappa}{a} + \frac{Q}{R}, \quad (1)$$

где Q – заряд на сфере.

Потенциал и поле всюду вне сферы равны нулю. Такое решение удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям $\varphi(R) = 0$, $\varphi(\infty) = 0$, поэтому по теореме единственности оно верно. Но из теоремы Гаусса следует, что это возможно, только если суммарный заряд дуги и сферы равен нулю. Отсюда заряд на сфере равен

$$Q = -a\alpha\kappa.$$

Подставим полученное значение в уравнение (1):

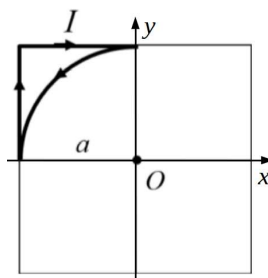
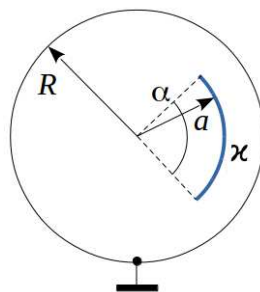
$$\varphi_0 = \alpha\kappa \left(1 - \frac{a}{R}\right).$$

Решение задачи 2

1) Из закона Био – Савара

$$\mathbf{B}(O) = \frac{I}{c} \int \frac{d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}'|^3}$$

следует, что магнитное поле в точке O направлено по нормали к плоскости контура с током. Причем из геометрии задачи понятно, что вклад



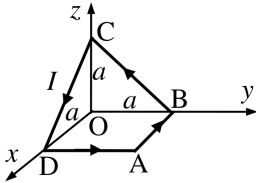
двух отрезков составляет одну четвертую часть от поля квадратного витка. Аналогично вклад дуги составляет одну четвертую часть от поля кругового витка и отличается по знаку от вклада двух отрезков:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{1}{4}(B_O - B_{\Pi})\mathbf{e}_z.$$

2) По закону Био – Савара поле от двух отрезков равно

$$B_{\Pi} = 2\frac{I}{c} \int_0^a \frac{ad\ell}{(\ell^2+a^2)^{3/2}} = 2\frac{I}{c} \frac{a\ell}{a^2\sqrt{\ell^2+a^2}} \Big|_{\ell=0}^{\ell=a} = \frac{I\sqrt{2}}{ca}.$$

Решение задачи 3



На больших расстояниях работает дипольное приближение:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где \mathbf{m} – магнитный дипольный момент контура с током.

Определим компоненты вектора \mathbf{m} .

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int \mathbf{r}' \times d\ell' = \frac{I}{2c} \int \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

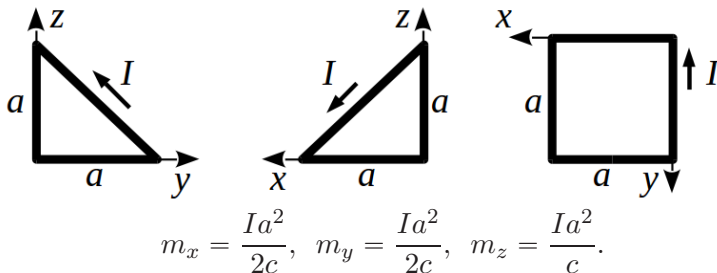
Видно, что i -компонента вектора \mathbf{m} получится, если вычесть i -компоненту из векторов \mathbf{r}' и $d\mathbf{r}'$ или, что то же, спроецировать контур на плоскость, нормальную по отношению к i -й оси координат:

$$|m_i| = \frac{I}{2c} \int |\mathbf{r}'_p \times d\mathbf{r}'_p|.$$

Интеграл представляет собой удвоенную площадь S_i фигуры, полученной проецированием контура на указанную плоскость, поэтому

$$m_i = \frac{IS_i}{c}.$$

Знак компоненты m_i определяется направлением вектора $\mathbf{r}'_p \times d\mathbf{r}'_p$: от нас, если направление обхода контура по ходу часовой стрелки; на нас – если против хода часовой стрелки. Изображаем проекции контура на плоскостях yz , xz и xy и вычисляем компоненты вектора \mathbf{m} :



$$m_x = \frac{Ia^2}{2c}, \quad m_y = \frac{Ia^2}{2c}, \quad m_z = \frac{Ia^2}{c}.$$

Подставим компоненты \mathbf{m} и \mathbf{r} в уравнение (1):

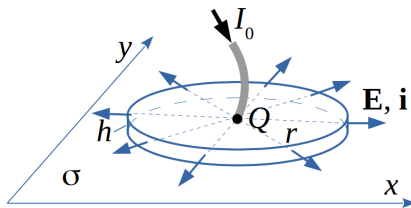
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{Ia^2}{2c(3b^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 2 \\ b & b & b \end{vmatrix} = \frac{Ia^2\sqrt{3}}{18cb^2}(-1, 1, 0).$$

Решение задачи 4

Решим задачу в более общем виде, придав пластине однородную конечную удельную проводимость σ^* . Токи

могут течь только в плоскости пластины. Поэтому и поле всюду внутри пластины $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i}}{\sigma^*}$ параллельно ее плоскости.

Далее, придадим пластине сколь угодно малую толщину h и будем считать, что конец провода утоплен в объеме пластины. Тогда зарядов в объеме пластины нет и они могут располагаться только на конце провода, на поверхности пластины и на границе $x = 0$. Запишем уравнение Гаусса для цилиндрической области, включающей конец



провода, но не касающейся поверхности пластины и границы $x = 0$:

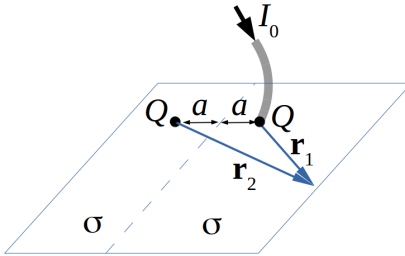
$$4\pi Q = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \approx \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma^*} \iint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= \frac{h}{\sigma^*} \oint_{r=\text{const}} i_n dl = \frac{I_0 h}{\sigma^*},$$

где Q – точечный заряд, сосредоточенный на конце провода. Отсюда

$$Q = \frac{I_0 h}{4\pi\sigma^*}. \quad (1)$$

Теперь найдем поле в пластине методом изображений^{*}. Решение будем искать как суперпозицию полей, создаваемых в бесконечном слое с проводимостью σ^* точечным

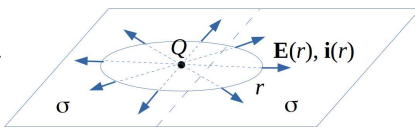


зарядом-оригиналом Q и таким же зарядом-изображением, находящимся симметрично оригиналу относительно плоскости $x = 0$.

Учтем, что поле \mathbf{E}_m , создаваемое отдельно m -м зарядом ($m = 1, 2$), ориентировано по радиусу в плоскости xy (поскольку так же ориентированы соответствующие токи), и величина этого поля зависит только от радиуса (для отдельного точечного заряда картина силовых линий поля получается симметричной относительно заряда).

^{*}В электростатике не существует общего метода изображений «для токов». Поэтому здесь применяется стандартный метод изображений для зарядов и полей.

Запишем теорему Гаусса, выбрав в качестве области интегрирования



цилиндр радиусом r и высотой h с осью, проходящей через заряд Q_m (на рисунке представлен случай $m = 2$ – поля, создаваемого зарядом-изображением):

$$\oiint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r_m h \mathbf{E}_m(r_m) = 4\pi h Q_m \Rightarrow \mathbf{E}_m = \frac{2Q_m h}{r_m} \mathbf{e}_{r_m}.$$

Тогда суммарное поле и плотность тока в пластине равны соответственно *

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{hr_1} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{2Q}{hr_2} \mathbf{e}_{r_2}, \quad \mathbf{i} = \frac{2Q\sigma^*}{hr_1} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{2Q\sigma^*}{hr_2} \mathbf{e}_{r_2}.$$

Подставив Q из (1), получим для поверхностного тока

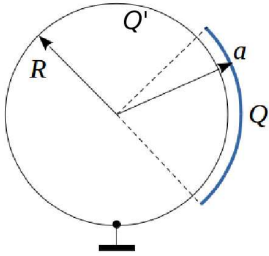
$$\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \frac{I_0}{2\pi r_1} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{I_0}{2\pi r_2} \mathbf{e}_{r_2}.$$

Полученный результат не зависит от проводимости и толщины пластины. Поэтому он применим и к случаю идеально проводящей полуплоскости.

* Такое решение удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ всюду внутри полуплоскости $x > 0$ и условию $j_n = 0$ всюду на границе пластины. По теореме единственности оно является единственным верным.

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1

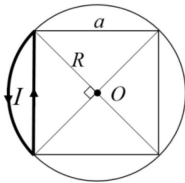


Потенциал внутри сферы однороден (свойство полой замкнутой проводящей оболочки). По принципу суперпозиции потенциал в центре сферы:

$$\frac{Q}{a} + \frac{Q'}{R} = 0 \rightarrow Q' = -\frac{R}{a}Q,$$

где Q' – заряд, индуцированный на сфере.

Решение задачи 2



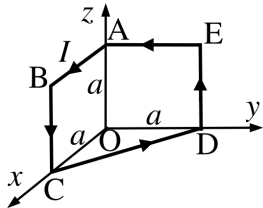
1) Совершенно аналогично задаче 2 варианта 2 (см. с. 65) получаем

$$\mathbf{H}(O) = \frac{1}{4}(B_O - B)\mathbf{e}_z.$$

2) По закону Био – Савара поле от отрезка равно

$$H = \frac{I}{c} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2} d\ell}{(\ell^2 + (\frac{a}{2})^2)^{3/2}} = \frac{I}{c} \frac{\frac{a}{2} \ell}{(\frac{a}{2})^2 \sqrt{\ell^2 + (\frac{a}{2})^2}} \Big|_{\ell=-\frac{a}{2}}^{\ell=\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}I}{ca}.$$

Решение задачи 3

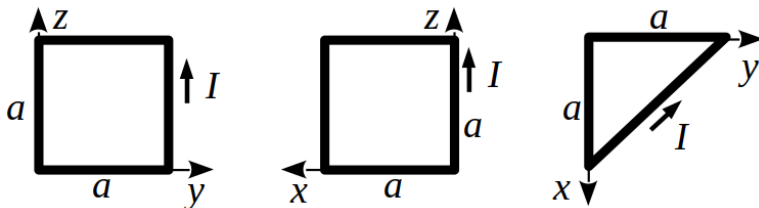


На больших расстояниях работает дипольное приближение:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где \mathbf{m} – магнитный дипольный момент контура с током.

Изображаем проекции контура на плоскостях yz , xz и xy и вычисляем компоненты вектора \mathbf{m} :



$$m_x = \frac{Ia^2}{c}, \quad m_y = \frac{Ia^2}{c}, \quad m_z = \frac{Ia^2}{2c}.$$

Подставим компоненты \mathbf{m} и \mathbf{r} в уравнение (1):

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{Ia^2}{2c(2b^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 2 & 1 \\ b & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{Ia^2\sqrt{2}}{8cb^2}(-1, 1, 0).$$

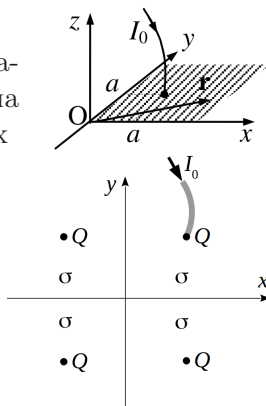
Решение задачи 4

Задача решается аналогично задаче 4 варианта 1 (см. на с. 54). Система зарядов-изображений состоит из трех точечных зарядов величиной Q , расположение которых показано на рисунке. При этом обеспечиваются условия $i_n = 0$ всюду на границе проводящей поверхности.

Для поверхностных токов получается решение

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \frac{I_0}{2\pi r_1^2} \mathbf{r}_1 + \frac{I_0}{2\pi r_2^2} \mathbf{r}_2 + \frac{I_0}{2\pi r_3^2} \mathbf{r}_3 + \frac{I_0}{2\pi r_4^2} \mathbf{r}_4,$$

где векторы \mathbf{r}_i исходят из i -го заряда в точку наблюдения.



Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

а) Пусть по соленоиду постоянный ток I . Напряженность поля внутри соленоида распределится однородно по его объему, будет направлена вдоль его оси и составит $H = \frac{4\pi In}{c}$ (это можно получить из теоремы Стокса). Тогда вектор магнитной индукции в сердечнике будет равен

$$B_\mu = \mu H = \frac{4\pi\mu In}{c}.$$

Способ 1. Энергия магнитного поля с одной стороны равна

$$W = \frac{LI^2}{2c}, \quad (1)$$

с другой

$$\begin{aligned} W &= V_0 w_0 + V_\mu w_\mu = l(S - s) \frac{H_0^2}{8\pi} + ls \frac{\mu H_0^2}{8\pi} = \\ &= \frac{H_0^2}{8\pi} l(S - s + \mu s) = \frac{(4\pi n)^2}{8\pi c^2} l(S + (\mu - 1)s) I^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим

$$L = 4\pi n N(S + s(\mu - 1)) = \frac{4\pi N^2(S + s(\mu - 1))}{l}$$

Способ 2. Суммарный поток поля через все витки соленоида равен

$$\Phi = N((S - s)H_0 + s\mu H_0) = N(S + s(\mu - 1)) \frac{4\pi In}{c} = \frac{LI}{c}$$

Индуктивность

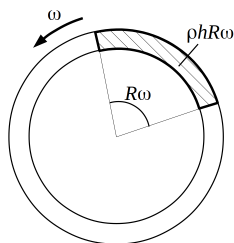
$$L = 4\pi n N(S + s(\mu - 1)) = \frac{4\pi N^2(S + s(\mu - 1))}{l}.$$

б) Случай сильного скин-эффекта равносително условию $\mu = 0$, поскольку в объеме сверхпроводника магнитное поле также не проникает:

$$L = \frac{4\pi N^2(S - s)}{l}.$$

Решение задачи 2

Выделим цилиндрическую трубку радиусом R толщиной dR . При вращении цилиндра по такой трубке течет эффективный азимутальный ток с поверхностной плотностью



$$dJ = \rho R \omega dR.$$

Элементарный магнитный момент трубки направлен по оси цилиндра и равен по модулю

$$dm = \frac{h \cdot dJ \cdot S}{c} = \frac{h \rho \omega R dR \cdot \pi R^2}{c} = \frac{\pi h \rho \omega R^3 dR}{c}.$$

Момент всего цилиндра получим интегрированием:

$$m = \frac{\pi h \rho \omega}{c} \int_0^a R^3 dR = \frac{\pi h \rho \omega a^4}{4c} = \frac{q \omega a^2}{4c}. \quad (1)$$

Поле на больших расстояниях от цилиндра находим как поле магнитного диполя:

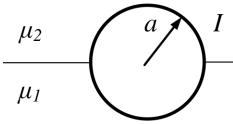
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$, а m задается выражением (1).

Решение задачи 3

Решение для поля нужно угадать. Проанализируем решение вида

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \begin{cases} 0, & R < a, \\ \frac{A_1 I}{cR} \mathbf{e}_\alpha, & \text{при } R > a \text{ в области 1,} \\ \frac{A_2 I}{cR} \mathbf{e}_\alpha, & \text{при } R > a \text{ в области 2.} \end{cases}$$



Это решение в объеме удовлетворяет уравнениям Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{V} = 0$. На плоской границе раздела выполняется граничное условие $\Delta H_\tau = 0$. Из граничного условия на плоской границе $\Delta B_n = 0$ получаем $A_1 = A_2 = A$. Постоянную A находим из теоремы Стокса для контура в виде окружности радиусом $R > a$ с центром на оси цилиндра:

$$\pi R \frac{AI}{\mu_1 c R} + \pi R \frac{AI}{\mu_2 c R} = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow A = \frac{4\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

С учетом выполнения условий теоремы единственности решение $\mathbf{V} = \frac{4\mu_1 \mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) c R} \mathbf{e}_z$ является единственно верным.

Плотность молекулярных токов на поверхности цилиндра находим из условия

$$\begin{aligned} \Delta B_{\tau 1,2} - \Delta H_{\tau 1,2} &= B_{\tau 1,2} - H_{\tau 1,2} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{Мол}1,2} \Rightarrow \\ \Rightarrow J_{\text{Мол}1,2} &= \frac{\mu_1 \mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi a} \left(1 - \frac{1}{\mu_{1,2}} \right) = \frac{\mu_{2,1} (\mu_{1,2} - 1) I}{\pi a (\mu_1 + \mu_2)}. \end{aligned}$$

Решение задачи 4

В начальном состоянии спица представляет собой электрический и магнитный диполь. Электрический дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = qa \mathbf{e}_x,$$

магнитный дипольный момент равен

$$\mathbf{m} = \frac{q\omega\pi a^2}{2\pi c} \mathbf{e}_z = \frac{qva}{2c} \mathbf{e}_z.$$

Силу на электрический диполь находим как силу взаимодействия между электрическим диполем-оригиналом и его изображением:

$$\mathbf{F}_q = -3 \frac{d^2}{(2a)^4} \mathbf{e}_z = -3 \frac{q^2}{16a^2} \mathbf{e}_z.$$

Аналогично находим силу на магнитный диполь:

$$\mathbf{F}_m = \frac{6m^2}{(2a)^4} \mathbf{e}_z = 6 \cdot \frac{q^2 v^2}{4 \cdot 16c^2 a^2} \mathbf{e}_z.$$

Полная сила равна

$$\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_q = \frac{6m^2 - 3d^2}{(2a)^4} \mathbf{e}_z.$$

В конечном состоянии остается только сила \mathbf{F}_q . В обоих случаях доминирует притяжение.

Абсолютное изменение силы совпадает с $-\mathbf{F}_m$. Относительное изменение

$$\frac{\Delta F_z}{F_z} = \frac{-F_m}{F_m - F_q} \approx \frac{F_m}{F_q} = \frac{v^2}{2c^2} > 0 \quad ().$$

Решение задачи 5

Считаем, что между поршнем и стенками зазора не образуется (для этого достаточно, чтобы на ширине поршня между ним и стенками имелся контакт хотя бы в одной точке). Тогда поток магнитного поля в прямоугольном сечении сохраняется. Отсюда в конечном положении магнитное поле равно

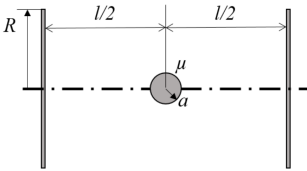
$$B_1 = 3B_0.$$

Работа на перемещении поршня равна разности энергий магнитного поля в начальном и конечном положении:

$$A = W_1 - W_0 = w_1 V_1 - w_0 V_0 = \\ = \frac{B_1^2 a^2 / 3 - B_0^2 a^2}{8\pi} L = \frac{3^2 / 3 - 1}{8\pi} B_0^2 a^2 L = \frac{B_0^2 a^2 L}{4\pi}.$$

Решение задачи 6

Пусть по первому кольцу ток I . Он создаст в точке расположения шарика магнитное поле



Он создаст в точке расположения шарика магнитное поле

$$B_0 = \frac{2\pi I R^2}{c r^3}.$$

Это поле создаст намагничение шарика, в результате чего он приобретет магнитный момент

$$m = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{B}_0.$$

Магнитное поле намагниченного шарика в области, занимаемой вторым кольцом, представляет собой поле диполя. Векторный потенциал этого поля равен

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{mR}{r^3} \mathbf{e}_\alpha. \quad (1)$$

Поток поля диполя через сечение второго кольца равно циркуляции вектор-потенциала по контуру кольца:

$$\Delta\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\ell = 2\pi R \cdot \frac{mR}{r^3} = 2\pi R \cdot \frac{(\mu-1)a^3}{(\mu+2)r^3} \frac{2\pi I R^2}{c r^3} R = \\ = \frac{4\pi^2(\mu-1)R^4 a^3}{(\mu+2)cr^6} I.$$

Отсюда находим изменение индуктивности

$$\Delta L = \frac{c\Delta\Phi}{I} = \frac{4\pi^2(\mu - 1)R^4 a^3}{(\mu + 2)r^6},$$

где $r = \sqrt{R^2 + l^2/4}$.

Решение задачи 7

Дополнительная мощность вырабатывается источником только при изменении магнитного потока внутри кольца. По закону Фарадея в кольце возникает э.д.с. $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{cdt}$ и вырабатывается мощность

$$P = I\mathcal{E}.$$

Тогда для дополнительной энергии W , вырабатываемой источником, имеем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{I\Delta\Phi}{cdt}.$$

Интегрируя по t , получаем

$$W = \frac{I\Delta\Phi}{c}.$$

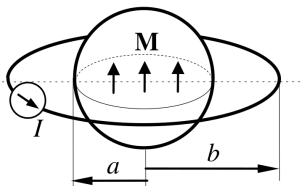
Теперь найдем изменение магнитного потока $\Delta\Phi$. Его удобно считать по формуле

$$\Delta\Phi = \Delta \oint \mathbf{A}_M \cdot d\ell,$$

где циркуляция вычисляется по длине кольца.

Однородно намагниченный шар формирует снаружи поле магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathbf{M}$. Вектор-потенциал диполя равен

$$\mathbf{A}_M = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{mb}{b^3}\mathbf{e}_\alpha = \frac{m}{b^2}\mathbf{e}_\alpha,$$



постоянен по модулю вдоль всего кольца.

Тогда

$$\Delta\Phi = 2\pi b \frac{m - (-m)}{b^2} = \frac{4\pi m}{b} = \frac{4\pi M}{b} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{16\pi^2 a^3 M}{3b}.$$

Искомая работа равна

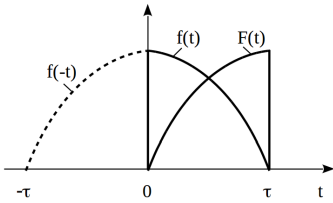
$$A = W = \frac{16\pi^2 a^3 M I}{3bc}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

Запишем преобразование Фурье от функции $f(-t)$:

$$\begin{aligned} f_-(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t}. \end{aligned}$$



Сравнивая подынтегральные выражения $f(\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}}$ и $f(t) e^{-i\omega t}$, замечаем, что их действительные части совпадают, а мнимые — отличаются по знаку. Поэтому Фурье-

образы связаны соотношением

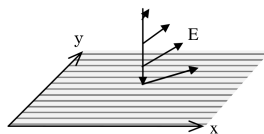
$$f_-(\omega) = -f^*(\omega).$$

По теореме о сдвиге искомый Фурье-образ равен

$$F(\omega) = -f^*(\omega) e^{i\omega\tau}.$$

Решение задачи 2

Волну с круговой поляризацией можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн, электрические поля в которых ориентированы по x и y соответственно.



Волна с E_y проходит сквозь пластину без отражения, так как по условию эта волна не вызывает в пластине никаких токов. Для волны с E_x выполняются следующие граничные условия

$$E_0 + E_1 = E_2$$

$$H_0 + H_1 - H_2 = \frac{4\pi}{c}i,$$

где индексы «0», «1» и «2» относятся к падающей, отраженной и прошедшей волнам соответственно.

Учитывая связь $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, выразим во втором уравнении H_i через E_i :

$$E_0 + E_1 = E_2$$

$$E_0 - E_1 - E_2 = \frac{4\pi}{c}i.$$

Подставим $i = \sigma^* E_2$:

$$E_0 + E_1 = E_2$$

$$E_0 - E_1 - E_2 = \frac{4\pi}{c}\sigma^* E_2.$$

Решая систему относительно неизвестных E_1 и E_2 , получим

$$E_1 = \frac{1}{1 + \frac{c}{2\pi\sigma^*}} E_0.$$

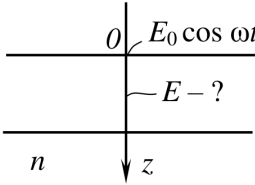
Интенсивность в падающей циркулярно поляризованной волне вдвое выше, чем в линейно поляризованной с

E_x , поэтому

$$R = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{c}{2\pi\sigma^*}\right)^2}.$$

Решение задачи 3

С учетом отсутствия отраженной волны граничные условия на верхней границе принимают вид



$$E_0 = E_2 + E_3$$

$$H_0 = H_2 + H_3,$$

где индексы «0», «2» и «3» относятся к падающей, прошедшей и отраженной от нижней границы волнам соответственно.

Учитывая связь $\mathbf{H} = n\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}$, выразим во втором уравнении H_i через E_i :

$$E_0 = E_2 + E_3$$

$$E_0 = n_2 E_2 - n_2 E_3$$

с решением

$$E_2 = \frac{n+1}{2n_2} E_0$$

$$E_3 = \frac{n-1}{2n_2} E_0.$$

Одно из условий просветления оптики $-k_2 d = \frac{\pi}{2}$. Тогда поле на половине глубины пленки равно

$$E_2 e^{ik_2 d/2} + E_3 e^{-ik_2 d/2} = \frac{(n_2+1)e^{i\frac{\pi}{4}} + (n_2-1)e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2n_2} E_0 e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(n_2+i)}{2n_2} E_0 e^{i\omega t}.$$

Выделяя действительную часть и учитывая второе условие просветления ($n_2 = \sqrt{n}$), получаем

$$E = \frac{\sqrt{n} \cos \omega t - \sin \omega t}{2\sqrt{n}} E_0 \sqrt{2}.$$

Решение задачи 4

E_{11} -волна раскладывается на четыре плоских ТМ-волны:

$$\begin{aligned} E_{11}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(k_z z - \omega t)} = \\ &= \frac{E_0}{4} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \frac{E_0}{4} e^{i(k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)} + \\ &+ \frac{E_0}{4} e^{i(-k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \frac{E_0}{4} e^{i(-k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)}, \end{aligned}$$

где $k_x = \frac{\pi}{a}$, $k_y = \frac{\pi}{b}$.

Направления каждой плоской волны различны, но угол падения одинаковый и определяется условием

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} = \sin^2 \theta_0.$$

Учтем, что $k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\omega_{11}^2}{c^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$. Тогда

$$\sin \theta_0 = \frac{\omega_{11}}{\omega} = \frac{1}{2} \quad \theta = 30^\circ.$$

По закону преломления

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = n = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta_2 = 45^\circ.$$

Коэффициент отражения отдельно для каждой плоской волны определяется формулой Френеля

$$\zeta = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} = \frac{\operatorname{tg}(-15^\circ)}{\operatorname{tg}(75^\circ)}.$$

По принципу суперпозиции таким коэффициентом отражения обладает и E_{11} -волна. Искомый коэффициент отражения по интенсивности равен

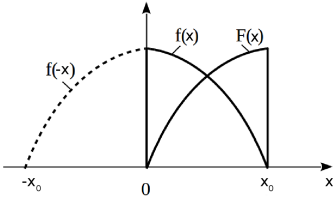
$$R = \zeta^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 15^\circ}{\operatorname{tg}^2 75^\circ} \approx 0,005.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Запишем преобразование Фурье от функции $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x}. \end{aligned}$$



Сравнивая подынтегральные выражения $f(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}}$ и $f(x) e^{ikx}$, замечаем, что их действительные части совпадают, а мнимые – отличаются по знаку. Поэтому Фурье-

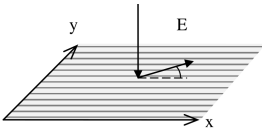
образы связаны соотношением

$$f_-(k) = f^*(k).$$

По теореме о сдвиге искомый Фурье-образ равен

$$F(k) = f^*(k) e^{-ikx_0}.$$

Решение задачи 2



Падающую волну можно разложить на две линейно поляризованные волны – с компонентой \mathbf{E}_{\parallel} , параллельной дорожкам, и компонентой \mathbf{E}_{\perp} , перпендикулярной им. Последняя волна не вызывает никаких процессов в пластине и проходит через нее без отражения. К первой волне применимо решение задачи 2 варианта 1 (см. с. 65), откуда получим

$$E_{\parallel 1} = \frac{1}{1 + \frac{c}{2\pi\sigma^*}} E_{\parallel 0}.$$

Коэффициент отражения по интенсивности определяется как

$$R = \frac{E_{\parallel 1}^2}{E_0^2} = \frac{E_{\parallel 1}^2 \cos^2 \alpha}{E_{\parallel 0}^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 + \frac{c}{2\pi\sigma^*}\right)^2}.$$

Решение задачи 3

Решение для поля в пленке берем из задачи 3 варианта 1 с идентичными условиями (см. на с. 66):

$$\begin{aligned} E_2 e^{ik_2 d/3} + E_3 e^{-ik_2 d/3} &= \frac{(n_2+1)e^{i\frac{\pi}{6}} + (n_2-1)e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2n_2} E_0 e^{i\omega t} = \\ &= \frac{\sqrt{3}n_2+i}{2n_2} E_0 e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Выделяя действительную часть и учитывая второе условие просветления ($n_2 = \sqrt{n}$), получаем

$$E = \frac{\sqrt{3n} \cos \omega t - \sin \omega t}{2\sqrt{n}} E_0 \sqrt{2}.$$

Решение задачи 4

H_{11} -волна раскладывается на четыре плоских ТЕ-волны:

$$\begin{aligned} H_{11}(\mathbf{r}, t) &= H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(k_z z - \omega t)} = \\ &= \frac{H_0}{4} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \frac{H_0}{4} e^{i(k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)} + \\ &+ \frac{H_0}{4} e^{i(-k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \frac{H_0}{4} e^{i(-k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)}, \end{aligned}$$

где $k_x = \frac{\pi}{a}$, $k_y = \frac{\pi}{b}$.

Направления каждой плоской волны различны, но угол падения одинаковый и определяется условием

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} = \sin^2 \theta_0.$$

Учтем, что $k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\omega_{11}^2}{c^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$. Тогда

$$\sin \theta_0 = \frac{\omega_{11}}{\omega} = \frac{1}{2} \quad \theta = 30^\circ.$$

По закону преломления

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = n = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta_2 = 45^\circ.$$

Коэффициент отражения отдельно для каждой плоской волны определяется формулой Френеля

$$\xi = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

По принципу суперпозиции таким коэффициентом отражения обладает и H_{11} -волна. Искомый коэффициент отражения по интенсивности равен

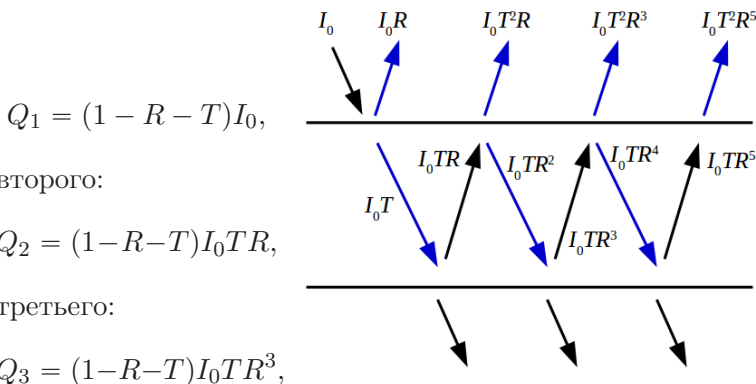
$$R = \xi^2 = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin^2 75^\circ} \approx 0,07.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

В данной задаче необходимо учитывать многократное отражение волн в промежутке между пластинами. Поскольку расстояние между пластинами превышает длину когерентности, то складываются интенсивности волн, возникающих вследствие многократных отражений. На рисунке

схематически в виде лучей показаны падающие, отраженные и проходящие через первую пластину волны. Поглощаемая плотность мощности за счет первого падающего луча равна



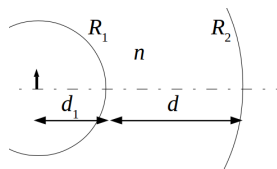
n -го: $Q_n = (1 - R - T)I_0T \cdot R^{2n-3}.$

Полная плотность мощности складывается из Q_1 и суммы членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = R^2$, начинающейся с Q_2 :

$$Q = (1 - R - T)I_0 + I_0TR \frac{1-R-T}{1-R^2} = \frac{(1-R-T)(1-R^2+TR)}{1-R^2} I_0.$$

Решение задачи 2

Применим матричный формализм. В качестве оптической системы будем рассматривать вогнуто-выпуклую линзу с радиусами $R_1 = = R, R_2 = 3R$ и показателем преломления $n = 3/2$. Матрица линзы:



$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{R_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{n-1}{R_1 R_2} (R_2 - R_1 + \frac{n-1}{n} d) & \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{R_2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу знаков $R_1 = -R$, $R_2 = -3R$. Толщина линзы $d = 2R$. Тогда

$$M = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{n-1}{n} & \frac{2R}{n} \\ -\frac{n-1}{3R} (1 - 3 + 2\frac{n-1}{n}) & -\frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4R}{3} \\ \frac{2}{9R} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Предмет находится на расстоянии $d_1 = R$ от левой границы линзы. Тогда расстояние d_2 от правой границы до изображения справа находим по формуле *

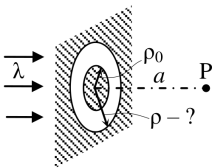
$$d_2 = -\frac{d_1 m_{11} + m_{12}}{d_1 m_{21} + m_{22}} = -\frac{\frac{5R}{3} + \frac{4R}{3}}{\frac{2}{9} + \frac{7}{9}} = -3R < 0.$$

Изображение находится на расстоянии $3R$ слева от правой границы линзы, то есть там же, где и предмет.

Увеличение равно

$$K = m_{21}d_2 + m_{11} = \frac{2}{9R} \cdot (-3R) + \frac{5}{3} = 1.$$

Решение задачи 3



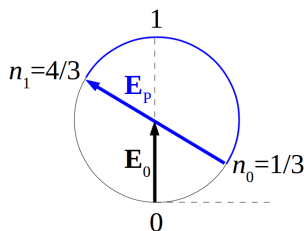
Для того чтобы интенсивность в точке наблюдения была в 4 раза выше, чем в отсутствие экрана, вклад открытого кольца в амплитуду волны должен быть, как от полной зоны Френеля.

ля.

Внутренний радиус кольца $\rho_0 = \sqrt{n_0 \lambda a} = \sqrt{\frac{\lambda a}{3}}$ ограничивает $n_0 = \frac{1}{3}$ зоны Френеля (закрытой). Поэтому внешний радиус должен ограничивать $n_1 = 1 + n_0 = \frac{4}{3}$ зоны Френеля и составлять

* Данная формула в других обозначениях приводится, например, на с. 92 в учебном пособии [6].

$$\rho = \sqrt{n_1 \lambda a} = \sqrt{\frac{4}{3} \lambda a} = 2\rho_0.$$



На рисунке показана диаграмма Френеля. Поле в точке P вдвое превышает по амплитуде поле в падающей волне и опережает ее по фазе на 60° .

Решение задачи 4

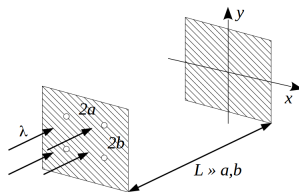
Сначала получим некоторые общие выражения. Пусть положение точечного источника задается координатами (x_0, y_0) , а положение точки наблюдения на экране – (x, y) . Тогда для длины хода луча из источника в точку наблюдения имеем

$$r^2 = L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

$$r = \sqrt{L^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = L\sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{L^2}} \approx$$

$$\approx L \left(1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L^2} \right) = L + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L}.$$

Волны, отраженные от зеркал, удобно описывать как идущие от точек-изображений. Прономеруем точечные источники следующим образом:



$$(x_{01}, y_{01}) = (a, b), \quad (x_{02}, y_{02}) = (a, -b),$$

$$(x_{03}, y_{03}) = (-a, b), \quad (x_{04}, y_{04}) = (-a, -b).$$

Тогда оптические длины хода лучей из разных источ-

ников в точку наблюдения можно представить как

$$r_1 = r_0 - \frac{a \cdot x + b \cdot y}{L}, \quad r_2 = r_0 + \frac{-a \cdot x + b \cdot y}{L},$$

$$r_3 = r_0 + \frac{a \cdot x - b \cdot y}{L}, \quad r_4 = r_0 + \frac{a \cdot x + b \cdot y}{L}.$$

где $r_0(x, y) = L + \frac{x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2}{2L} = L + \frac{x^2 + y^2 + a^2 + b^2}{2L}$.

Для вычисления суммарной амплитуды волны в точке наблюдения необходимо учесть скачок по фазе на π , возникающий при отражении от плоскости $y = 0$ (для TE -волн). Суммарная амплитуда равна

$$E(x, y) = E_0 e^{-i\omega t} (e^{ikr_1} - e^{ikr_2} + e^{ikr_3} - e^{ikr_4}) =$$

$$= E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(e^{ik \frac{-ax - by}{L}} - e^{ik \frac{-ax + by}{L}} + e^{ik \frac{ax - by}{L}} - e^{ik \frac{ax + by}{L}} \right) =$$

$$= E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(e^{-ik \frac{ax}{L}} \left(e^{-ik \frac{by}{L}} - e^{ik \frac{by}{L}} \right) + \right.$$

$$\left. + e^{ik \frac{ax}{L}} \left(e^{-ik \frac{by}{L}} - e^{ik \frac{by}{L}} \right) \right) = -4i E_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \cos k \frac{ax}{L} \sin k \frac{by}{L}.$$

Интенсивность волны равна:

$$I(x, y) = \frac{c}{8\pi} \text{Re}\{E(x, y)H^*(x, y)\} =$$

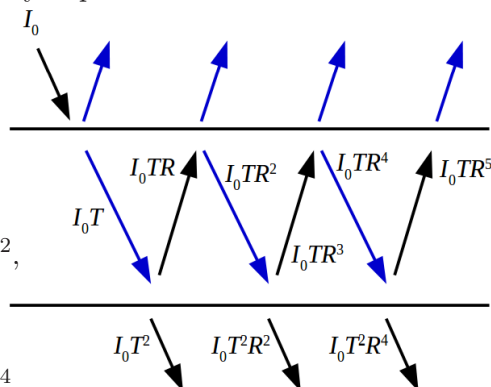
$$= 16 \frac{c}{8\pi} E_0^2 \cos^2 \left(k \frac{ax}{L} \right) \sin^2 \left(k \frac{by}{L} \right) = 16 I_0 \cos^2 \left(k \frac{ax}{L} \right) \sin^2 \left(k \frac{by}{L} \right),$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

В данной задаче необходимо учитывать многократное отражение волн в промежутке между пластинами. Поскольку расстояние между пластинами превышает длину когерентности, то складываются интенсивности волн, возникающих вследствие многократных отражений. На рисунке схематически в виде лучей показаны падающие, отраженные и проходящие через вторую пластину волны. Поглощаемая плотность мощности за счет первого падающего на вторую пластину луча равна

$$Q_1 = (1-R-T)TI_0,$$


второго:

$$Q_2 = (1-R-T)I_0TR^2,$$

третьего:

$$Q_3 = (1-R-T)I_0TR^4,$$

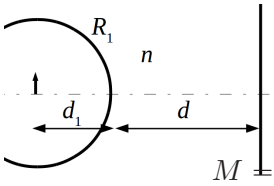
n -го:

$$Q_n = (1-R-T)I_0T \cdot R^{2n-2}.$$

Полная плотность мощности равна сумме членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = R^2$, начинающейся с Q_1 :

$$Q = I_0T \frac{1-R-T}{1-R^2} = \frac{(1-R-T)T}{1-R^2} I_0.$$

Решение задачи 2



Аналогично задаче 2 варианта 1 (см. с. 71) с учетом $R_2 = \infty$ получаем

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{R_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{n-1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу знаков $R_1 = -R$. Толщина линзы $d = 2R$. Тогда

$$M = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{n-1}{n} & \frac{2R}{n} \\ \frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4R}{3} \\ \frac{1}{2R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Предмет находится на расстоянии $d_1 = R$ от левой границы линзы. Тогда расстояние d_2 от правой границы до изображения справа находим по формуле

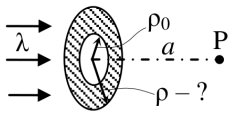
$$d_2 = -\frac{d_1 m_{11} + m_{12}}{d_1 m_{21} + m_{22}} = -\frac{\frac{5R}{3} + \frac{4R}{3}}{\frac{1}{2} + 1} = -2R < 0.$$

Изображение находится на расстоянии $2R$ слева от правой границы линзы.

Увеличение равно

$$K = m_{21}d_2 + m_{22} = \frac{1}{2R} \cdot (-2R) + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

Решение задачи 3

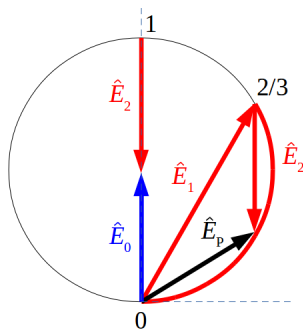


Область внутри кольца составляет $2/3$ первой зоны Френеля. Ее вклад в поле \hat{E}_P показан на диаграмме Френеля в виде вектора \hat{E}_1 . Вклад в \hat{E}_P от

области отверстия $\rho < r < \infty$ на диаграмме Френеля будет представлен вектором \hat{E}_2 , начало которого находится на окружности радиусом E_0 (положение этого начала определяется числом зон Френеля, укладываемых в отверстие радиусом ρ), а конец – в центре этой окружности.

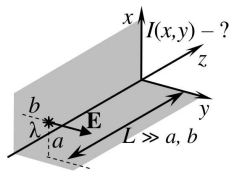
Для того чтобы интенсивность в точке наблюдения была такой же, как в отсутствие экрана, сумма векторов \hat{E}_1 и \hat{E}_2 должна давать вектор, равный по модулю E_0 . Минимальный внешний радиус кольца, при котором выполняется это условие, соответствует полной первой зоне Френеля и составляет $\rho =$

$= \sqrt{\lambda a}$. Тогда вектор \hat{E}_2 направлен вниз, а вектор $\hat{E}_P = \hat{E}_1 + \hat{E}_2$ равен по амплитуде полю в отсутствие экрана и отстает от него по фазе на $\pi/3$ (см. диаграмму Френеля).



Решение задачи 4

Единственное отличие от задачи 4 варианта 1 (см. с. 73) состоит в том, что TE -волна теперь отражается от плоскости yz . Это приводит к следующему выражению для интенсивности волны:



$$I(x, y) = 16I_0 \sin^2 \left(k \frac{ax}{L} \right) \cos^2 \left(k \frac{by}{L} \right),$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 + E_1 = E_2 \\ H_0 + H_1 - H_2 = \frac{4\pi}{c} J \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_0 + E_1 = E_2 \\ n_1 E_0 - n_1 E_1 - n_2 E_2 = \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_2 \end{array} \right.$$

Введем переменные $\xi_1 = \frac{E_1}{E_0}$, $\xi_2 = \frac{E_2}{E_0}$. Тогда система в матричной форме примет вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ n_1 & n_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^* & n_1 \end{array} \right) \xi_1 = \frac{n_1 - (n_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^*)}{n_1 + n_2 + \frac{4\pi}{c} \sigma^*}.$$

Решение задачи 2

Зонная пластинка фокусирует параллельный пучок света так же, как собирающая линза с фокусным расстоянием f_1 . Тогда искомая оптическая сила рассчитывается как для системы из сдвоенных линз:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{f_1 f_2}{f_2 - f_1},$$

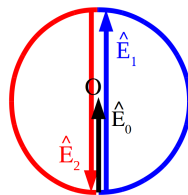
где перед $\frac{1}{f_2}$ поставлен знак «-», так как линза рассеивающая. Отсюда

$$F = \frac{f_2 - f_1}{f_1 f_2}.$$

Решение задачи 3

Без стеклянного диска вклад первой зоны Френеля составляет $\hat{E}_1 = 2\hat{E}_0$, второй $\hat{E}_2 = -2\hat{E}_0$ (см. диаграмму Френеля). Диск приводит к сдвигу по фазе для всех вторичных волн, исходящих из первой зоны Френеля.

На диаграмме Френеля этому сдвигу отвечает поворот вектора \hat{E}_1 относительно центра O . Для того чтобы суммарный вектор был максимальным по амплитуде, угол поворота вектора \hat{E}_1 должен составлять π (см. диаграмму Френеля).

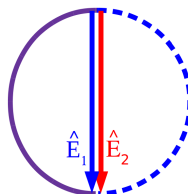


Условие на минимальную толщину диска

$$d(n - 1) = \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$d = \frac{\lambda}{2(n - 1)}.$$



Решение задачи 4

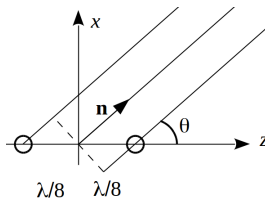
Под действием электрического поля электромагнитной волны происходит поляризация шариков. Используя решение соответствующей статической задачи, получим выражение для наведенного дипольного момента шарика с центром в точке \mathbf{r} :

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y = d_0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y.$$

Соответствующее выражение для $\ddot{\mathbf{d}}$:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{r}, t) = -d_0 \omega^2 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y.$$

Поместим начало системы координат на середину отрезка, соединяющего центры шариков. Шарики излучают волну с магнитным полем в волновой зоне, равным соответ-



СТВЕННО

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\ddot{\mathbf{d}}_1 \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \frac{d_0 \omega^2}{c^2 r} e^{i(kr + k \frac{\lambda}{8} \cos \theta - \pi/4 - \omega t)} \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\ddot{\mathbf{d}}_2 \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \frac{d_0 \omega^2}{c^2 r} e^{i(kr - k \frac{\lambda}{8} \cos \theta + \pi/4 - \omega t)} \mathbf{e}_y.$$

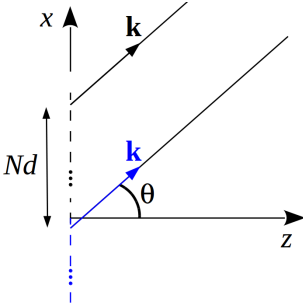
Суммарное магнитное поле в точке наблюдения равно

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{d_0 \omega^2}{c^2 r} \cos\left(\frac{\pi}{4}(\cos \theta - 1)\right) e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_y = \\ &= \frac{d_0 \omega^2}{c^2 r} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Интенсивность в единицу телесного угла равна

$$\frac{dI}{d\Omega} = r^2 \langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} r^2 H^2 = \frac{d_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Решение задачи 5



Волны, отраженные от зеркала, удобно описывать как исходящие из изображений щелей. С учетом скачка по фазе на π , возникающего при отражении, амплитуды всех этих волн умножаются на (-1) . Поставим в соответствие каждой m -й щели ее изображение, находящееся ниже

на расстоянии Nd . Тогда поле от такой пары щелей можно записать как

$$\begin{aligned} \hat{E}_m + \hat{E}_m' &= \hat{E}_m (1 - e^{ik_x Nd}) = \hat{E}_m e^{i \frac{k_x Nd}{2}} \times \\ &\times \left(e^{-i \frac{k_x Nd}{2}} - e^{i \frac{k_x Nd}{2}} \right) = -2i \hat{E}_m e^{i \frac{k_x Nd}{2}} \sin \frac{k_x Nd}{2}, \end{aligned}$$

а суммарное поле и интенсивность от всей решетки с учетом отражения *

$$\begin{aligned}\hat{E}(\theta) &= -2i e^{i\frac{k_x Nd}{2}} \sin \frac{k_x Nd}{2} \sum \hat{E}_{m0}(\theta) = \\ &= -2i e^{i\frac{k_x Nd}{2}} \sin \frac{k_x Nd}{2} \hat{E}_L(\theta), \quad I(\theta) = 4I_L(\theta) \sin^2 \frac{Nk_x d}{2}.\end{aligned}$$

Решение задачи 6

Для устойчивой связи сигналы, вышедшие с каждого вибратора, должны приходить в точку наблюдения с одной и той же фазой. Фаза в точке наблюдения от m -го вибратора равна

$$\phi_m = \phi_{m0} + kr_m, \quad (1)$$

где r_m – расстояние между m -м вибратором и точкой наблюдения. С учетом малости параметра $\frac{h}{r}$ это расстояние равно

$$\begin{aligned}r_m &= \sqrt{(x_0 + ma)^2 + H^2} = \sqrt{x_0^2 + 2x_0ma + (ma)^2 + H^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + 2x_0ma + (ma)^2} \approx R\sqrt{1 + \frac{2x_0ma}{R^2}} \approx R\left(1 + \frac{x_0ma}{R^2}\right).\end{aligned}$$

Здесь x_0 – расстояние по x между крайним левым вибратором и точкой наблюдения ("своим").

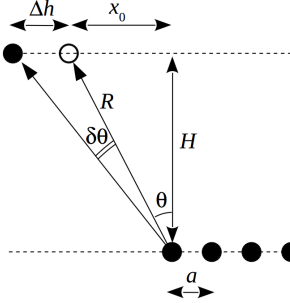
*Полученный ответ обобщается на случай произвольной оптической системы, зеркальное изображение которой можно получить сдвигом на расстояние h (дифракция горизонтального пучка света на щели или интерференция от эквидистантно расположенных синфазных источников). Например, в схеме интерференции с зеркалом Ллойда:

$$I(\theta) = 2I_0(1 - \cos \frac{khx}{L}) = 2I_0(1 - \cos(kh\theta)) = 4I_0 \sin^2 \frac{k_x h}{2},$$

где I_0 – интенсивность на экране в отсутствие зеркала, а L и $\frac{h}{2}$ – расстояния от источника до экрана и зеркала соответственно.

Для того чтобы ϕ_m не зависела от m , должно быть

$$\phi_{m0} = -\frac{kx_0ma}{R} = -\frac{k\sqrt{R^2 - H^2}ma}{R} = -mka\sqrt{1 - \frac{H^2}{R^2}}.$$



Для анализа сигнала, принимаемого "чужим", воспользуемся следующим подходом. Линейка вибраторов, расположенных эквидистантно и излучающих с линейно нарастающим сдвигом по фазе, формирует такое же поле, как и дифракционная решетка.

Тогда считаем, что, когда "свой" находится в максимуме, "чужой" должен оказаться в ближайшем нуле (минимуме). Итак, интенсивность излучения описывается формулой для интенсивности за дифракционной решеткой:

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2 \frac{kNa(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2}}{\sin^2 \frac{ka(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2}},$$

где θ_0 соответствует сдвигу фаз токов соседних вибраторов и отсчитывается вместе с θ относительно вертикали (нормали к нашей "решетке").

Расстояние по углу между главным максимумом (условие $\frac{kNa(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2} = 0$) и ближайшим к нему нулю (условие $\frac{kNa(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2} = \pi$) определяется равенством

$$\delta \left(\frac{kNa(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2} \right) \approx \frac{kNa}{2} (\sin \theta)' \delta \theta = \frac{kNa}{2} \cos \theta \delta \theta = \pi,$$

откуда необходимое угловое расстояние между максимумом и минимумом излучения равно

$$\delta \theta = \frac{2\pi}{kNa \cos \theta} = \frac{\lambda}{Na \cos \theta}.$$

С другой стороны это угловое расстояние составляет

$$\delta\theta = \frac{\Delta h \cos \theta}{R}.$$

Из условия $\frac{\lambda}{Na \cos \theta} = \frac{\Delta h \cos \theta}{R}$ находим

$$N = \frac{R\lambda}{a\Delta h \cos^2 \theta} = \frac{R\lambda}{a\Delta h} \cdot \frac{R^2}{H^2} = \frac{\lambda R^3}{a\Delta h H^2}.$$

Решение задачи 7

Стоячая волна является суперпозицией двух встречных волн с составляющими:

$$\hat{E}_x = E_0 e^{i(kz-\omega t)} - E_0 e^{i(-kz-\omega t)} = 2iE_0 \sin kz e^{-i\omega t},$$

$$\hat{H}_y = H_0 e^{i(kz-\omega t)} + H_0 e^{i(-kz-\omega t)} = 2E_0 \cos kz e^{-i\omega t}.$$

Переходя к действительным выражениям, получим

$$E_x(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t, \quad H_y(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \cos kz \cos \omega t.$$

Искомые потери энергии выражаются формулой

$$\Delta \mathcal{E} = A \int_0^{L/v} \{(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2\} dt, \quad (1)$$

где $A = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \gamma^2$.

Проанализируем подынтегральное выражение:

$$(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2 = (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2.$$

$$\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}] =$$

$$= 2E_0 \mathbf{e}_x \sin kz \sin \omega t + 2E_0 \boldsymbol{\beta} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y] \cos kz \cos \omega t =$$

$$= 2E_0 \mathbf{e}_x (\sin kz \sin \omega t - \beta \cos kz \cos \omega t) \approx$$

$$\approx 2E_0 \mathbf{e}_x (\sin kz \sin \omega t - \cos kz \cos \omega t) = -2E_0 \mathbf{e}_x \cos(kz + \omega t).$$

Тогда выражение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= 4A \int_0^{\frac{L}{v}} E_0^2 \cos^2(kz + \omega t) dt = 4A \int_0^L E_0^2 \cos^2(kz + \omega \frac{z}{v}) \frac{dz}{v} \approx \\ &\approx \frac{4AE_0^2}{c} \int_0^L \cos^2(kz + \omega \frac{z}{c}) dz \approx \frac{4AE_0^2}{c} \int_0^L \cos^2(2kz) dz = \frac{4E_0^2 e^4}{3m^2 c^4} \gamma^2 L,\end{aligned}$$

где учтено, что промежуток интегрирования содержит большое число периодов функции $\cos^2(2kz)$.

Условие задачи соответствует излучению релятивистской заряженной частицы при поперечном по отношению к скорости ускорении. В этом случае максимум излучения лежит на направлении скорости.

2018/2019 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

В силу сферической симметрии задачи искомое поле направлено по радиусу, а его величина зависит только от радиуса. Тогда применим теорему Гаусса для шара радиусом r с центром в начале координат. При $0 \leq r \leq a$ имеем

$$\oiint \mathbf{E}(r) d\mathbf{S} = 4\pi Q(r),$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \int \rho(r') dV',$$

$$4\pi r^2 \mathbf{E}(r) = 16\pi^2 a^2 \rho_0 \int_0^r \sin \frac{2\pi r'}{a} dr'.$$

$$E(r) = 4\pi \frac{a^2 \rho_0}{r^2} \int_0^r \sin \frac{2\pi r'}{a} dr' = 2 \frac{a^3 \rho_0}{r^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi r}{a}\right).$$

При $r > a$ теорема Гаусса принимает вид

$$\oiint \mathbf{E}(r) d\mathbf{S} = 4\pi Q(a),$$

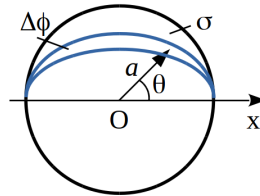
$$E(r) = 4\pi \frac{a^2 \rho_0}{r^2} \int_0^a \sin \frac{2\pi r'}{a} dr' = 4\pi \frac{a^2 \rho_0}{r^2} \frac{a}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi a}{a}\right) = 0.$$

Решение задачи 2

Эту задачу можно решать интегрированием по длине кольца, но здесь приводится более изящный способ. Заметим, что полуокружность с заданным распределением плотности заряда получается, если из равномерно заряженной сферы вырезать полоску шириной $\Delta\phi$ (в сферических переменных, см. рисунок). Действительно, тогда эффективная линейная плотность заряда будет зависеть от θ как

$$\kappa = \frac{\sigma dS}{ad\theta} = \frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta \Delta\phi}{ad\theta} = \sigma a \sin \theta \Delta\phi, \quad \kappa_0 = \sigma a \Delta\phi.$$

Сферу можно составить из N таких полосок шириной $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$ каждая. С учетом принципа суперпозиции и аксиальной симметрии задачи отдельная полоска будет создавать на оси Ox поле с x -проекцией, в N раз меньшей, чем поле от всей сферы*. Но для равномерно заряженной сферы ($\Delta\phi \rightarrow 2\pi$) по теореме Гаусса поле снаружи равно $\frac{4\pi a^2 \sigma}{x^2}$, а внутри – нулю. Поэтому x -проекцию поля от отдельной полоски получим заменой $2\pi \rightarrow \Delta\phi$:



$$|x| > a : E_x^*(x) = \frac{2\Delta\phi a^2 \sigma}{x^2} = \frac{2\Delta\phi a^2 \kappa_0}{a\Delta\phi x^2} = \frac{2a\kappa_0}{x^2}.$$

*Из сказанного следует, что полоска произвольной ширины ($0 < \Delta\phi < 2\pi$) и полуокружность с заданным распределением линейной плотности заряда создают на оси Ox одну и ту же x -проекцию поля $E_x(x)$ с точностью до постоянного множителя.

Рассмотренная полоска представляет собой полуокружность – от окружности получится вдвое большее поле:

$$E(x) = 2E_x^*(x) = \frac{4a\kappa_0}{x^2}.$$

При $|x| < a$ $E_x(x) = 0$.

Решение задачи 3

Пусть на внутренней обкладке содержится заряд с линейной плотностью κ . Тогда электрическая индукция в зазоре между обкладками равна *

$$\mathbf{D}(r) = \frac{2\kappa}{r} \mathbf{e}_r,$$

а напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}(r)}{\varepsilon(r)} = \frac{2\kappa}{b} \operatorname{ctg} \frac{r}{a} \mathbf{e}_r.$$

Падение напряжения между обкладками составит

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b E(r) dr = \frac{2\kappa}{b} \int_a^b \operatorname{ctg} \frac{r}{a} dr = \frac{2\kappa a}{b} \ln \sin \frac{r}{a} \Big|_{r=a}^{r=b} = \\ &= \frac{2\kappa a}{b} (\ln \sin \frac{b}{a} - \ln \sin 1) = \frac{2\kappa a}{b} \ln \frac{\sin \frac{b}{a}}{\sin 1}. \end{aligned}$$

Емкость на единицу длины равна

$$C = \frac{\kappa}{U} = \frac{b}{2a \ln \frac{\sin \frac{b}{a}}{\sin 1}}.$$

*Электрическая индукция находится из теоремы Гаусса так же, как и поле бесконечной прямой заряженной нити.

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1

В силу аксиальной симметрии задачи искомое поле направлено по радиусу и его величина зависит только от радиуса. Тогда применим теорему Гаусса для цилиндра радиусом R с осью z . При $0 \leq r \leq a$ имеем

$$\oiint \mathbf{E}(R) d\mathbf{S} = 4\pi Q(r), \quad E(R) \cdot 2\pi R h = 4\pi \int \rho(r') dV',$$

$$2\pi R h E(R) = 4\pi \int \frac{a}{r'} \rho_0 \cos \frac{2\pi r'}{a} \cdot 2\pi r' h dr' =$$

$$= 4\pi \cdot 2\pi a h \rho_0 \int \cos \frac{2\pi r'}{a} dr'.$$

$$E(R) = 4\pi \frac{a\rho_0}{R} \int_0^R \cos \frac{2\pi r'}{a} dr' = 4\pi \frac{a\rho_0}{R} \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi R}{a} = 2 \frac{a^2 \rho_0}{R} \sin \frac{2\pi R}{a}.$$

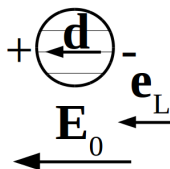
При $R > a$ теорема Гаусса принимает вид

$$\oiint \mathbf{E}(R) d\mathbf{S} = 4\pi Q(a),$$

$$E(R) = 4\pi \frac{a\rho_0}{R} \int_0^a \sin \frac{2\pi r'}{a} dr' = 4\pi \frac{a\rho_0}{R} \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi a}{a} = 0.$$

Решение задачи 2

В поле нити шар поляризуется и приобретает дипольный момент, зависящий от величины этого поля. Поэтому шар является упругим диполем. Сила на упругий диполь в слабонеоднородном поле определяется по формуле



$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}). \quad (1)$$

Дипольный момент находим, считая поле однородным и равным $E_0 = \frac{2\chi}{L}$ (см. задачу 2.51 из [1]):

$$d = R^3 E_0 = R^3 \frac{2\chi}{L} = \frac{2\chi R^3}{L}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\mathbf{F} = \nabla \frac{1}{2}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial L} \frac{2\chi^2 R^3}{L^2} \mathbf{e}_L = -2 \frac{2\chi^2 R^3}{L^3} \mathbf{e}_L = -\frac{4\chi^2 R^3 \mathbf{L}}{L^4}.$$

Решение задачи 3

Пусть на внутренней обкладке содержится заряд Q . Тогда электрическая индукция в зазоре между обкладками равна

$$\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

а напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}(r)}{\varepsilon(r)} = \frac{Q}{b^2} \operatorname{ctg} \frac{r}{a} \mathbf{e}_r.$$

Падение напряжения между обкладками составит

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{b^2} \int_a^b \operatorname{ctg} \frac{r}{a} dr = \frac{Qa}{b^2} \ln \sin \frac{r}{a} \Big|_{r=a}^{r=b} = \\ &= \frac{Qa}{b^2} \left(\ln \sin \frac{b}{a} - \ln \sin 1 \right) = \frac{Qa}{b^2} \ln \frac{\sin \frac{b}{a}}{\sin 1}. \end{aligned}$$

Емкость равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{b^2}{a \ln \frac{\sin \frac{b}{a}}{\sin 1}}.$$

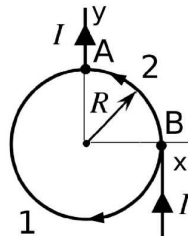
Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1

По закону Био – Савара магнитное поле в центре кольца равно

$$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{c} \int \frac{I(\mathbf{r}') d\ell \times \mathbf{r}'}{r'^3}.$$

Для верхнего провода $d\ell \parallel \mathbf{r}'$, поэтому он не вносит вклада в поле. Вклад в поле от дуг кольца составляет



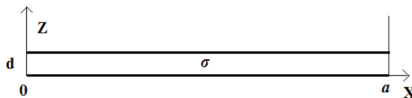
$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{12} &= \frac{I_1}{c} \int \frac{d\ell R}{R^3} \mathbf{e}_z - \frac{I_2}{c} \int \frac{d\ell R}{R^3} \mathbf{e}_z = \left(\frac{U_{AB}}{\ell_1 \rho c} \frac{\ell_1}{R^2} - \frac{U_{AB}}{\ell_2 \rho c} \frac{\ell_2}{R^2} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{U_{AB}}{\rho c} \frac{1}{R^2} - \frac{U_{AB}}{\rho c} \frac{1}{R^2} \right) \mathbf{e}_z = 0. \end{aligned}$$

Остается вклад от правого провода, который равен половине поля бесконечного прямого провода с током:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} = \frac{2I}{2cR} \mathbf{e}_z = \frac{I}{cR} \mathbf{e}_z.$$

Решение задачи 2

Поскольку при заданном x проводимость однородна по z , то напряженность поля всюду в зазоре равна $E = \frac{U}{d}$.



Тогда полный ток через произвольное сечение резистора выражается как

$$I = \int j(x) adx = \int_0^d \sigma(x) E adx = \frac{a\sigma_0 U}{d\alpha} (1 - e^{-\alpha a}).$$

Решение задачи 3

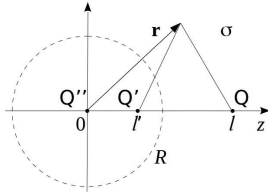
Выясним, где в проводящей области может быть объемный заряд. В объеме однородного проводника $\rho = 0$ в силу уравнения непрерывности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma \cdot 4\pi\rho = 0.$$

Поэтому заряды могут быть сосредоточены только на конце провода и на границе с идеально проводящим шаром. Заряд на конце провода находим, записав теорему Гаусса для области с замкнутой поверхностью, окружающей конец провода:

$$4\pi Q = \oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma} \iint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{I}{\sigma},$$

где интеграл по замкнутой поверхности заменен на интеграл, из области интегрирования которого исключена точка пересечения с проводом.



Теперь задачу о потенциале в проводящей области можно решить методом изображений стандартным способом. Один заряд-изображение расположен на расстоянии $l' = \frac{R^2}{l}$ от центра шара, а его величина равна

$$Q' = -\frac{R}{l}Q.$$

Второй заряд-изображение находится в центре шара и равен $Q'' = -Q = \frac{R}{l}Q$ *.

*Только при таких расположении и величинах зарядов-изображений потенциал всюду на границе шара оказывается одинаковым и полный ток через сферу равен нулю:

$$I = \oiint_{r=R} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \sigma \oiint_{r=R} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi(Q' + Q'') = 0.$$

Искомая плотность тока равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sigma \left(\frac{\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z|^3} Q + \frac{\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z|^3} Q' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} Q'' \right),$$

где Q' и Q'' задаются выражениями, записанными выше.

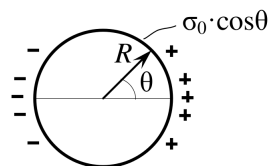
Решение задачи 4

Искомое количество теплоты будем определять как разность между начальной и конечной электростатическими энергиями системы. В конечном состоянии система разряжена и энергия равна нулю. Энергия в начальном состоянии

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} \int \varphi dq = \int \frac{\varphi \sigma(\theta)}{2} dS = \int \frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})}{2r^3} \sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{d \cdot \cos \theta}{R^2} \sigma_0 \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi\sigma_0 d}{3}. \end{aligned}$$

Модуль дипольного момента сферы

$$d = \frac{4\pi R^3}{3} \sigma_0.$$



Тогда искомая энергия равна

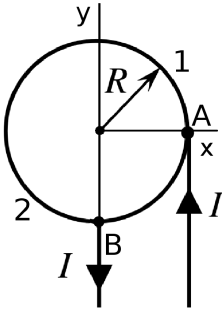
$$W_0 = \frac{8\pi^2 \sigma_0^2 R^3}{9}.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1

По закону Био – Савара магнитное поле в центре кольца равно

$$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{c} \int \frac{I(\mathbf{r}') d\ell \times \mathbf{r}'}{r'^3}.$$



Для всех точек верхнего провода $d\ell \parallel \mathbf{r}'$, поэтому он не вносит вклада в поле. Вклад в поле от дуг кольца составляет

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{12} &= \frac{I_1}{c} \int \frac{d\ell R}{R^3} \mathbf{e}_z - \frac{I_2}{c} \int \frac{d\ell R}{R^3} \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{U_{AB}}{\ell_1 \rho c} \frac{\ell_1}{R^2} - \frac{U_{AB}}{\ell_2 \rho c} \frac{\ell_2}{R^2} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{U_{AB}}{\rho c} \frac{1}{R^2} - \frac{U_{AB}}{\rho c} \frac{1}{R^2} \right) \mathbf{e}_z = 0. \end{aligned}$$

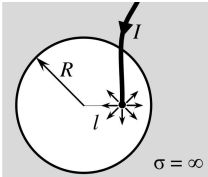
Остается вклад от правого провода, который равен половине поля бесконечного прямого провода с током:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} = \frac{2I}{2cR} \mathbf{e}_z = \frac{I}{cR} \mathbf{e}_z.$$

Решение задачи 2

Выясним, где в жидкой области может быть объемный заряд. В объеме однородного проводника $\rho = 0$ в силу уравнения непрерывности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma \cdot 4\pi\rho = 0.$$



Поэтому заряды могут быть сосредоточены только на конце провода и на границе с идеально проводящей областью. Заряд на конце провода находим, записав теорему Гаусса для области с замкнутой поверхностью, окружающей конец провода:

$$4\pi Q = \iint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma} \iint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{I}{\sigma},$$

где интеграл по замкнутой поверхности заменен на интеграл, из области интегрирования которого исключена точка пересечения с проводом.

Теперь задачу об электрическом поле в проводящей области можно решить методом изображений стандартным способом. Заряд-изображение расположен на расстоянии $l' = \frac{R^2}{l}$ от центра шара, а его величина равна

$$Q' = -\frac{R}{l}Q.$$

Напряженность поля в пределах жидкой области равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z|^3}Q + \frac{\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z|^3}Q'.$$

Плотность тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sigma \left(\frac{\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l\mathbf{e}_z|^3}Q + \frac{\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - l'\mathbf{e}_z|^3}Q' \right).$$

Снаружи от сферы выполняются сферически симметричные условия, поэтому ток распределяется сферически симметрично:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I\mathbf{r}}{4\pi r^3}.$$

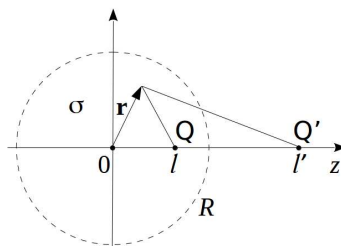
Решение задачи 3

Полный ток через сечение резистора выражается как

$$I = j(z)S = \sigma(z)E(z)S,$$

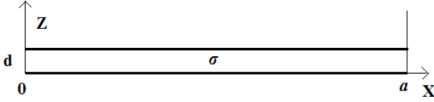
откуда для напряженности поля $E(z)$ получим

$$E(z) = \frac{I}{\sigma(z)S}.$$



Разность потенциалов между пластинами равна

$$U = - \int_0^d E(z) dz = - \frac{I}{S} \int_0^d \frac{dz}{\sigma(z)} = - \frac{I}{S} \int_0^d \frac{dz}{\sigma_0 e^{-\alpha z}} = \frac{I}{\sigma_0 \alpha a^2} (1 - e^{\alpha d}).$$



Выразим

$$\frac{I}{S} = \frac{\sigma_0 \alpha U}{(1 - e^{\alpha d})}$$

и подставим в выражение для поля:

$$E(z) = \frac{\sigma_0 \alpha U}{1 - e^{\alpha d}} \cdot \frac{1}{\sigma(z)} = \frac{\sigma_0 \alpha U}{1 - e^{\alpha d}} \cdot \frac{e^{\alpha z}}{\sigma_0} = \frac{\alpha U}{1 - e^{\alpha d}} \cdot e^{\alpha z}.$$

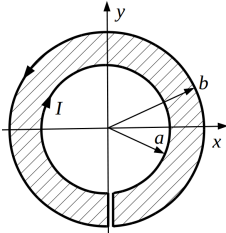
Плотность заряда находим из уравнения Максвелла:

$$\rho(z) = \frac{\operatorname{div} E(z)}{4\pi} = \frac{\alpha U}{1 - e^{\alpha d}} \cdot \alpha e^{\alpha z} = \frac{\alpha^2 U}{1 - e^{\alpha d}} \cdot e^{\alpha z}.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Закон Био – Савара



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\ell \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

для точки $\mathbf{r} = 0$ дает:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{2\pi I}{c} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{e}_z.$$

Магнитный момент контура с током равен

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c} \mathbf{e}_z,$$

где $S = \pi(b^2 - a^2)$ – площадь области, ограниченной замкнутым контуром с током.

При $r \gg b$ действует поле магнитного диполя:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

Решение задачи 2

Запишем уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t}.$$

Подставим $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и учтем, что порядок действия $\frac{\partial}{\partial t}$ и rot можно поменять в силу независимости временной и пространственных переменных:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} = -\nabla \varphi(\mathbf{r}).$$

В отсутствие кулоновского вклада в поле

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t}.$$

Домножим равенство на q :

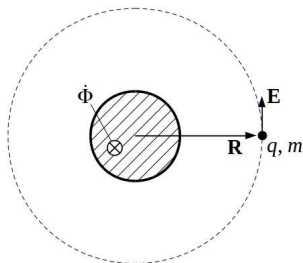
$$q\mathbf{E} = -\frac{q\partial \mathbf{A}}{c \partial t}.$$

Левая часть теперь представляет собой силу, действующую на заряженную частицу:

$$q\mathbf{E} = \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

В средней части длины соленоида

$$\mathbf{A} = \frac{2mn}{R} \mathbf{e}_\alpha = \frac{2ISn}{cR} \mathbf{e}_\alpha.$$



Тогда имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{2Snq\partial I}{c^2 R \partial t} \mathbf{e}_\alpha.$$

Длительность процесса мала, частица не выходит из начального положения. Поэтому направление \mathbf{P} и \mathbf{E} неизменно. Интегрирование уравнения дает

$$\Delta \mathbf{P} = -\frac{2Snq}{c^2 R} \Delta I \mathbf{e}_\alpha.$$

Конечная скорость частицы равна

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{m} = \frac{2SnqI}{mc^2 R} \mathbf{e}_\alpha.$$

Решение задачи 3

В сверхпроводнике, находящемся в поле полубесконечного соленоида, индуцируются токи, и шарик приобретает магнитный момент. Внешнее поле является неоднородным, поэтому возникает ненулевая сила на магнитный диполь.

Таким образом, требуется, во-первых, определить магнитный момент шарика, во-вторых, найти силу, действующую на магнитный диполь.

Поле на расстоянии $r \gg a$ от конца полубесконечного соленоида равно *

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q_m \mathbf{e}_r}{r^2},$$

где $q_m = \frac{BR^2}{4}$ – «магнитный заряд».

* См. задачу 4.24 в задачнике [1].

Приобретенный дипольный момент возьмем из решения задачи о сферическом магнетике, внесенном в однородное поле \mathbf{B}_0 *:



$$\mathbf{m} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} a^3 \mathbf{B}_0.$$

В нашей задаче $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(z) = \frac{q_m \mathbf{e}_z}{z^2}$, поэтому

$$\mathbf{m} = -\frac{q_m a^3}{2z^2} \mathbf{e}_z.$$

Дипольный момент зависит от z , поэтому диполь упругий. Сила на упругий диполь равна **

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\frac{\partial}{2\partial z} \frac{q_m^2 a^3}{2z^4} \mathbf{e}_z = \frac{q_m^2 a^3}{h^5} \mathbf{e}_z = \frac{B^2 R^4 a^3}{16h^5} \mathbf{e}_z.$$

Решение задачи 4

Вращающаяся заряженная сфера эквивалентна неподвижной сфере с поверхностными токами. Случай равномерно заряженной сферы разобран в задачнике [1] (см.

* См. задачу 5.7 в задачнике [1].

** По закону Ампера сила на систему токов полностью определяется распределением этих токов при данном положении диполя. Поэтому выражение для силы не изменится, если рассматривать диполь как твердый с фиксированным в точке $z = h$ дипольным моментом:

$$\mathbf{m} = -\frac{q_m a^3}{2h^2} \mathbf{e}_z.$$

При таком рассмотрении оператор набла на дипольный момент уже не действует и сила рассчитывается, как для твердого диполя:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\frac{q_m a^3}{2h^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{q_m}{z^2} \mathbf{e}_z = \frac{q_m^2 a^3}{h^2 \cdot h^3} \mathbf{e}_z = \frac{B^2 R^4 a^3}{16h^5} \mathbf{e}_z.$$

Р.45. в разделе “Решение типичных задач”). Линейная плотность токов равна

$$\mathbf{J} = \frac{Q\omega \sin \theta}{4\pi R} \mathbf{e}_\alpha,$$

приобретаемый магнитный момент равен

$$\mathbf{m} = \frac{Q\omega R^2}{3c} \mathbf{e}_z,$$

магнитное поле \mathbf{B}_1 внутри и \mathbf{B}_2 снаружи сферы равно

$$\mathbf{B}_1 = 2\frac{\mathbf{m}}{R^3}, \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

векторный потенциал на сфере равен

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{m \sin \theta}{R^2} \mathbf{e}_\alpha.$$

Энергия магнитного поля равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dS = \frac{1}{2c} \int \frac{m \sin \theta}{R^2} \cdot \frac{Q\omega \sin \theta}{4\pi R} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{mQ\omega}{4cR} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{Q^2\omega^2 R}{12c^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{Q^2\omega^2 R}{12c^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{Q^2\omega^2 R}{9c^2}. \end{aligned}$$

В исходном состоянии энергия магнитного поля равна нулю. Поэтому искомая работа находится как

$$W - W_0 = \frac{Q^2\omega^2 R}{9c^2}.$$

Энергию магнитного поля можно найти также через плотность энергии $w = \frac{HB}{8\pi}$:

$$B_1^2 = 4\frac{m^2}{r^6},$$

$$\begin{aligned} B_2^2(r, \theta) &= (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2) = \frac{m^2}{r^6} + 9\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})^2 r^2}{r^{10}} - 6\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^8} = \\ &= \frac{m^2}{r^6} + 3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^8} = \frac{m^2}{r^6} + 3\frac{m^2 \cos^2 \theta}{r^6} = \frac{m^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Энергия магнитного поля складывается из энергии W_1 внутри и W_2 снаружи сферы:

$$W_1 = \frac{H_1 B_1}{8\pi} V_1 = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 8\pi} \frac{4m^2}{R^6} = \frac{2m^2}{3R^3},$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \int \frac{H_2 B_2}{8\pi} dV_2 = \frac{1}{8\pi} \int \frac{m^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta) \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \\ &= -\frac{m^2}{4} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{\infty} \frac{1+3 \cos^2 \theta}{r^4} dr d \cos \theta = \frac{m^2}{3R^3}, \end{aligned}$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{m^2}{R^3} = \frac{Q^2 \omega^2 R}{9c^2}.$$

Решение задачи 5

При слабом скин-эффекте ток распределен равномерно по сечению каждой пластины, при сильном скин-эффекте он сосредоточен в двух приповерхностных скин-слоях каждой пластины. И в том и в другом случае поле между пластинами однородно и равно $\frac{4\pi J}{c}$, а снаружи – нулю. Это следует из теоремы Стокса в приближении двух бесконечных плоскостей, по которым текут противоположно направленные токи с линейной плотностью J .

Далее анализируем случай слабого скин-эффекта. Объемная плотность тока в отдельной пластине равна

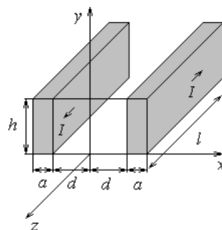
$$j = \frac{J}{a}.$$

Магнитное поле, наводимое током этой плотности в самой пластине, распределено линейно по ее толщине:

$$H_1(x) = \frac{4\pi J}{ca} (x - d - a) + \frac{2\pi J}{c},$$

а в соседней пластине

$$H_2(x) = -\frac{2\pi J}{c}.$$



По принципу суперпозиции оба тока создают следующее распределение поля в пространстве:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > d + a \\ \frac{4\pi J}{ca}(|x| - d - a), & d \leq |x| \leq d + a \\ \frac{4\pi J}{c}, & 0 \leq |x| < d \end{cases}$$

Учтем, что линейная плотность тока $J = \frac{I}{h}$. Тогда

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > d + a \\ \frac{4\pi I}{cha}(|x| - d - a), & d \leq |x| \leq d + a \\ \frac{4\pi I}{ch}, & 0 \leq |x| < d \end{cases}$$

Пренебрегая краевыми эффектами, будем считать, что поле в области $|x| \leq h$ пространства равно нулю. Тогда полную энергию магнитного поля, индуцируемого током I , получим интегрированием по z :

$$\begin{aligned} W &= \int_{-d-a}^{d+a} w dV = 2dh \int \frac{(4\pi I)^2}{8\pi c^2 h^2} + 2lh \int_d^{d+a} \frac{(4\pi I(x-d-a))^2}{8\pi c^2 h^2 a^2} dx = \\ &= \frac{4\pi dl}{c^2 h} I^2 + \frac{4\pi l a^3 I^2}{3a^2 c^2 h} = \frac{4\pi dl}{c^2 h} I^2 \left(1 + \frac{a}{3d}\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, $W = \frac{LI^2}{2c^2}$, откуда

$$L = \frac{8\pi dl}{h} \left(1 + \frac{a}{3d}\right).$$

В случае сильного скин-эффекта второе слагаемое в скобках, соответствующее интегралу по тонкому скин-слою, становится пренебрежимо малым, и тогда

$$L = \frac{8\pi dl}{h}.$$

Решение задачи 6

Для понимания картины явления, относящейся к данной задаче, запишем два уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{c \partial t}.$$

Интегрирование уравнений по площади области, ограниченной замкнутым контуром, дает

$$\oint \mathbf{E} d\ell = -\frac{\partial}{c \partial t} \iint \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

$$\oint \mathbf{H} d\ell = \frac{\partial}{c \partial t} \iint \mathbf{D} d\mathbf{S}.$$

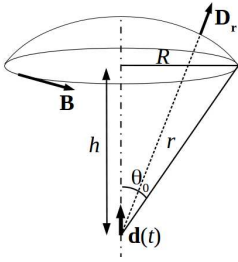
Первое уравнение представляет собой закон Фарадея, второе – аналогичное соотношение с заменой \mathbf{E} на \mathbf{H} и \mathbf{B} на $-\mathbf{D}$. Теперь становится понятным, что в сечении тороидального соленоида возникает переменный поток магнитного поля, обуславливающий ЭДС на его клеммах.

Выберем в качестве контура интегрирования окружность, проходящую внутри соленоида. С учетом аксиальной симметрии задачи циркуляция магнитного поля сводится к произведению:

$$\oint \mathbf{H} d\ell = 2\pi R H.$$

В качестве поверхности, натянутой на контур, выберем сферу радиусом $r = \sqrt{h^2 + R^2}$. Учтем, что радиальная составляющая поля диполя равна $E_r = 2\frac{d \cdot \cos \theta}{r^3}$. Тогда правая часть второго уравнения запишется как

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c} \int 2\frac{d \cdot \cos \theta}{r^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta &= i\frac{4\pi\omega d}{r} \int \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= i\frac{2\pi\omega d}{cr} \sin^2 \theta_0 = i\frac{2\pi\omega d r^2}{cr^3} \sin^2 \theta_0 = i\frac{2\pi\omega d R^2}{cr^3}. \end{aligned}$$



Приравнивая левую и правые части, получаем

$$2\pi R \hat{H} = i \frac{2\pi\omega \hat{d} R^2}{cr^3},$$

откуда магнитное поле в соленоиде *

$$\hat{H} = i \frac{\omega \hat{d} R}{cr^3}.$$

В силу закона Фарадея ЭДС в соленоиде равна

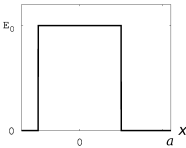
$$\hat{U} = -i\omega \frac{\hat{H}SN}{c} = \frac{\omega^2 \hat{d}RSN}{c^2 r^3} = \frac{\omega^2 \hat{d}RSN}{c^2 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Амплитуда искомой ЭДС составляет

$$U = \frac{\omega^2 d_0 RSN}{c^2 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1



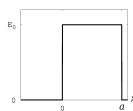
Преобразование Фурье от одиночного центрированного импульса равно (см. решение аналогичного примера 2.2(в) в [2]):

$$f_{k1c} = \frac{aE_0}{2} \operatorname{sinc} \frac{ka}{2}.$$

* Магнитное поле можно найти быстрее, введя векторный потенциал для электрического поля диполя по аналогии с магнитостатикой:

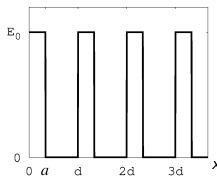
$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_E, \text{ тогда } \mathbf{A}_E = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{dR}{r^3} \mathbf{e}_\alpha \text{ и } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{A}_E}{c \partial t} = i\omega \frac{d_0 e^{i\omega t} R}{cr^3} \mathbf{e}_\alpha.$$

Преобразование Фурье от одиночного прямоугольного импульса, смещенного на $\frac{a}{2}$ вправо, получим с помощью теоремы о сдвиге:



$$f_{k1} = f_{k1c} e^{i\frac{ka}{2}} = \frac{aE_0}{2} \operatorname{sinc} \frac{ka}{2} e^{i\frac{ka}{2}}.$$

Применив теорему о сдвиге к последовательности эквидистантно расположенных прямоугольных импульсов, получим преобразование Фурье заданной последовательности в виде суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем e^{ikd} :



$$f_k = f_{k1} \frac{1}{1 - e^{ikd}} = \frac{aE_0 e^{i\frac{ka}{2}}}{2(1 - e^{ikd})} \operatorname{sinc} \frac{ka}{2}.$$

Если исходный сигнал модулирован экспонентой e^{ik_0x} , то его преобразование Фурье запишется как

$$\tilde{f}_k = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ik_0x} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i(k-k_0)x} dx = f_{k-k_0}.$$

Видно, что результат получается заменой k на $k - k_0$:

$$\tilde{f}_k = f_{k-k_0} = \frac{aE_0 e^{i\frac{(k-k_0)a}{2}}}{2(1 - e^{i(k-k_0)d})} \operatorname{sinc} \frac{(k-k_0)a}{2}.$$

Решение задачи 2

В естественном свете ТЕ- и ТМ-волны имеют одинаковую амплитуду. Положим ее равной E_0 . Тогда амплитуды отраженных ТЕ- и ТМ-волн определяются формулами

Френеля, которые удобно записать в виде:

$$E_1^{TE} = -E_0 \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_2},$$

$$E_1^{TM} = E_0 \frac{n_2 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_2}.$$

Из закона преломления находим угол преломления θ_2 :

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_0 = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = 30^\circ.$$

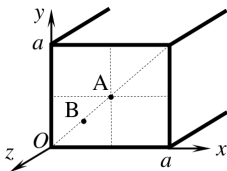
$$E_1^{TE} = -E_0 \frac{\cos 45^\circ - \sqrt{2} \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ + \sqrt{2} \cos 30^\circ} = E_0 \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},$$

$$E_1^{TM} = E_0 \frac{\sqrt{2} \cos 45^\circ - \cos 30^\circ}{\sqrt{2} \cos 45^\circ + \cos 30^\circ} = E_0 \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Степень поляризации:

$$\begin{aligned} K &= \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p} = \frac{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} - \frac{(1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} + \frac{(1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \frac{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} - \frac{\frac{7}{4}-\sqrt{3}}{\frac{7}{4}+\sqrt{3}}}{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} + \frac{\frac{7}{4}-\sqrt{3}}{\frac{7}{4}+\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}} = \frac{(2-\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - (7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) + (7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{14-4\cdot 3+\sqrt{3}-14+4\cdot 3+\sqrt{3}}{14-4\cdot 3+\sqrt{3}+14-4\cdot 3-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Решение задачи 3



Поскольку $E_z \neq 0$, то волна имеет тип E_{mn} :

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}y\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right).$$

Из условия на частоту волны

$$\omega = \frac{2\pi c}{a} \geq \omega_{min} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}n\right)^2} = \frac{\pi c}{a}\sqrt{m^2 + n^2}$$

следует, что либо $m = 0, n = 1$, либо $m = 1, n = 1$, либо $m = 0, n = 2$. Кроме того, по условию имеем:

$$E_z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = E_0 \sin \frac{\pi m}{2} \sin \frac{\pi n}{2} \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right),$$

откуда $m = 1, n = 1$.

Тогда

$$E_z\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) = E_0 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) = \frac{E_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right).$$

Решение задачи 4

При отсутствии отраженной волны граничные условия на металлической пластине имеют вид:

$$E_0 = E_2 + E_3,$$

$$H_0 = H_2 - H_3 + \frac{4\pi}{c}\sigma^* E_0.$$

Учтем, что $H_y = \frac{c}{\omega} k_z E_x$:

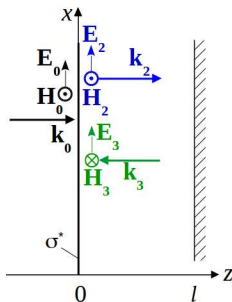
$$\begin{aligned} E_0 &= E_2 + E_3, \\ E_0 &= E_2 - E_3 + \frac{4\pi}{c}\sigma^* E_0. \end{aligned} \quad (1)$$

С другой стороны, граничное условие на зеркальной поверхности

$$E_2 e^{ikl} = -E_3 e^{-ikl}. \quad (2)$$

Система уравнений (1) с учетом (2) принимает вид

$$\begin{aligned} E_2 - E_2 e^{2ikl} &= E_0, \\ E_2 + E_2 e^{2ikl} &= \left(1 - \frac{4\pi}{c}\sigma^*\right) E_0. \end{aligned} \quad (3)$$



Исключая из уравнений E_2 , получим

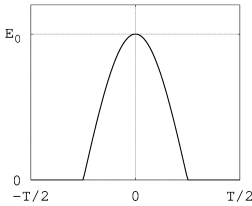
$$e^{2ikl} = \frac{\frac{4\pi\sigma^*}{c}}{\frac{4\pi\sigma^*}{c} - 2}.$$

Видно, что выражение слева должно быть действительным числом, по модулю равным 1. Это возможно только, если $\frac{4\pi\sigma^*}{c} = 1$. Тогда

$$\sigma^* = \frac{c}{4\pi}, \quad e^{2ikl} = -1 \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

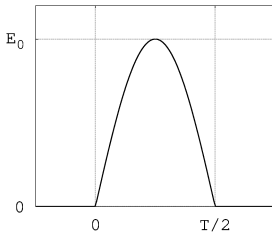


Фурье-преобразование от одиночного сигнала

$$f(t) = \begin{cases} E_0 \cos \omega_0 t, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

возьмем из решения задачи 2.2(г) [2]:

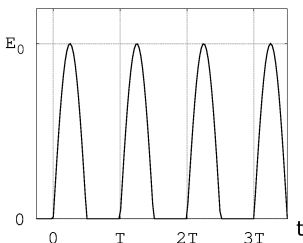
$$f_{\omega,1} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{E_0 \cos \frac{\omega T}{2}}{1 - (\omega T/\pi)^2}.$$



Применяя теорему о сдвиге, получим преобразование Фурье одиночного сигнала $f(t) = \sin \omega_0 t$, $0 < t < \frac{T}{2}$ (сдвиг составляет $\frac{T}{4}$):

$$f_{\omega 1} = \tilde{f}_{\omega,1} e^{-i\frac{\omega T}{4}} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{E_0 \cos \frac{\omega T}{2}}{1 - (\omega T/\pi)^2} e^{-i\frac{\omega T}{4}}.$$

Теорема о сдвиге, примененная к преобразованию Фурье последовательности сигналов, даст геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-i\omega T}$:



$$f_{\omega} = f_{\omega,1} \frac{1}{1 - e^{-i\omega T}} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{E_0 \cos \frac{\omega T}{2} e^{-i\omega T/4}}{(1 - (\omega T/\pi)^2)(1 - e^{-i\omega T})}.$$

Решение задачи 2

В естественном свете ТЕ- и ТМ-волны имеют одинаковую амплитуду. Положим ее равной E_0 . Тогда амплитуды отраженных ТЕ- и ТМ-волн определяются формулами Френеля, которые удобно записать в виде:

$$E_1^{TE} = -E_0 \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_2},$$

$$E_1^{TM} = E_0 \frac{n_2 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_2}.$$

Из закона преломления находим угол преломления θ_2 :

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_0 = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = 30^\circ.$$

$$E_1^{TE} = -E_0 \frac{\cos 60^\circ - \sqrt{3} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ} = \frac{1}{2} E_0,$$

$$E_1^{TM} = E_0 \frac{\sqrt{3} \cos 60^\circ - \cos 30^\circ}{\sqrt{3} \cos 60^\circ + \cos 30^\circ} = 0.$$

Степень поляризации:

$$K = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p} = \frac{(\frac{1}{2})^2 - 0}{(\frac{1}{2})^2 + 0} = 1.$$

Решение задачи 3

Решение для поля в волноводе берем из задачи 3 варианта 1 с идентичными условиями (см. на с. 104):

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right).$$

Тогда

$$H_z = 0;$$

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{i}{\varkappa^2} \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{ia^2}{2\pi^2} E_0 \cdot \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} e^{i\omega t} = \\ &= -iE_0 \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} e^{i\omega t}; \end{aligned}$$

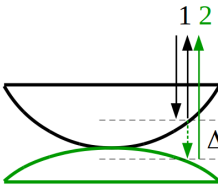
$$H_x\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, t\right) = E_0 \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) = \frac{E_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi c}{a}t\right).$$

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{i}{\varkappa^2} \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{ia^2}{2\pi^2} E_0 \cdot \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\pi}{a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} e^{i\omega t} = \\ &= iE_0 \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} e^{i\omega t}; \end{aligned}$$

$$H_y\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, t\right) = -E_0 \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) = -\frac{E_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi c}{a}t\right).$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1



Интерференция происходит между волнами 1 и 2, отраженными от сферических поверхностей двух линз (см. рисунок). Волна 1 падает из стекла на границу с воздухом (менее оптически плотной средой), поэтому скачка по фазе не возникает. Волна 2 падает из воздуха на стекло,

поэтому при отражении она испытывает скачок по фазе на π . Оптическая разность хода двух лучей составляет удвоенную толщину воздушного зазора плюс половина длины волны.

Величину воздушного зазора находим как

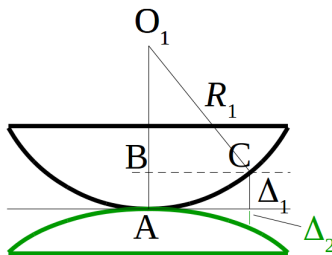
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

$$\Delta_1 = |O_1A| - |O_1B| =$$

$$= R_1 - \sqrt{|O_1C|^2 - r^2} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - r^2} =$$

$$= R_1 - R_1 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}} \approx R_1 - R_1 \left(1 - \frac{r^2}{2R_1^2}\right) = \frac{r^2}{2R_1}$$

и аналогично $\Delta_2 \approx \frac{r^2}{2R_2}$.



Условие интерференционного минимума:

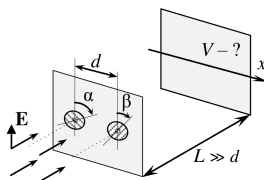
$$2\Delta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad r_T^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = m\lambda, \quad r_T = \sqrt{m\lambda \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

интерференционного максимума:

$$2\Delta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad r_{CB}^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = m\lambda - \frac{\lambda}{2}, \quad r_{CB} = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)}}.$$

Решение задачи 2

Запишем выражение для интенсивности волны, являющейся суперпозицией двух когерентных волн



(будем опускать множитель $\frac{c}{8\pi}$ в выражении для усредненного абсолютного значения вектора Пойнтинга $\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi}|E|^2$):

$$I = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) = E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + (\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2) + (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1) = \\ = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\{(\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2)\} = I_1 + I_2 + 2|E_1||E_2| \cos \gamma \cos \phi,$$

где γ – угол между двумя векторами, а $\phi = k\frac{d \cdot x}{L}$ – сдвиг по фазе между двумя волнами.

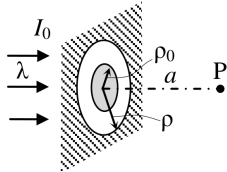
Если записать выражение для интенсивности в виде

$$I = (I_1 + I_2) \left(1 + \frac{2|E_1||E_2| \cos \gamma \cos \phi}{I_1 + I_2} \right),$$

то множитель при $\cos \phi$ по модулю равен видности. Далее учтем, что $E_1 = E_0 \cos \alpha$, $E_2 = E_0 \cos \beta$:

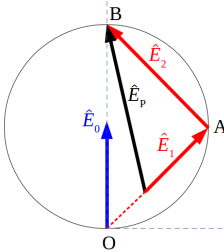
$$V = \frac{2|E_1||E_2| \cos(\alpha - \beta)}{|E_1|^2 + |E_2|^2} = \frac{2|E_0| \cos \alpha |E_0| \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}{|E_0|^2 \cos^2 \alpha + |E_0|^2 \cos^2 \beta} = \\ = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}.$$

Решение задачи 3



Формула для радиусом m -й зоны Френеля в случае плоской падающей волны

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda a}.$$



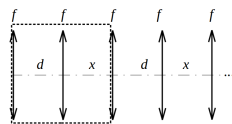
Отсюда видно, что диск занимает первую, а отверстие – вторую половину 1-й зоны Френеля. Тогда на диаграмме Френеля вклад первой половины зоны Френеля в поле \hat{E}_P представляет вектор $\hat{E}_1 = \frac{OA}{\sqrt{2}}$, а второй – вектор $\hat{E}_2 = AB$.

Угол ОАВ опирается на диаметр окружности, поэтому он прямой. Тогда интенсивность света в точке P равна

$$I_P = E_P^2 = E_1^2 + E_2^2 = \left(\frac{E_0\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 + (E_0\sqrt{2})^2 = 3E_0^2 = 3I_0.$$

Решение задачи 4

Рассмотрим преобразование луча на периоде оптической системы (на рисунке отмечен пунктирной рамкой). Пусть оно описывается матрицей M :



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Если разложить вектор-столбец справа на собственные векторы линейного преобразования, задаваемого матрицей M , то действие данной матрицы на вектор-столбец сводится к умножению каждого из собственных векторов на соответствующее собственное число. А N -кратное действие матрицы сводится к умножению каждого из собственных векторов на собственное число в степени N . Отсюда нетрудно понять, что условие неустойчивости решения заключается в том, что модуль хотя бы одного из собственных чисел превышает единицу.

Определим собственные числа линейного преобразования из условия

$$|\lambda E - M| = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda - m_{12}m_{21} + m_{11}m_{22} = 0$$

с решением

$$\lambda_{12} = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_{11} + m_{22}}{2}\right)^2 + m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}.$$

Матрица преобразования луча на одном периоде равна

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} & x \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{f} & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\lambda_{12} = -\frac{x}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2f}\right)^2 - 1}.$$

При $0 \leq x \leq 2f$ $\lambda_{12} = -\frac{x}{2f} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2f}\right)^2}$.

$$|\lambda_{12}|^2 = \left(\frac{x}{2f}\right)^2 + 1 - \left(\frac{x}{2f}\right)^2 = 1 \text{ (устойчивость)}.$$

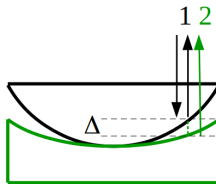
При $x > 2f$

$$\lambda_2 = -\frac{x}{2f} - \sqrt{\left(\frac{x}{2f}\right)^2 - 1} < -1 \text{ (неустойчивость)}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

Задача полностью аналогична задаче 1 варианта 1 с тем отличием, что размер воздушного зазора теперь равен



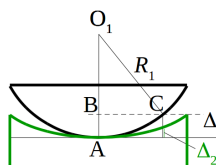
$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} = \frac{r^2(R_2 - R_1)}{2R_1R_2}.$$

Условие интерференционного минимума:

$$2\Delta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{\lambda}{2},$$

$$r_T^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m\lambda,$$

$$r_T = \sqrt{m\lambda \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}},$$

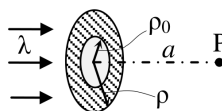


интерференционного максимума:

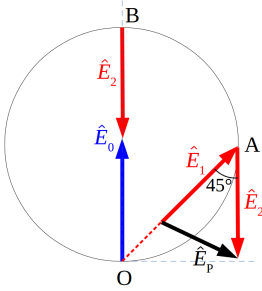
$$2\Delta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad r_{CB}^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} = m\lambda - \frac{\lambda}{2}, \quad r_{CB} = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda R_1R_2}{2(R_2 - R_1)}}.$$

Решение задачи 2

Область отверстия занимает половину первой зоны Френеля ($\rho_m = \sqrt{m\lambda a}$, $m = \frac{1}{2}$). Ее вклад в поле \hat{E}_P показан на диаграмме Френеля в виде вектора $\hat{E}_1 = \frac{OA}{\sqrt{2}}$.



Область $\rho < r < \infty$ включает зоны Френеля с номерами от 2 до ∞ . Их вклад в \hat{E}_P на диаграмме Френеля представлен вектором \hat{E}_2 , начало которого находится на

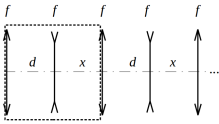


окружности радиусом E_0 (положение этого начала соответствует нижней границе второй зоны Френеля), а конец – в центре этой окружности.

Вектор \hat{E}_P равен $\hat{E}_1 + \hat{E}_2$, а квадрат его величины:

$$\begin{aligned} I_P &= E_P^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos 45^\circ = \\ &= \left(\frac{E_0\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + E_0^2 - 2\frac{E_0\sqrt{2}}{\sqrt{2}}E_0\frac{1}{\sqrt{2}} = E_0^2(2 - \sqrt{2}) = I_0(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Решение задачи 3



Выражение для собственных чисел матрицы преобразования луча на периоде оптической системы было получено при решении задачи 4 варианта 1:

$$\lambda_{12} = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_{11} + m_{22}}{2}\right)^2 + m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}.$$

Матрица преобразования луча на одном периоде равна

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{f} & x \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{f} & f + 2x \\ -\frac{1}{f} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\lambda_{12} = 1 - \frac{x}{2f} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2f}\right)^2 - 1}.$$

При $0 \leq x \leq 4f$ $\lambda_{12} = 1 - \frac{x}{2f} \pm i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2f}\right)^2}$,

$|\lambda_{12}|^2 = \left(1 - \frac{x}{2f}\right)^2 + 1 - \left(1 - \frac{x}{2f}\right)^2 = 1$ (устойчивость).

При $x > 4f$ $\lambda_2 = 1 - \frac{x}{2f} - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2f}\right)^2 - 1} < -1$ (неустойчивость).

Экзаменационная работа 2

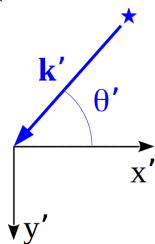
Решение задачи 1

Запишем 4-мерный волновой вектор волны, идущей от звезды к кораблю:

$$\overset{\curvearrowright}{k}' = \Lambda \overset{\curvearrowright}{k} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x\right) \\ \gamma(k_x - \beta\frac{\omega}{c}) \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Направление на звезду в системе отсчета корабля определяется равенством:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta' &= -\frac{k'_y}{k'_x} = -\frac{k_y}{\gamma(-\beta\frac{\omega}{c} + k_x)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)}, \end{aligned}$$



где учтено, что $\frac{ck_y}{\omega} = \frac{k_y}{k} = \sin \theta$ и $\frac{ck_x}{\omega} = \frac{k_x}{k} = -\cos \theta$.

Видно, что $\theta' < \theta$ в интервале $0 < \theta < \pi$.

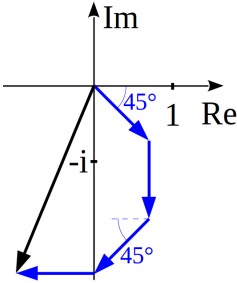
Решение задачи 2

Поле в точке P описывается интегралом Кирхгофа:

$$E_p = \frac{1}{i\lambda} \int \frac{E_0 e^{ikR}}{R} \cos \psi dS.$$

Из геометрии оптической схемы следует, что до шлифовки каждая четверть дает одинаковый вклад в поле E_p :

$$E_1 = \frac{E_0}{4}.$$



После уменьшения толщины стекла на δ поле E_0 на выходе из отверстия получает сдвиг по фазе:

$$E_0 \rightarrow E_0 e^{i(1-n)k\delta} = E_0 e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta}{\lambda}}.$$

Множитель $e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta}{\lambda}}$ выносится из-под интеграла Кирхгофа, поэтому после шлифовки поле в точке P приобретает вид

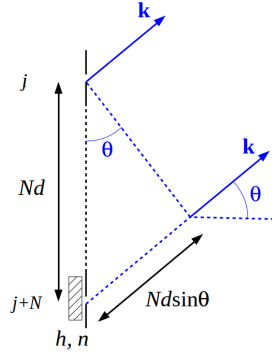
$$\begin{aligned} E'_p &= E_1 \cdot \left(e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta_1}{\lambda}} + e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta_2}{\lambda}} + e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta_3}{\lambda}} + e^{\frac{2\pi i(1-n)\delta_4}{\lambda}} \right) = \\ &= E_1 \cdot \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\pi} \right) = E_1(-1 - i(1 + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

Для интенсивности в точке P получим

$$I'_p = E_1^2(1^2 + (1 + \sqrt{2})^2) = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{16} I_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{8} I_0.$$

Решение задачи 3

Поле дифракционной решетки складывается из полей от каждой щели. Слагаемые суммарного поля удобно сгруппировать по N парам – от j -й и $(j + N)$ -й щелей каждая:



$$\begin{aligned} \hat{E}(k_x) &= \sum_{j=1}^N (\hat{E}_j + \hat{E}_{j+N}) = \\ &= \sum_{j=1}^N \hat{E}_j (1 + e^{i(k_x Nd + k(n-1)h)}) = (1 + e^{i(k_x Nd + k(n-1)h)}) \sum_{j=1}^N \hat{E}_j = \\ &= (1 + e^{i(kNd \sin \theta + k(n-1)h)}) \frac{1 - e^{ikNd \sin \theta}}{1 - e^{ikd \sin \theta}} \hat{E}_1, \end{aligned}$$

где записано выражение для поля дифракционной решетки с N щелями с учетом, что поле первой щели $\hat{E}_1 = \frac{aE_0 e^{ikz_p}}{\sqrt{i\lambda z_p}} \text{sinc} \frac{ka\theta}{2}$.

Квадрат модуля \hat{E} равен *

$$\begin{aligned} I(\theta) &= |E(\theta)|^2 = \\ &= 4 \frac{a^2 E_0^2}{\lambda z_p} \cos^2 k \frac{Nd \sin \theta + (n-1)h}{2} \text{sinc}^2 \frac{ka\theta}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{kNd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}} = \\ &= 4 \frac{a^2 E_0^2}{\lambda z_p} \text{sinc}^2 \frac{\pi a \theta}{\lambda} \cos^2 \pi \frac{Nd \sin \theta + (n-1)h}{\lambda} \frac{\sin^2 \frac{\pi Nd \sin \theta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}}. \end{aligned}$$

*Использованы математические тождества

$$1 + e^{i\phi} = 2 e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2}, \quad 1 - e^{i\phi} = -2i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2}.$$

Решение задачи 4

Общее выражение для искомого углового распределения в заданной геометрии:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\langle \ddot{d}^2 \rangle \sin^2 \theta}{4\pi c^3},$$

где $\ddot{d} = e\ddot{z}$.

Удобно переписать закон движения заряда, воспользовавшись тригонометрическим тождеством:

$$z(t) = 2a \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\Delta\omega t) = a \cdot \cos(\omega_1 t) + a \cdot \cos(\omega_2 t),$$

где $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -a \cdot (\omega_1^2 \sin(\omega_1 t) + \omega_2^2 \sin(\omega_2 t)), \\ \ddot{d}^2 &= e^2 a^2 \cdot (\omega_1^2 \sin(\omega_1 t) + \omega_2^2 \sin(\omega_2 t))^2 = \\ &= e^2 a^2 \cdot (\omega_1^4 \sin^2 \omega_1 t + 2\omega_1^2 \omega_2^2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t + \omega_2^4 \sin^2 \omega_2 t). \end{aligned}$$

Усреднение по времени дает

$$\langle \sin^2(\omega_1 t) \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin^2(\omega_2 t) \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle 2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \rangle = \langle \cos(2\Delta\omega t) \rangle - \langle \cos(2\omega t) \rangle = 0.$$

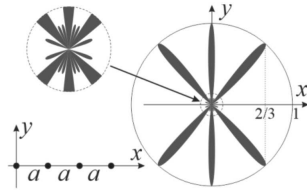
Подставляя $\langle \ddot{d}^2 \rangle$ в исходное выражение, получим

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 a^2 ((\omega - \Delta\omega)^4 + (\omega + \Delta\omega)^4) \sin^2 \theta}{8\pi c^3}.$$

Решение задачи 5

Общее выражение для интенсивности излучения линейки из четырех щелевых антенн аналогично случаю дифракционной решетки с четырьмя щелями:

$$I(\theta) = \frac{\sin^2 \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} I_0,$$



где θ отсчитывается от оси y .

Имеем условие главного максимума для $\sin \theta = \frac{2}{3}$:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{3\lambda} = m\pi.$$

В интервале $0 < \sin \theta < \frac{2}{3}$ главных максимумов нет. Отсюда следует, что $m = 1$ *. Тогда искомое расстояние

$$a = \frac{3\lambda}{2}.$$

Решение задачи 6

Кратко опишем картину происходящих процессов. Под действием электрического поля заряд приобретает ускорение, а вместе с ним и $\ddot{\mathbf{d}} \neq 0$. Следовательно, заряд является источником дипольного излучения. В дипольном излучении имеется как волна, исходящая от самого диполя, так и испущенная диполем и отраженная от зеркальной поверхности. Кроме того, внешнее поле, вызывающее ускорение заряженной частицы, складывается из полей падающей и отраженной волн:

$$E_{ext} = E_0 e^{i(-kz - \omega t)} - E_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 \sin(kz) e^{-i\omega t},$$

* В случае $m > 1$ главные максимумы наблюдались бы также под меньшими углами, для которых

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pi, \dots, (m - 1)\pi.$$

где учтен скачок волны по фазе на π при отражении.

Это поле вызывает ускорение частицы, равное *

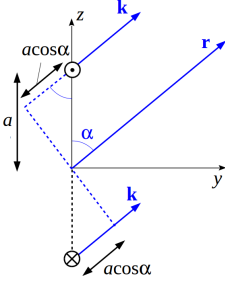
$$\ddot{x} = \frac{eE_{ext}}{m} = \frac{-2eE_0 \sin(ka) e^{-i\omega t}}{m},$$

и придает ей вторую производную от дипольного момента

$$\ddot{d} = e\ddot{x} = \frac{e^2 E_{ext}}{m} = -\frac{2e^2 E_0 \sin(ka) e^{-i\omega t}}{m}.$$

Поле, излучаемое непосредственно осциллирующим зарядом, равно

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \frac{2e^2 E_0 \sin(ka) e^{i(kr - ka \cos \alpha - \omega t)}}{mc^2 r} \mathbf{e}_\alpha.$$



Излучение, отраженное от зеркала, удобно представить как поле, исходящее от диполя-изображения, который осциллирует в противофазе с оригиналом:

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{2e^2 E_0 \sin(ka) e^{i(kr + ka \cos \alpha - \omega t)}}{mc^2 r} \mathbf{e}_\alpha.$$

Суммарное поле в волновой зоне

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{2e^2 E_0 \sin(ka) e^{i(kr - \omega t)}}{mc^2 r} (e^{ika \cos \alpha} - e^{-ika \cos \alpha}) \mathbf{e}_\alpha = \\ &= \frac{4ie^2 E_0 \sin(ka) e^{i(kr - \omega t)}}{mc^2 r} \cos(ka \sin \alpha) \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned}$$

* Сила Лоренца $F_L \sim \frac{2}{c} e E_{ext}$ и в нерелятивистском случае пренебрежимо мала.

Средняя по времени интенсивность в единицу телесного угла равна

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{cr^2}{8\pi} |H|^2 = \frac{2e^4 E_0^2 \sin^2(ka)}{\pi m^2 c^3} \sin^2(ka \cos \alpha) = \\ &= \frac{2e^4 E_0^2 \sin^2 \frac{2\pi a}{\lambda}}{\pi m^2 c^3} \sin^2 \frac{2\pi a \cos \alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

Решение задачи 7

В магнитном поле заряженная частица приобретает ускорение и становится источником дипольного излучения. Мощность потерь дипольного излучения определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\dot{d}^2}{3c^3} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} = \frac{2q^4 v^2 B^2}{3^2 m c^5} = \text{const}.$$

Тогда полные потери энергии частицы равны

$$\Delta E = \frac{dE}{dt} \Delta t,$$

где Δt – время нахождения частицы в магнитном поле. Это время составляет половину периода ларморовского вращения, поскольку в заданной геометрии частица проходит в магнитном поле ровно половину ларморовской орбиты:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Из соотношения для ускорения частицы находим угловую скорость:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{mc} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{mc}.$$

Тогда

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi mc}{qB}$$

и

$$\Delta E = \frac{2q^4 v^2 B^2}{3m^2 c^5} \cdot \frac{\pi mc}{qB} = \frac{2\pi q^3 v^2 B}{3mc^4}.$$

2019/2020 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Снаружи \mathbf{E} находится как поле бесконечной равномерно заряженной плоскости $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z$, где эффективная поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \int_{-a}^a \rho(z) dz = \int_{-a}^a \rho_0 \frac{z}{a} dz = 0.$$

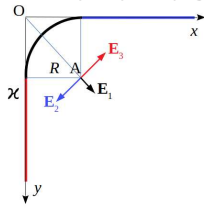
Внутри слоя поле равно

$$E(z) = E(0) + 4\pi \int_0^z \rho_0 \frac{z'}{a} dz' = E(0) + 2\pi\rho_0 \frac{z^2}{a}.$$

Из $E(a) = 0$ следует, что $\mathbf{E}(0) = -2\pi\rho_0 a \mathbf{e}_z$:

$$E(z) = -2\pi\rho_0 a + 2\pi\rho_0 \frac{z^2}{a} = -2\pi\rho_0 a \left(1 - \frac{z^2}{a}\right).$$

Решение задачи 2



По принципу суперпозиции искомое поле равно векторной сумме полей, создаваемых дугой и парой полубесконечных нитей. Причем последние два вектора друг друга компенсируют*. Поле от

*Это следует из известного свойства поля полубесконечной нити: в любой точке плоскости, нормальной к нити и проходящей через ее конец, поле ориентировано под углом 45° к нити. Расположение двух нитей таково, что их поля в заданной точке противоположны.

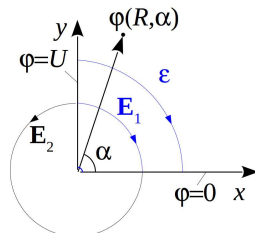
дуги можно рассчитать интегрированием как проекцию на прямую OA :

$$E_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varkappa R \cos \alpha d\alpha}{R^2} = 2 \frac{\varkappa}{R} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\varkappa \sqrt{2}}{R}.$$

Решение задачи 3

Довольно естественно предположить, что силовые линии электрического поля проходят по дугам окружностей вокруг оси z :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = E(R)\mathbf{e}_\alpha. \quad (1)$$



Сделанное предположение выдерживает проверку на выполнение условий $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ в объеме и граничных условий $\varphi|_{x=0} = U$, $\varphi|_{y=0} = 0$. По теореме единственности решение (1) является единственно верным*.

*В действительности в условии задачи не задан потенциал на оси z . Вследствие этого граничные условия оказываются неполными, что формально не позволяет применить теорему единственности. Действительно, если добавить к потенциалу, отвечающему решению (1), выражение вида $\sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \sin m\alpha$, то потенциал будет по-прежнему удовлетворять уравнению Лапласа в объеме и граничным условиям $\varphi|_{x=0} = U$, $\varphi|_{y=0} = 0$ на границе.

Казалось бы, добавка занулитса, если уточнить, что в зазоре вакуум и, следовательно, там не содержится зарядов. Но и в этом случае заряды могут возникнуть на границе между зазором и диэлектриком. Кроме того, искажение формы силовых линий неизбежно произойдет при малых r вследствие искривления поверхности электродов на краях.

Поэтому будем понимать под зазором заполненный вакуумом цилиндр малого радиуса с осью z . Если этот радиус все же много больше расстояния между электродами, то силовые линии поля будут

Из условия $U = \frac{\pi R}{2} E_1(R)$ следует

$$E_1(R) = \frac{2U}{\pi R}, \quad D_1(R) = \varepsilon \frac{2U}{\pi R}.$$

Из условия $U = -\frac{3\pi R}{2} E_2(R)$ следует

$$E_2(R) = -\frac{2U}{3\pi R}, \quad D_2(R) = \frac{2U}{3\pi R}.$$

Плотность свободного заряда в плоскости $y = 0$ равна

$$\sigma = \frac{D_{2n} - D_{1n}}{4\pi} = -\frac{U}{6\pi^2 x} (3\varepsilon + 1).$$

Решение задачи 4

Заданный шар можно представить как множество вложенных одна в другую сфер толщиной dr . Каждая сфера характеризуется эффективной поверхностной плотностью заряда $d\sigma(r) = d\sigma_0(r) \cos \theta = \rho_0 \cos \theta dr$. Известно, что внутри отдельной сферы с таким распределением заряда формируется однородное поле, а снаружи – поле диполя (см., например, [4] на с. 75):

$$r < r' : d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0 dr'}{3} \mathbf{e}_z,$$

$$r \geq r' : d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{d\mathbf{p}}{r^3} + 3\frac{(d\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где $d\mathbf{p}(r') = \frac{4\pi\rho_0 r'^3}{3} dr' \mathbf{e}_z$ – дипольный момент элементарной сферы радиусом r' толщиной dr' .

проходить вдоль границы раздела «вакуум – диэлектрик» без образования на ней поверхностных зарядов. Этому случаю отвечает решение (1).

Тогда поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ внутри шара находится как

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_0^r \left(-\frac{d\mathbf{p}(r')}{r'^3} + 3\frac{(d\mathbf{p}(r') \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r'^5} \right) + \int_r^a \frac{4\pi\rho_0 dr'}{3} \mathbf{e}_z = \\ &= \int_0^r \left(-\frac{4\pi\rho_0 r'^3}{3r^3} dr' \mathbf{e}_z + 3\frac{4\pi\rho_0 r'^3}{3} \frac{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r)}{r^3} dr' \mathbf{e}_r \right) + \int_r^a \frac{4\pi\rho_0 dr'}{3} \mathbf{e}_z = \\ &= -\frac{\pi\rho_0 r^4}{3r^3} \mathbf{e}_z + \frac{\pi\rho_0 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r) r^4}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{4\pi\rho_0}{3} (a - r) \mathbf{e}_z = \\ &= \pi\rho_0 \cos \theta r \mathbf{e}_r + \frac{4\pi\rho_0}{3} \left(a - \frac{5r}{4} \right) \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

где \mathbf{r} – координата точки наблюдения, а интегрирование производится по штрихованной переменной.

Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ за пределами шара находится как поле диполя с дипольным моментом

$$\mathbf{p} = \int_0^a d\mathbf{p} = \int_0^a \frac{4\pi\rho_0 r'^3}{3} dr' \mathbf{e}_z = \frac{\pi\rho_0 a^4}{3} \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1

Снаружи \mathbf{E} находится как поле бесконечной равномерно заряженной плоскости $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z$, где эффективная поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \int_{-a}^a \rho(z) dz = \int_{-a}^a \rho_0 \sin(\pi z/a) dz = 0.$$

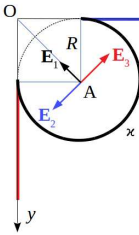
Внутри слоя поле равно

$$E(z) = E(0) + 4\pi \int_0^z \rho_0 \sin(\pi z'/a) dz' = E(0) + 4\rho_0 a \left(1 - \cos \frac{\pi z}{a}\right).$$

$E(a) = 0$, откуда получаем $\mathbf{E}(0) = -8\rho_0 a \mathbf{e}_z$. Итак, внутри слоя имеем:

$$E(z) = -8\rho_0 a + 4\rho_0 a \left(1 - \cos \frac{\pi z}{a}\right) = -4\rho_0 a \left(1 + \cos \frac{\pi z}{a}\right).$$

Решение задачи 2

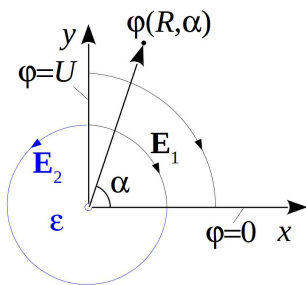


Две прямые нити вклада в поле не дают (см. комментарий в сноске к задаче 2 варианта 1, с. 122). Заряд на дуге можно рассматривать как суперпозицию зарядов плотностью κ на полной окружности и плотностью $-\kappa$ на дуге из задачи 2 варианта 1. Поле полной

окружности равно нулю, а поле малой дуги возьмем из задачи 2 варианта 1 с заменой знака (направления вектора \mathbf{E}_1):

$$E = E_1 = -\frac{\kappa\sqrt{2}}{R}.$$

Решение задачи 3



Поле имеет вид (см. задачу 3 варианта 1 на с. 123):

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = E(R)\mathbf{e}_\alpha. \quad (1)$$

Из условия $U = \frac{\pi R}{2} E_1(R)$ следует

$$E_1(R) = \frac{2U}{\pi R}, \quad D_1(R) = \frac{2U}{\pi R}.$$

Из условия $U = -\frac{3\pi R}{2} E_2(R)$ следует

$$E_2(R) = -\frac{2U}{3\pi R}, \quad D_2(R) = -\varepsilon \frac{2U}{3\pi R}.$$

Плотность свободного заряда в плоскости $y = 0$ равна

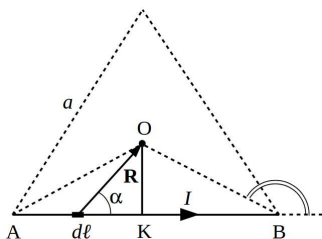
$$\sigma = \frac{D_{2n} - D_{1n}}{4\pi} = -\frac{U}{6\pi^2 x} (3 + \varepsilon).$$

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Решение задачи 1

Поле в точке \mathbf{r} от контура с током определяется законом Био – Савара:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$



где \mathbf{R} – радиус-вектор из элемента $d\boldsymbol{\ell}$ проводника с током в точку наблюдения.

Найдем поле от одной стороны с током:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{I}{c} \int_{AB} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3}.$$

Удобно перейти к интегрированию по углу:

$$z = AB - OK \operatorname{ctg} \alpha, \quad dz = \frac{OK d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad R = \frac{OK}{\sin \alpha},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{I}{c} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{OK^2 \sin^3 \alpha d\alpha}{OK^3 \sin^2 \alpha} = \frac{I}{c \cdot OK} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{3I}{ca \cos \frac{\pi}{6}} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{6I}{ca}. \end{aligned}$$

Поле от всего треугольного контура:

$$B = 3B_1 = \frac{18I}{ca}, \text{ направлено на нас.}$$

Решение задачи 2

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

Обозначим $C_{11} = C_{22} = C_1$, $C_{12} = C_{21} = C_2$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2 = q_1 \\ \varphi_2 C_1 + \varphi_1 C_2 = q_2 \end{cases}$$

Находим неизвестные C_1 , C_2 по правилу Крамера:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{q_1\varphi_1 - q_2\varphi_2}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{q_2\varphi_1 - q_1\varphi_2}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}.$$

Решение задачи 3

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{J} = 0, \quad r < a$$

$$\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_x - 2\frac{A}{r^2} \mathbf{e}_z + 4\frac{A(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^4}, \quad r > a$$

Из граничного условия $J_{2n} = J_{1n} = 0$ найдем неизвестную A :

$$J_0 \cos \alpha - 2\frac{A}{a^2} \cos \alpha + 4\frac{A}{a^2} \cos \alpha = 0,$$

откуда $A = -\frac{J_0 a^2}{2}$.

Полученное решение удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ для плотности тока и уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ для электрического поля. С учетом граничных условий выполняются условия теоремы единственности.

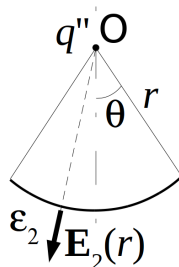
Решение задачи 4

В соответствии с методом изображений поле в среде 2 имеет вид

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{q''}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

где $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$.

Искомый поток удобно считать как поток поля \mathbf{E}_2 через часть сферы радиусом r с центром в точке O :



$$\Phi = \int_0^\theta \frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} q \cdot 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' = \frac{4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q(1 - \cos \theta).$$

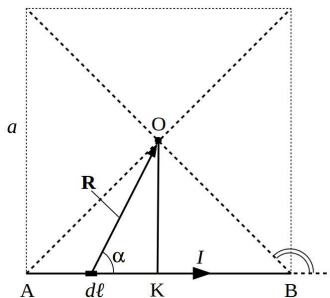
Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1

По аналогии с задачей 1 варианта 1 на с. 127 найдем поле B_1 от одной стороны с током:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{I}{c} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{OK^2 \sin^3 \alpha d\alpha}{OK^3 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{I}{c \cdot OK} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \alpha d\alpha = \frac{2I}{ca} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2}I}{ca}.$$



Поле от всего квадратного контура:

$$B = 4B_1 = \frac{8\sqrt{2}I}{ca}, \text{ направлено на нас.}$$

Решение задачи 2

$$\begin{cases} \varphi_1 = S_{11}q_1 + S_{12}q_2 \\ \varphi_2 = S_{21}q_1 + S_{22}q_2 \end{cases}$$

Обозначим $S_{11} = S_{22} = S_1$, $S_{12} = S_{21} = S_2$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} q_1 S_1 + q_2 S_2 = \varphi_1 \\ q_1 S_1 + q_2 S_2 = \varphi_2 \end{cases}$$

Находим неизвестные S_1 , S_2 по правилу Крамера:

$$S_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{q_1 \varphi_1 - q_2 \varphi_2}{q_1^2 - q_2^2}, \quad S_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{q_1 \varphi_2 - q_2 \varphi_1}{q_1^2 - q_2^2}.$$

Решение задачи 3

Будем искать плотность тока на пластине вне круга как образованную линейным электрическим диполем:

$$\mathbf{J} = A_1 \mathbf{e}_x, \quad r < a.$$

$$\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_x - 2 \frac{A_2}{r^2} \mathbf{e}_x + 4 \frac{A_2 (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^4}, \quad r > a.$$

Неизвестную A_2 найдем из граничного условия $E_{2\tau} = E_{1\tau} = 0$, равносильного условию $J_{2\tau} = 0$:

$$J_0 \sin \alpha - 2 \frac{A_2}{a^2} \sin \alpha = 0,$$

откуда $A_2 = \frac{J_0 a^2}{2}$.

Из граничного условия $J_{1n} = J_{2n}$ найдем A_1 :

$$A_1 \cos \alpha = J_0 \cos \alpha - J_0 \cos \alpha + 2J_0 \cos \alpha, \quad A_1 = 2J_0.$$

Итак,

$$\mathbf{J} = 2J_0\mathbf{e}_x, \quad r < a.$$

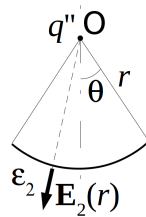
$$\mathbf{J} = J_0\mathbf{e}_x - \frac{J_0a^2}{r^2}\mathbf{e}_x + 2\frac{J_0a^2 \cos \alpha}{r^3}\mathbf{r}, \quad r > a.$$

Полученное решение удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ для плотности тока и уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ для электрического поля. С учетом граничных условий выполняются условия теоремы единственности.

Решение задачи 4

В соответствии с методом изображений * поле в среде 2 имеет вид

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{q''}{r^2}\mathbf{e}_r,$$



где $q'' = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}q$.

Искомый ток удобно считать как поток вектора $\mathbf{j}_2 = \sigma_2\mathbf{E}_2$ через часть сферы радиусом r с центром в точке O :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\theta \frac{2\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)r^2}q \cdot 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' = \frac{4\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}q(1 - \cos \theta) = \\ &= \frac{I_0\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

где в силу теоремы Гаусса принято, что $4\pi\sigma_1q = I_0$.

* См. задачу 3.29 из задачника [1].

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Магнитное поле всюду внутри соленоида направлено параллельно оси *. Из теоремы Стокса следует однородность \mathbf{H} в объеме соленоида. Тогда энергия в сердечнике равна

$$W_c = \frac{\mu H^2}{8\pi} \pi b^2 l,$$

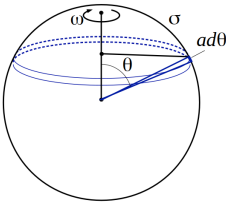
а во всем соленоиде:

$$W = \frac{\mu H^2}{8\pi} \pi b^2 l + \frac{H^2}{8\pi} \pi (a^2 - b^2) l.$$

Отсюда непосредственно получаем искомое отношение:

$$\frac{W_c}{W} = \frac{\mu b^2}{\mu b^2 + (a^2 - b^2)}.$$

Решение задачи 2



Вращающаяся заряженная сфера эквивалентна неподвижной с распределенными по ней токами. Выделим на сфере полоску шириной $ad\theta$. Линейная плотность тока по такой полоске равна

$$J(\theta) = \sigma v = \frac{Q}{4\pi a^2} \omega a \sin \theta = \frac{Q\omega}{4\pi a} \sin \theta.$$

Будем искать решение для поля в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0, \quad r < a,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, \quad r > a.$$

*Если допустить наличие у поля радиальной составляющей, то поток поля через поверхность цилиндра, соосного с соленоидом, окажется отличен от нуля, что противоречит условию $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Неизвестные B_0 и m найдем из граничных условий:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{m}{a^3} \sin \theta + \frac{B_0}{\mu} \sin \theta = \frac{4\pi Q\omega}{c} \frac{1}{4\pi a} \sin \theta,$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 2\frac{m}{a^3} \cos \theta - B_0 \cos \theta = 0,$$

откуда

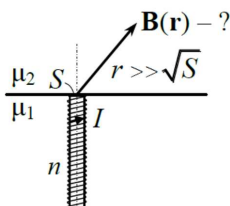
$$m = \frac{Q\mu a^2 \omega}{c(\mu + 2)}, \quad B_0 = \frac{2Q\mu\omega}{ca(\mu + 2)}.$$

Решение задачи 3

Учитывая, что в вакууме снаружи от соленоида вдали от его конца решение имеет вид поля точечного заряда, будем искать решение в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad z > 0,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{A_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad z < 0,$$



где начало координат помещено в конец соленоида.

Выберем на границе раздела некоторую точку $r \gg \sqrt{S}$ и запишем в ней граничное условие на тангенциальные компоненты \mathbf{H} :

$$\frac{A_1}{r^2} = \frac{A_2}{r^2},$$

откуда следует, что $A_1 = A_2 = A$.

Теперь рассмотрим сферу радиусом $r \gg \sqrt{S}$ с центром в начале координат. Поток индукции магнитного поля через сферу равен нулю. С другой стороны этот поток складывается из потока через сечение соленоида и потока поля вне соленоида через сферу с отверстием в месте прохождения соленоида:

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{4\pi\mu_1 I S n}{c} + \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Поскольку $S \ll 4\pi r^2$, то $\iint_S \frac{A}{r^2} dS \approx \iint \frac{A}{r^2} dS$:

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi\mu_1 ISn}{c} + \iint_{z>0} \mathbf{B}_1 d\mathbf{S} + \iint_{z<0} \mathbf{B}_2 d\mathbf{S} = \\ & = -\frac{4\pi\mu_1 ISn}{c} + 2\pi\mu_1 r^2 \frac{A}{r^2} + 2\pi\mu_2 r^2 \frac{A}{r^2}, \end{aligned}$$

откуда $A = \frac{2\mu_1 ISn}{c(\mu_1 + \mu_2)}$.

Итак,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_1^2 ISn}{c(\mu_1 + \mu_2)r^2} \mathbf{e}_r, \quad z > 0,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_1\mu_2 ISn}{c(\mu_1 + \mu_2)r^2} \mathbf{e}_r, \quad \frac{A_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad z < 0.$$

Отметим, что полученное решение при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Кроме того, на границе раздела выполняется условие $B_{1n} = B_{2n}$. Поэтому по теореме единственности оно верно.

Решение задачи 4

Сила взаимодействия двух твердых диполей с фиксированными ориентациями рассчитывается по формуле *:

$$\mathbf{F} = 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{m}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^5} - 15 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^7}.$$

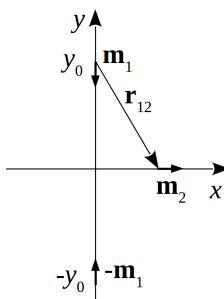
Выделим x -компоненту силы с учетом, что $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{m}_2 \parallel \mathbf{e}_x$:

$$\begin{aligned} F_x &= 3 \frac{m_1 y_0 m_2}{r_{12}^5} - 15 \frac{m_1 y_0 m_2 x x}{r_{12}^7} = \frac{m_1 m_2 y_0}{r_{12}^7} (3r_{12}^2 - 15x^2) = \\ &= \frac{m_1 m_2 y_0}{r_{12}^7} (3(y_0^2 + x^2) - 15x^2) = 3 \frac{m_1 m_2 y_0}{r_{12}^7} (y_0^2 - 4x^2). \end{aligned}$$

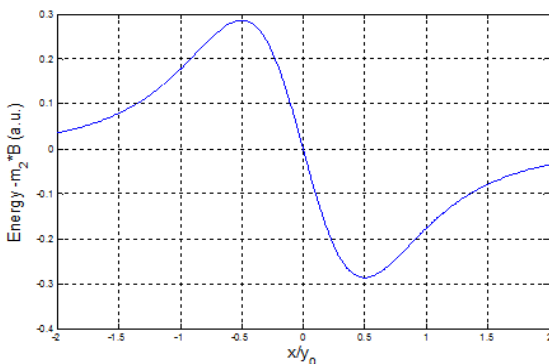
* См. задачу 4.26 из задачника [1].

Из геометрии задачи следует, что такая же компонента силы действует со стороны диполя \mathbf{m}_2 . Поэтому искомая сила равна нулю при $x = \pm \frac{y_0}{2}$.

Кроме того, $F_x < 0$ при $|x| > \frac{y_0}{2}$ и $F_x > 0$ при $|x| < \frac{y_0}{2}$. Поэтому только в окрестности точки $x = +\frac{y_0}{2}$ сила направлена к точке равновесия, так что в этой точке равновесие устойчиво.



Примечание. На рисунке показан вид потенциальной энергии взаимодействия диполей с минимумом в точке устойчивого равновесия.

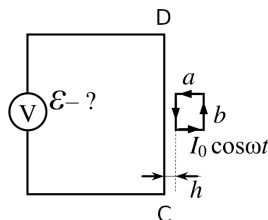


Решение задачи 5

Искомая ЭДС определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{cdt},$$

где Φ – поток магнитного поля через сечение большого контура при протекании по малому контуру тока $I(t)$.



Этот поток удобно вычислить, воспользовавшись свойством симметричности взаимных емкостных коэффициентов. Такой же поток возникнет внутри малого контура, если ток I пустить по большому контуру. При заданной геометрии основной вклад в магнитное поле будет давать ток, текущий по стороне CD (см. рисунок), которую можно считать бесконечным прямым проводом:

$$B = \frac{2I}{cR}.$$

Тогда искомый поток равен

$$\Phi = \iint \frac{2I}{cR} dS = b \int_h^{h+a} \frac{2I}{cR} dR = \frac{2bI_0 \cos \omega t}{c} \ln \frac{h+a}{h},$$

а искомая ЭДС

$$\mathcal{E} = \frac{2b\omega I_0 \sin \omega t}{c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{h} \right).$$

Решение задачи 6

Запишем уравнение Максвелла с токами смещения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{cdt}.$$

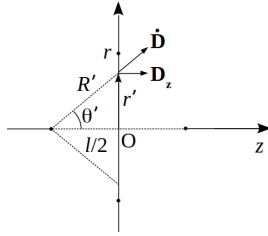
Проинтегрируем уравнение по площади поверхности, натянутой на некоторый контур C :

$$\iint \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi I}{c} + \frac{d}{cdt} \iint \mathbf{D} d\mathbf{S}.$$

Получили теорему Стокса при наличии токов смещения. Заряд на шариках меняется со временем и создает в пространстве переменное электрическое поле:

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{\dot{q}}{R^2} \mathbf{e}_R = \frac{I}{R^2} \mathbf{e}_R$$

Выберем в качестве контура окружность радиусом r с центром в точке O (см. рисунок). В зависимости от того, какую поверхность мы натянем на контур, ток I будет или не будет через нее протекать. Если задать в качестве поверхности круг, ток через него протекать не будет, а поток вектора \mathbf{D} будет одинаковым от обоих шариков. Из симметрии задачи следует, что вектор \mathbf{H} имеет только α -компоненту и зависит только от r . Тогда



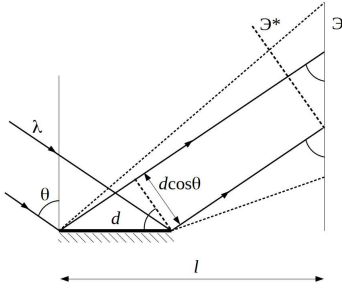
$$\begin{aligned} 2\pi r H(r) &= 2 \iint \frac{I}{cR'^2} \cos \theta' dS = 2 \int \frac{I}{cR'^2} \cos \theta' \cdot 2\pi r' dr' = \\ &= 4\pi \int_0^r \frac{lI}{2cR'^3} r' dr' = \pi \int_0^r \frac{lI}{c(r'^2 + l^2/4)^{3/2}} dr'^2 = \\ &= \frac{2\pi l I}{c} \left(\frac{2}{l} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \right) = \frac{4\pi I}{c} \left(1 - \frac{l}{2\sqrt{r^2 + l^2/4}} \right), \end{aligned}$$

откуда искомое поле $H(r) = \frac{2I}{cr} \left(1 - \frac{l}{2\sqrt{r^2 + l^2/4}} \right) *$.

* Видно, что при $r \rightarrow \infty$ получаем поле прямого провода, а при $r \rightarrow 0$ $H \rightarrow 0$. Действительно, на больших расстояниях шарики представляют собой точку с суммарным нулевым зарядом, а провод с небольшим разрывом – непрерывный провод с током. При $r \rightarrow 0$ циркуляция поля \mathbf{H} по окружности с малым радиусом r убывает как r^2 . Поэтому $H(r) \propto r \rightarrow 0$.

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1



Эффективная апертура зеркала, задающая поперечный размер отраженного пучка, равна $d \cos \theta$. Соответствующий размер пятна на воображаемой плоскости, перпендикулярной пучку:

$$D^* = d \cos \theta + \frac{l}{\sin \theta} \cdot \frac{\lambda}{d \cos \theta}.$$

Условие на минимум для D^* то же, что и для D (на экране Э):

$$D^{*'} = \cos \theta - \frac{\lambda}{d_0^2 \sin \theta \cos \theta} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow d_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\sin \theta \cos^2 \theta}}.$$

Минимальный размер

$$D_{min}^* = 2\sqrt{\frac{\lambda l}{\sin \theta}}, \quad D_{min} = \frac{D_{min}^*}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta} \sqrt{\frac{\lambda l}{\sin \theta}}.$$

Решение задачи 2

Получим выражение для групповой скорости lm -волны при частоте ω . Закон дисперсии:

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = c^2 k_z^2 + \omega_{lm \min}^2.$$

Продифференцируем равенство по k_z :

$$2\omega \frac{d\omega}{dk_z} = 2c^2 k_z$$

Отсюда получим

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{c^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_{lm\min}^2}}{c\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{lm\min}}{\omega}\right)^2}.$$

В нашей задаче $\omega_{lm\min} = \omega_{10\min} = \frac{\pi c}{a}$, $\omega = \omega_{20\min} = \frac{2\pi c}{a}$ *, поэтому

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}c}{2}.$$

Решение задачи 3

Заданные коэффициенты отражения описываются выражениями

$$r = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle}, \quad r_s = \frac{\langle S_{s1} \rangle}{\langle S_{s0} \rangle}, \quad r_p = \frac{\langle S_{p1} \rangle}{\langle S_{p0} \rangle}.$$

Среднее по времени значение вектора Пойтинга для плоской волны записывается как

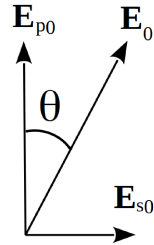
$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E^2.$$

Интенсивности ортогональных s - и p -волн складываются. Тогда

$$r = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \frac{E_{s1}^2 + E_{p1}^2}{E_{s0}^2 + E_{p0}^2} = \frac{r_s E_{s0}^2 + r_p E_{p1}^2}{E_{s0}^2 + E_{p0}^2} = \frac{E_{p0}^2 (r_s \operatorname{tg}^2 \theta + r_p)}{E_{p0}^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{r_p - r}{r - r_s}}.$$



* $\omega_{20\min} < \omega_{01\min} = \frac{\pi c}{b} = \frac{3\pi c}{a}$.

Решение задачи 4

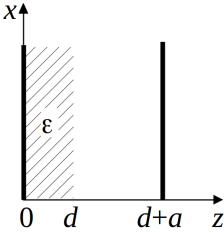
Ищем решение в виде, обеспечивающем условие $E_x = 0$ на стенках резонатора:

$$E_x(z) = \begin{cases} A \sin(\sqrt{\varepsilon}kz), & 0 \leq z \leq d, \\ B \sin(k(z - d - a)), & d \leq z \leq d + a. \end{cases}$$

$$H_y(z) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}A \cos(\sqrt{\varepsilon}kz), & 0 \leq z \leq d, \\ B \cos(k(z - d - a)), & d \leq z \leq d + a. \end{cases}$$

Слой диэлектрика толщиной d накладывает дополнительные граничные условия на поля на границе «вакуум – диэлектрик»:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (1)$$



Граничные условия (1) принимают вид

$$\begin{aligned} A \sin(\sqrt{\varepsilon}kd) &= -B \sin(ka), \\ \sqrt{\varepsilon}A \cos(\sqrt{\varepsilon}kd) &= B \cos(ka). \end{aligned} \quad (2)$$

Делением первого уравнения в (2) на второе получаем уравнение на a :

$$\operatorname{tg}(ka) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon}kd). \quad (3)$$

Поскольку частота задана, то $k = \frac{\omega}{c}$ и правая часть (3) – константа. Тогда можно написать

$$a = \frac{c}{\omega} \left[\pi m - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\varepsilon}\omega d}{c} \right) \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Эффективная апертура зеркала, задающая поперечный размер отраженного пучка, равна $d \cos \alpha$. Соответствующий размер пятна на воображаемой плоскости, перпендикулярной пучку:

$$D^* = d \cos \alpha + \frac{l}{\cos \beta} \cdot \frac{\lambda}{d \cos \alpha}.$$

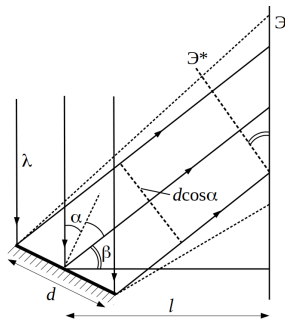
Условие на минимум для D^* то же, что и для D (на экране Э):

$$D^{*'} = \cos \alpha - \frac{1}{d_0^2} \cdot \frac{\lambda}{\cos \beta \cos \alpha} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow d_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\cos \beta \cos^2 \alpha}}.$$

Минимальный размер

$$D_{min}^* = 2\sqrt{\frac{\lambda l}{\cos \beta}}, \quad D_{min} = \frac{D_{min}^*}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos \beta} \sqrt{\frac{\lambda l}{\cos \beta}}.$$



Решение задачи 2

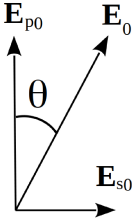
Из решения задачи 2 варианта 1 (см. с. 138) групповая скорость равна

$$v_g = \frac{\sqrt{3}c}{2}.$$

Отсюда фазовая скорость:

$$v_{ph} = \frac{c^2}{v_g} = \frac{2\sqrt{3}c}{3}.$$

Решение задачи 3



Заданные коэффициенты отражения описываются выражениями

$$d = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_0 \rangle}, \quad d_s = \frac{\langle S_{s2} \rangle}{\langle S_{s0} \rangle}, \quad d_p = \frac{\langle S_{p2} \rangle}{\langle S_{p0} \rangle}.$$

Среднее по времени значение вектора Пойтинга для плоской волны записывается как

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E^2.$$

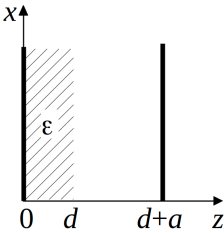
Интенсивности ортогональных s - и p -волн складываются. Тогда

$$d = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \frac{E_{s2}^2 + E_{p2}^2}{E_{s0}^2 + E_{p0}^2} = \frac{d_s E_{s0}^2 + d_p E_{p0}^2}{E_{s0}^2 + E_{p0}^2} = \frac{E_{p0}^2 (d_s \operatorname{tg}^2 \theta + d_p)}{E_{p0}^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{d_p - d}{d - d_s}}.$$

Решение задачи 4



Как получено в решении задачи 4 варианта 1 (см. на с. 140),

$$\operatorname{tg}(ka) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} kd),$$

откуда

$$d = \frac{c}{\sqrt{\epsilon} \omega} \left[\pi m - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} \frac{\omega a}{c} \right) \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Запишем поле за слайдом в виде интеграла Кирхгофа в области дифракции Фраунгофера:

$$E_p = \frac{e^{ik\left(z_p + \frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{\sqrt{i\lambda z_p}} \int_{-w}^w E_0 \cdot (1 - b + b \cos \alpha x) e^{ik_x x} dx.$$

С учетом $\cos \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$ интеграл разбивается на три слагаемых, каждое из которых соответственно содержит множители:

$$I_1 = \int_{-w}^w e^{ik_x x} dx = \frac{e^{ik_x x}}{ik_x} \Big|_{-w}^w = 2w \operatorname{sinc}(k_x w),$$

$$I_2 = \int_{-w}^w e^{-i\alpha x} e^{ik_x x} dx = \frac{e^{i(k_x - \alpha)x}}{i(k_x - \alpha)} \Big|_{-w}^w = 2w \operatorname{sinc}((k_x - \alpha)w),$$

$$I_3 = \int_{-w}^w e^{i\alpha x} e^{ik_x x} dx = \frac{e^{i(k_x + \alpha)x}}{i(k_x + \alpha)} \Big|_{-w}^w = 2w \operatorname{sinc}((k_x + \alpha)w).$$

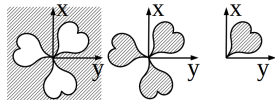
При устремлении ширины слайда к бесконечности каждый интеграл приобретает вид острого пика соответственно при $k_x = -\alpha, 0, \alpha$.

В приближении Фраунгофера $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \theta$, откуда $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\alpha\lambda}{2\pi}, 0, \frac{\alpha\lambda}{2\pi}$.

Решение задачи 2

По принципу Бабине имеем

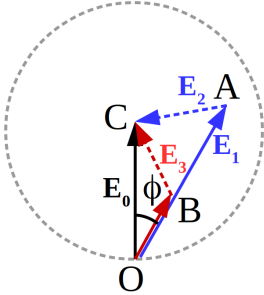
$$\hat{E}_0 = \hat{E}_1 + \hat{E}_2,$$



1 2 3

где шляпкой помечены векторы на комплексной плоскости.

На диаграмме Френеля точкой А обозначен конец вектора \hat{E}_1 . Он лежит на одном из витков спирали, отвечающем последней зоне Френеля, укладывающейся в отверстие 1. Поскольку все зоны Френеля в этом отверстии частично заслонены, то центр спирали расположен ниже точки С, а ее радиус даже для небольшого числа зон Френеля меньше E_0 .



откуда

Дополнительным к экрану \mathcal{E} будет экран с одним сердечком-отверстием. Поле в точке Р за таким экраном будет равно $\frac{1}{3}\hat{E}_1$. Тогда по принципу Бабине имеем

$$\hat{E}_0 = \frac{1}{3}\hat{E}_1 + \hat{E}_3,$$

$$\hat{E}_3 = \hat{E}_0 - \frac{1}{3}\hat{E}_1.$$

Из треугольника АОС получим

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \phi,$$

$$\cos \phi = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA \cdot OC} = \frac{E_1^2 + E_0^2 - E_2^2}{2E_1 \cdot E_0}.$$

Из треугольника ВОС получим

$$I_3 = E_3^2 = BC^2 = \frac{1}{9}OA^2 + OC^2 - 2\frac{OA}{3} \cdot OC \cos \phi =$$

$$= \frac{E_1^2}{9} + E_0^2 - \frac{2}{3}E_1 E_0 \frac{E_1^2 + E_0^2 - E_2^2}{2E_1 E_0} =$$

$$= \frac{1}{9}I_1 + I_0 - \frac{1}{3}(I_1 + I_0 - I_2) = \frac{6I_0 + 3I_2 - 2I_1}{9}.$$

Решение задачи 3

Из задачи про вращающийся электрон (4.18 [2]) знаем:

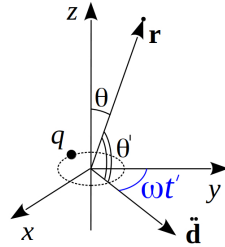
$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \frac{qa\omega^2}{c^2 r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \omega t'} \mathbf{e}_\phi,$$

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{cr^2}{4\pi} \langle |\mathbf{H}_0(\mathbf{r})|^2 \rangle = \frac{q^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta),$$

где $t' = t - r/c$ – время излучения волны, \mathbf{e}_ϕ – единичный вектор, направленный по $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$, \mathbf{H}_0 – магнитное поле вращающегося электрона в волновой зоне*.

Учтено, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) &= x \cdot \ddot{d}_x + y \cdot \ddot{d}_y + z \cdot \ddot{d}_z = \\ &= 0 + y \cdot \ddot{d}_y + 0 = r \sin \theta \cdot \ddot{d} \cos \omega t' = \\ &= r \ddot{d} \cos \theta', \end{aligned}$$



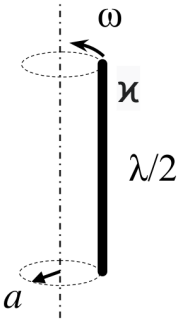
откуда следует, что $\cos \theta' = \sin \theta \cos \omega t'$.

Вклад dH в амплитуду поля от каждого кусочка палочки длины dz одинаков по величине и сдвинут по фазе (в связи с разностью хода) на $-kz \cos \theta$, что эквивалентно

*Электромагнитная волна в произвольной точке пространства эллиптически поляризована и записывается как

$$H(1, b e^{i\psi}) e^{-i\omega t}.$$

Его мгновенная величина равна $\mathbf{H} = (H \cos(\omega t), bH \cos(\omega t - \psi))$, а средний квадрат $\langle H_0^2 \rangle = \frac{1+b^2}{2} H^2$.



умножению амплитуды dH на фазовый множитель $e^{-ikz \cos \theta}$. Сумма вкладов всех кусочков равна:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, t) &= C \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikz \cos \theta} \kappa dz = \\ &= \kappa l C \operatorname{sinc} \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

В случае $l \rightarrow 0$ должны получить

$$H(\mathbf{r}, t') \rightarrow qC = \frac{qa\omega^2}{c^2 r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \omega t'},$$

откуда

$$C = \frac{a\omega^2}{c^2 r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \omega t}.$$

Усреднение по времени дает

$$\langle C^2 \rangle = \frac{a^2 \omega^4}{2c^4 r^2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Отсюда получаем искомое угловое распределение:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle &= S r^2 = \frac{cr^2}{4\pi} \langle H^2(r) \rangle = \frac{c}{4\pi} \kappa^2 l^2 \langle C^2 \rangle \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{\kappa^2 l^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{\kappa^2 l^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Решение задачи 4

Средняя по времени плотность потока импульса электромагнитной волны задается выражением $\frac{\langle S \rangle}{c}$, где $\langle S \rangle$ — средняя плотность мощности излучения.

Средний импульс, передаваемый в единицу времени единице отражающей поверхности, составляет

$$p = \frac{2\langle S \rangle}{c},$$

что с другой стороны равно давлению света.

Сила гравитационного притяжения, действующая на единицу поверхности паруса, равна

$$f_g = \gamma \frac{M_c \rho d}{R^2},$$

где ρ – плотность, d – толщина пленки.

Условие удаления паруса от Солнца:

$$f_g < p.$$

Средняя плотность мощности излучения на расстоянии R от Солнца равна

$$\langle S \rangle = \frac{W}{4\pi R^2}.$$

Тогда получим

$$\gamma M_c \rho d < \frac{2W}{4\pi},$$

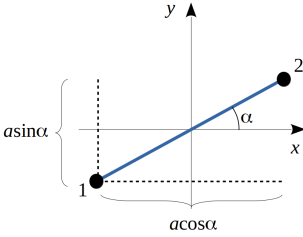
откуда искомая толщина пленки

$$d < \frac{2W}{4\pi\gamma M_c \rho c} = \frac{W}{2\pi\gamma M_c \rho c}.$$

Подставляем численные величины в системе СГС:

$$d < \frac{3.8 \cdot 10^{26} \cdot 10^7}{2 \cdot 3.14 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 1.5 \cdot 3 \cdot 10^{10}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 1 \text{ мкм}.$$

Решение задачи 5



Под действием электрического поля падающей волны заряды совершают колебательные движения вдоль спицы. Амплитуды колебаний одинаковые, но второй заряд опережает первый по фазе на величину $ka \cos \alpha$. С другой стороны, второй заряд находится ближе * к приемнику сигнала: по оси x на $a \cos \alpha$, по оси y – на $a \sin \alpha$. Поэтому для волн, рассеянных в этих направлениях, сдвиг по фазе составляет соответственно

$$\begin{aligned} \Delta\phi_x &= ka \cos \alpha - ka \cos \alpha = 0, \\ \Delta\phi_y &= ka \cos \alpha - ka \sin \alpha = ka(\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

Магнитное поле дипольного излучения в волновой зоне

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}.$$

Поэтому амплитуда магнитного поля вдоль оси x определяется проекцией \ddot{d}_y , а вдоль оси y – проекцией \ddot{d}_x . Для средних по времени квадратов модулей комплексных выражений имеем (см. формулу (11.5) из [5]):

$$\begin{aligned} \langle H^2(y) \rangle &= 2 \frac{\langle \ddot{d}_y^2 \rangle}{c^4 r^2} (1 + \cos(ka(\cos \alpha - \sin \alpha))) = \\ &= 2 \frac{\langle \ddot{d}^2 \rangle \cos^2 \alpha}{c^4 r^2} (1 + \cos(ka(\cos \alpha - \sin \alpha))), \\ \langle H^2(x) \rangle &= 2 \frac{\langle \ddot{d}_x^2 \rangle}{c^4 r^2} (1 + \cos 0) = 4 \frac{\langle \ddot{d}^2 \rangle \sin^2 \alpha}{c^4 r^2}. \end{aligned}$$

* Без ограничения общности примем $0 < \alpha < \pi/2$.

Отсюда искомое отношение

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{\langle H^2(x) \rangle}{\langle H^2(y) \rangle} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \cos(ka(\cos \alpha - \sin \alpha))}.$$

Решение задачи 6

Распределение интенсивности в интерференционной картине на траектории частицы описывается выражением

$$I(X') = \frac{I_0}{N^2} \cdot \operatorname{sinc}^2 \frac{kaX'}{2L} \cdot \frac{\sin^2 \frac{kbNX'}{2L}}{\sin^2 \frac{kbX'}{2L}}.$$

Мощность потерь на излучение свободной заряженной частицы в переменном электрическом поле равна

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{2q^4 E^2}{3m^2 c^3}.$$

По условию потери на излучение малы по сравнению с кинетической энергией. Поэтому считаем $v = \operatorname{const}$, и тогда полная энергия на излучение запишется как *

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2q^4}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{2q^4}{3m^2 c^3 v} \int_{-\infty}^{\infty} I(X') dX'. \quad (1)$$

Трудности с интегрированием (1) можно преодолеть, оценив интеграл с хорошей точностью из следующих соображений. Интенсивность сосредоточена в главных дифракционных максимумах ** угловой ширины $\frac{2\lambda}{Nb}$ в интервале $[-\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{a}]$. Число этих максимумов $M \approx \frac{2b}{a}$, а средняя

* При реальных размерах оптической системы время прохождения частицей светлой интерференционной полосы много больше периода колебаний переменного поля. Поэтому происходит усреднение E^2 по времени, и можно записать под интегралом $\langle E^2 \rangle = I(X')$.

** Аккуратный расчет показывает, что в них сосредоточено $\sim 90\%$ интенсивности.

интенсивность

$$\langle I \rangle \approx 0,45^2 I_0 \approx 0,2 I_0$$

(один множитель $\sim 0,45$ за счет усреднения sinc^2 , другой $\sim 0,45$ за счет усреднения дроби $\frac{\sin^2 \frac{kbNX'}{2L}}{N^2 \sin^2 \frac{kbX'}{2L}}$, сводящейся к sinc^2 с учетом малости аргумента синуса в знаменателе в окрестности главных максимумов *).

Тогда получаем оценку

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2q^4}{3m^2 c^3 v} \langle I \rangle M \approx 0,27 \frac{\pi L q^4}{m^2 c^3 v N a k} I_0.$$

* Точные расчеты показывают, что при $N \gg 1$ $\langle \text{sinc}^2 \rangle = 0,45$ с точностью до второго знака после запятой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 1. Электродинамика частиц и полей. С. 48, 88, 96, 97, 131, 134
2. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. С. 102, 106, 145
3. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. С. 49
4. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. Электричество и магнетизм. С. 124
5. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 2. Электромагнитные волны. С. 148
6. Гинзбург И. Ф., Погосов А. Г. Электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2010. Релятивистское описание. Волновые явления. С. 72

Учебное издание

Яковлев Валериан Иванович, **Погосов** Артур Григорьевич,
Синицкий Станислав Леонидович,
Богомятков Антон Викторович,
Брагинский Леонид Семенович, **Володин** Владимир Алексеевич,
Жданов Евгений Юрьевич, **Казанцев** Дмитрий Михайлович,
Зайцев Александр Васильевич, **Захаров** Михаил Иванович,
Калинин Петр Валерьевич,
Котельникова Мария Станиславовна,
Максимов Дмитрий Александрович, **Новиков** Павел Леонидович,
Похабов Дмитрий Александрович, **Сандалов** Евгений Сергеевич,
Симонов Андрей Артемович, **Степанов** Василий Дмитриевич,
Пушаков Олег Алексеевич.

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
2017–2020 гг.**

Учебное пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Оригинал-макет *П. Л. Новикова*

Подписано в печать 25.09.2023 г.

Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.

Уч.-изд. л. 10. Усл. печ. л. 9,3. Тираж 115 экз.

Заказ №215

Издательский полиграфический центр НГУ.

630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.